

УДК 539.3

Динамическая реакция пластины на действие движущейся нагрузки

Александр Н.Блинов

Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

В работе рассматривается задача об установившемся движении нагрузки по пластине, лежащей на упругом основании. С практической точки зрения большой интерес вызывает значение скорости, при котором возникает явление резонанса. Решение этой задачи, приведенное в данной работе, можно использовать как основу для проведения практических экспериментов.

Ключевые слова: установившееся движение, упругое основание, резонанс.

Введение

Знание реакции упругого слоя на действие движущейся нагрузки имеет большое практическое значение [1]. Например, при некоторой скорости нагрузки, называемой критической, возникает явление резонанса, при котором прогиб упругого слоя возрастает, что может привести к разрушению пластины.

В настоящей работе рассматривается упругий слой на упругом основании, по которому движется с постоянной скоростью нагрузка. В первой части работы изучается одномерная постановка задачи: бесконечная упругая балка на винклеровом основании под действием постоянной нагрузки, движущейся равномерно, т.е. с постоянной скоростью. Получено точное значение прогиба балки и найдена критическая скорость. Во второй части работы исследуется двумерная постановка задачи. В качестве модели для упругого слоя взята система уравнений Миндлина [2], а для описания упругого основания — уравнения теории упругости в случае плоского деформированного состояния. Условия сопряжения между ними — скользящий контакт. Получено решение для сосредоточенной нагрузки, как функции $x - vt$. Условие возникновения резонанса сводится к нелинейному алгебраическому уравнению. Наименьший положительный корень уравнения и является критической скоростью.

1. Реакция балки на винклеровом основании на действие движущейся нагрузки

Груз весом P равномерно движется со скоростью v вдоль бесконечной балки, лежащей на сплошном однородном основании. Картина изгиба оси балки остается стационарной равномерно движущейся со скоростью движения груза. Такое явление называют бегущей изгибной волной. Вертикальная координата груза остается неизменной, и поэтому вертикальное ускорение груза равно нулю, а давление груза на балку равно весу P . Основание балки

будем считать линейно деформируемым и следующим гипотезе Винклера: $Q = -ky$, где Q — интенсивность реакции основания, y — прогиб; k — коэффициент пропорциональности, характеризующий жесткость основания, называемый коэффициентом постели. Будем считать, что упругое основание лишено свойств инерции и демпфирования. Таким образом, упругость — единственное физическое свойство, которым обладает данная модель упругого основания. Пусть x — абсцисса текущего сечения балки, отсчитываемая от некоторого неподвижного начала координат, t — время, EJ — жесткость поперечного сечения балки при изгибе. Дифференциальное уравнение изгиба балки записывается в форме

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - ky. \quad (1)$$

Здесь правая часть представляет собой интенсивность нагрузки в точке x в момент времени t и состоит из двух членов: инерционной нагрузки (m — масса единицы длины балки) и реакции упругого основания.

Запишем уравнение (1) в форме

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2a \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 y = 0, \quad (2)$$

где

$$a = \frac{m}{2EJ}, \quad b^2 = \frac{k}{EJ}. \quad (3)$$

Решение этого уравнения ищем в виде $y = f(x - vt)$. Здесь аргумент $x - vt$ представляет собой абсциссу текущего сечения балки, отсчитываемую от подвижного начала координат, который совмещен с грузом.

После подстановки уравнение в частных производных (2) переходит в следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$f^{IV} + 2av^2 f'' + b^2 f = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой дифференциальное уравнение бегущей волны. Решая его, получим:

$$f = e^{-\alpha \xi} (C_1 \sin \beta \xi + C_2 \cos \beta \xi) + e^{\alpha \xi} (C_3 \sin \beta \xi + C_4 \cos \beta \xi), \quad (5)$$

где $\xi = x - vt$, а величины α и β определяются через коэффициенты уравнения (4) по формулам:

$$\alpha = \sqrt{\frac{b - av^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{b + av^2}{2}}. \quad (6)$$

Будем считать, что решение (5) относится к той части бегущей волны, которая расположена впереди движущегося груза (т.е. при $\xi > 0$). Для другой части волны (при $\xi < 0$) уравнение изогнутой оси имеет ту же форму:

$$f_1 = e^{-\alpha \xi} (D_1 \sin \beta \xi + D_2 \cos \beta \xi) + e^{\alpha \xi} (D_3 \sin \beta \xi + D_4 \cos \beta \xi), \quad (7)$$

но с другими значениями констант.

Найдем восемь постоянных C_i и D_i из (5) и (7). Для этого следует воспользоваться условиями:

$$\begin{cases} \text{на бесконечности } f = 0 \text{ при } \xi = \infty, \quad f_1 = 0 \text{ при } \xi = -\infty; \\ \text{под грузом } f(0) = f_1(0), \quad f'(0) = f'_1(0), \quad f''(0) = f''_1(0), \end{cases}$$

$$f_1'''(0) - f'''(0) = \frac{P}{EJ} . \quad (8)$$

Из (8) находим:

$$D_1 = D_2 = C_3 = C_4 = 0.$$

$$C_1 = -D_3 = -\frac{P}{2EJ\beta(\alpha^2 + \beta^2)} , \quad C_2 = -D_4 = -\frac{P}{2EJ\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} .$$

Таким образом, бегущая волна имеет совершенно симметричную форму, и для анализа полученных результатов достаточно рассмотреть, например, часть волны при $\xi \geq 0$:

$$f = -\frac{Pe^{-\alpha\xi}}{2EJ\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha \sin \beta\xi + \beta \cos \beta\xi) . \quad (9)$$

Наибольший интерес представляет значение прогиба под грузом, т.е. при $\xi = 0$:

$$f(0) = -\frac{P}{2EJ\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} .$$

Подставим сюда α, β из (6), получим

$$f(0) = -\frac{P}{EJb\sqrt{2(b - av^2)}} .$$

При $v = 0$, т.е. в случае неподвижной нагрузки, получим известный результат для прогиба (обозначаемого f_c) под действием силы, приложенной к бесконечно длинной балке на упругом основании. При скорости $v > 0$ прогиб под грузом будет превосходить величину f_c . Отношение $\mu = f/f_c$ называется коэффициентом динамичности, и он равен

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{mv^2}{2\sqrt{kEJ}}}} .$$

Из этой формулы видно влияние всех параметров системы. С ростом скорости v динамический коэффициент увеличивается и при скорости

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{2\sqrt{kEJ}}{m}}$$

обращается в бесконечность. Найденное значение скорости является критическим.

К полученным результатам нужно относиться с осторожностью хотя бы потому, что игнорировались инерционные и демпфирующие свойства основания; в то же время именно эти свойства будут проявляться тем более заметно, чем быстрее движется груз и чем динамичнее весь процесс в целом. Тем не менее полученное решение качественно верно отражает тенденцию прогибов к увеличению при критической скорости движения груза [3].

2. Реакция пластины на упругом основании на действие движущейся нагрузки

Упругий слой толщины $2h$ лежит на поверхности полубесконечной упругой среды. Слой и полупространство однородные, изотропные и линейно-упругие. По слою движется нормальная нагрузка $F(x, t)$ с постоянной скоростью v . Рассматривается плоское деформированное

состояние. Предполагается, что картина деформации инвариантна относительно времени в системе координат, связанной с движущейся нагрузкой. Тогда подстановкой $r = x - vt$ число независимых переменных с трех x, y, t уменьшится до двух r, y .

Перемещения и напряжения в полупространстве можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \frac{\sigma_x}{\mu} &= \frac{2(1-\vartheta)}{1-2\vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2\vartheta}{1-2\vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\sigma_y}{\mu} &= \frac{2(1-\vartheta)}{1-2\vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{2\vartheta}{1-2\vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\sigma_{xy}}{\mu} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Волновые потенциалы $\varphi(x, y, t)$, $\psi(x, y, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{1}{C_l^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ C_l^2 &= \frac{2\mu(1-\vartheta)}{\rho(1-2\vartheta)}, \quad C_T^2 = \frac{\mu}{\rho}, \end{aligned}$$

где ρ — плотность; μ — модуль сдвига; ϑ — коэффициент Пуассона; C_l — скорость продольных волн; C_T — скорость поперечных волн.

Используя подстановку $r = x - vt$, получим, что φ, ψ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} q^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0, \quad s^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \\ s^2 &= 1 - \beta^2, \quad q^2 = 1 - \frac{1-2\vartheta}{2(1-\vartheta)} \beta^2, \quad \beta^2 = \frac{v^2}{C_T^2}. \end{aligned}$$

Ограничимся рассмотрением скоростей движения нагрузки, меньших скорости распространения поперечных волн в полупространстве, т.е. $\beta < 1$. В этом случае уравнения будут эллиптическими. Для пластины под действием поперечных сил Миндлин [2] вывел систему приближенных уравнений, в которых учитывается влияние инерции вращения и поперечного сдвига. С учетом подстановки $r = x - vt$ она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\mu_1 h}{1-\vartheta_1} - 2\rho_1 h v^2 \right) \frac{d^2 U}{dr^2} - \tau &= 0, \\ (2\chi\mu_1 h - 2\rho_1 h v^2) \frac{d^2 W}{dr^2} - 2\chi\mu_1 h \frac{d\aleph}{dr} - p &= F, \\ \left(\frac{4}{3} \frac{\mu_1 h^3}{1-\vartheta_1} - \frac{2}{3} \rho_1 h^3 v^2 \right) \frac{d^2 \aleph}{dr^2} + 2\chi\mu_1 h \left(\frac{dW}{dr} - \aleph \right) - h\tau &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где U, W — перемещения срединной поверхности слоя; $\aleph$ — угол поворота поперечного сечения; $\chi = 0,845$ — сдвиговой коэффициент Тимошенко; p, τ — нормальное и касательное напряжения, действующие на границе раздела слоя и полупространства; F — внешняя нагрузка на верхней поверхности слоя.

Предполагается, что решение затухает в глубине полупространства, поэтому граничные условия при $y = -\infty$ будут иметь вид

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0. \quad (11)$$

На верхней поверхности слоя при $y = h$

$$p = -F, \quad \tau = 0.$$

На границе раздела слоя и полупространства рассматривается условие сопряжения в виде скользящего контакта при $y = -h$:

$$p = \sigma_y, \quad W = v, \quad \tau = 0, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (12)$$

Внешнюю нагрузку возьмем в виде $F = \overline{F}_0 e^{ikr}$, где k — волновое число, $e^{ikr} = \cos kr + i \sin kr$. Решение будем искать в следующем виде [4]:

$$\varphi = \frac{1}{\mu k^2} \overline{\varphi} e^{ikr}, \quad \psi = \frac{1}{\mu k^2} \overline{\psi} e^{ikr}, \quad (13)$$

где $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ — функции только от y ,

$$U = \frac{1}{\mu_1 k} \overline{U} e^{ikr}, \quad W = \frac{1}{\mu_1 k} \overline{W} e^{ikr},$$

$$\tau = \overline{\tau} e^{ikr}, \quad p = \overline{p} e^{ikr}, \quad \aleph = \frac{1}{\mu_1 k} \overline{\aleph} e^{ikr},$$

где $\overline{U}$, $\overline{W}$, $\overline{\tau}$, $\overline{p}$, $\overline{\aleph}$ — константы.

Подставляя (13) в уравнения для потенциалов, получим

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial y^2} - k^2 q^2 \overline{\varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 \overline{\psi}}{\partial y^2} - k^2 s^2 \overline{\psi} = 0. \quad (14)$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\overline{\varphi} = C_1 e^{kq(y+h)} + C_3 e^{-kq(y+h)}, \quad \overline{\psi} = C_2 e^{ks(y+h)} + C_4 e^{-ks(y+h)}, \quad (15)$$

где C_1 , C_2 , C_3 , C_4 — постоянные.

Учитывая краевые условия (11), находим

$$C_3 = C_4 = 0. \quad (16)$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{1}{\mu k^2} C_1 e^{kq(y+h)+ikr}, \quad \psi = \frac{1}{\mu k^2} C_2 e^{ks(y+h)+ikr}. \quad (17)$$

Из краевых условий (12) на границе раздела при $y = -h$ получим:

$$\begin{aligned} 2iqC_1 - C_2 - C_2 s^2 &= 0, \\ 2C_2 is - \frac{2\vartheta}{1-2\vartheta} C_1 + \frac{2(1-\vartheta)}{1-2\vartheta} C_1 q^2 &= \frac{\overline{p}}{\mu}, \\ C_1 q + C_2 i &= \overline{W} \frac{1}{\mu_1}, \\ \overline{\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив (13) в уравнения Миндлина (10), получим

$$\begin{aligned} 2\chi hi\bar{W} &= \bar{\aleph} \left(\frac{2\chi h}{k} + \frac{4}{3} \frac{kh^3}{1-\vartheta_1} - \frac{2}{3} \rho_1 h^3 v^2 \frac{k}{\mu_1} \right), \\ - (2\chi\mu_1 h - 2\rho_1 h v^2) \frac{k}{\mu_1} \bar{W} - 2\chi hi\bar{\aleph} - \bar{p} &= \bar{F}_0, \\ \bar{U} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из уравнений (18) и (19) находим константы

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\bar{F}_0}{A}, \quad C_2 = \frac{2iq}{1+s^2} \frac{\bar{F}_0}{A}, \quad \bar{W} = \frac{\mu_1 \bar{F}_0}{A} \left(q - \frac{2q}{1+s^2} \right), \\ \bar{\aleph} &= 2\chi hi \frac{\bar{F}_0}{A} \left(q - \frac{2q}{1+s^2} \right) \frac{1}{D}, \quad \bar{p} = \frac{\mu \bar{F}_0}{A} C, \quad \bar{\tau} = 0, \quad \bar{U} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2q}{1+s^2} - q \right) B - C, \quad B = (2\chi\mu_1 h - 2\rho_1 h v^2) k - \frac{4\chi^2 h^2}{D}, \\ C &= -\frac{4sq\mu}{1+s^2} - \frac{2\vartheta\mu}{1-2\vartheta} + \frac{2\mu q^2 (1-\vartheta)}{1-2\vartheta}, \\ D &= \frac{2\chi h}{k} + \frac{4}{3} \frac{kh^3}{1-\vartheta_1} - \frac{2}{3} \rho_1 h^3 v^2 \frac{k}{\mu_1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая симметрию, проинтегрируем решение для одной гармоники по волновому числу k в интервале $[0, \infty)$ и возьмем реальную часть решения, соответствующую косинус-преобразованию Фурье для нагрузки в виде

$$F = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos k r dk = \delta(r),$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

Решение для прогиба пластины W , который нас и интересует, имеет вид

$$W = \frac{1}{\pi\mu_1} \int_0^\infty \frac{1}{k} \bar{W} \cos k r dk,$$

где

$$\bar{W}(k) = \frac{\bar{F}_0}{A} \left(q - \frac{2q}{1+s^2} \right).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{2q}{1+s^2} - q \right), \quad M = 2(\chi\mu_1 h - \rho_1 h v^2), \\ E &= \frac{2h^2}{3(1-\vartheta_1)} - \frac{\rho_1 h^2 v^2}{3\mu_1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда

$$A = \frac{k^3 L M E - k^2 C E + k(L M \chi - \chi^2 h L) - C \chi}{\chi + k^2 E},$$

и

$$\frac{1}{k} \bar{W}(k) = \frac{-(\chi + k^2 E) \mu_1 L \bar{F}_0}{(k^3 M L E - k^2 C E + k(M - \chi h) \chi L - C \chi) k}. \quad (22)$$

Условие возникновения резонанса соответствует кратному вещественному корню при разложении на элементарные множители функции (22). Из формул Кардано следует, что это условие эквивалентно равенству нулю детерминанта кубического уравнения, стоящего в знаменателе этой функции:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0, \quad (23)$$

где

$$p = -\frac{1}{3} \left(\frac{C}{ML} \right)^2 + \frac{(M - \chi h) \chi}{ME},$$

$$q = \frac{2}{27} \left(\frac{C}{ML} \right)^3 + \frac{1}{3} \frac{C}{ML} \frac{(M - \chi h) \chi}{ME} - \frac{C \chi}{MLE}.$$

Поскольку в уравнении (23) p и q — являются функциями от v — скорости движения нагрузки, то оно и определяет величину этой скорости. Критической скоростью и будет наименьший положительный корень уравнения (23).

Список литературы

- [1] Д.Ахенбах, Движущаяся нагрузка, приложенная к пластине на упругом полупространстве, *Прикладная механика*, (1967), №4, 83-88.
- [2] J.Midlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural matrons of isotropic elastic plate, *J. Appl. Mechanics*, Trans. ASME, **73**(1951), 31-38.
- [3] Я.Г.Пановко, И.И.Губанова, Устойчивость и колебания упругих систем, М., Наука, 1964.
- [4] А.И.Лурье, Теория упругости, М., Наука, 1970.
- [5] В.Новацкий, Теория упругости, М., Мир, 1975.

Dynamic Response of Plates on the Effect of a Moving Load

Alexander N.Blinov

The problem of stationary motion of the load on the surface of plate lying on an elastic foundation is considered. From a practical point of view of a large interest is the speed at which a phenomenon of resonance may be observed. The solution of this problem described in our paper can be used as basis for practical experiments.

Keywords: elastic plate, moving load, resonance.