УДК 517.95

О существенной самосопряженности оператора Шредингера с сильно сингулярным в точке и на многообразии потенциалом

Марина С.Косбергенова*
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека,
ВузГородок, Ташкент, 100174,
Узбекистан

Получена 10.08.2008, окончательный вариант 15.09.2008, принята к печати 15.11.2008

В данной работе рассматривается вопрос о существенной самосопряженности оператора Шредингера с сильно сингулярным в точке и на многообразии потенциалом.

Ключевые слова: сильно сингулярный в точке и на многообразии потенциал, неравенства Харди, оператор Шредингера.

Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N)$ дифференциальный оператор

$$L := -\Delta - \frac{\lambda_1}{|x-a|^2} - \frac{\lambda_2}{|\tilde{x}-\tilde{b}|^2}, \tag{1}$$

где $N-m \geq 3$, $m,k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\tilde{x},\tilde{b} \in \mathbb{R}^{N-m}$, $a \neq \tilde{b}$, соответствующий квадратичной форме вида

$$Q = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx - \lambda_1 \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2(x)}{|x-a|^2} dx - \lambda_2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2(x)}{|\tilde{x}-\tilde{b}|^2} dx, \tag{2}$$

с областью определения $D(L) = D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, являющейся замыканием $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ по норме

$$\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx \right)^{1/2}. \tag{3}$$

Введем следующий класс потенциалов:

$$\aleph = \left\{ V(x) = \frac{\lambda_1 \chi_{B(a,r)}(x)}{|x-a|^2} + \frac{\lambda_2 \chi_{S(\tilde{b},r)\cap B(0,r)}(x)}{|\tilde{x}-\tilde{b}|^2} + \frac{\lambda_\infty \chi_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)}(x)}{|x|^2} + W(x) : m \in \mathbb{R}, \right.$$

$$\left. r_i, R \in \mathbb{R}^+, \tilde{x},\tilde{b} \in \mathbb{R}^{N-m}, a \neq \tilde{b}, \lambda_1,\lambda_2,\lambda_\infty \in \left(-\infty, \frac{(N-m-2)^2}{4}\right), W \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \right\},$$

где $S(\tilde{b},r) = \{(\tilde{x},\bar{x}) \in \mathbb{R}^N; \tilde{x} \in \mathbb{R}^{N-m},\ |\tilde{x}-\tilde{b}| < r\}$ и $\chi_{B(a,r)}(x)$ — характеристическая функция в $B(a,r)$.

Из неравенства Харди и Соболева следует, что для любого $V \in \aleph$ первое собственное значение $\mu(V)$ оператора $-\Delta - V$ на $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ конечно, т.е.

*e-mail: kosbergenova.marina@gmail.com

$$\mu(V) = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u(x)|^2 - V(x)u^2(x)\right) dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, dx} > -\infty.$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть*

$$\lambda_1 \leqslant \frac{(N-2)^2}{4} - 1 \text{ и } \lambda_2 \leqslant \frac{(N-m-2)^2}{4} - 1.$$

Тогда оператор $-\Delta - V$, $V \in \aleph$, *существенно самосопряжен на* $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus S_{\tilde{b}} \cup \{a\})$, *где* $S_{\tilde{b}} = \{(\tilde{x}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^N : \tilde{x} \in \mathbb{R}^{N-m},\ \tilde{x} = \tilde{b}\}$.

При доказательстве теоремы значительную роль играют следующие леммы.

Лемма 1 (критерий существенной самосопряженности в классе $\aleph$)**.** *Пусть* $V \in \aleph$, $V = \tilde{V} + \tilde{W}$, *где* $\tilde{W} \in L^{N/2}(R^N) \cap L^\infty(R^N)$ *и*

$$\tilde{V} = \frac{\lambda_1 \chi_{B(a,\delta)}(x)}{|x-a|^2} - \frac{\lambda_2 \chi_{S(\tilde{b},\delta)}(x)}{|\tilde{x}-\tilde{b}|^2} - \frac{\lambda_\infty \chi_{R^N \setminus B(0,R_0)}(x)}{|x|^2}. \tag{4}$$

Тогда $-\Delta - V$ *существенно самосопряжен на* $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus S(\tilde{b}, r) \cup \{a\})$ *тогда и только тогда, когда множество* $\mathrm{Ran}(-\Delta - \tilde{V} + b)$ *плотно на* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *для некоторого* $b > 0$.

Доказательство. Для любого $b > 0$ мы можем представить оператор $-\Delta - V$ как $(-\Delta - \tilde{V} + b) - (\tilde{W} + b)$, т.е. как ограниченное возмущение положительного оператора $-\Delta - \tilde{V} + b$. В силу теоремы Като-Реллиха (см. [1], Теорема X.12) оператор $-\Delta - V$ существенно самосопряжен тогда и только тогда, когда оператор $-\Delta - \tilde{V} + b$ существенно самосопряжен для некоторого $b > 0$. Тогда из критерия существенной самосопряженности положительного оператора (см. [1], теорема X.26) вытекает справедливость утверждения леммы 1. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi > 0$, *т.е. в* $\mathbb{R}^N$, $\varphi \neq 0$, *и такой, что*

$$-\Delta\varphi(x) = \left[\frac{\lambda_1 \chi_{B(0,1)}(x)}{|x|^2} + \frac{\lambda_2 \chi_{S(0,1)}(x)}{|\tilde{x}|^2} + q(\tilde{x})\right] \varphi(x)$$

в $\mathbb{R}^N$, *где* $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{N-m}$, $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^N : \tilde{x} = 0\}$, $\lambda_2 < \dfrac{(N-m-2)^2}{4}$ *и* $q \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus S_0 \cup \{0\})$. *Тогда:*

- *если* $q(\tilde{x}) = O(|\tilde{x}|^{-(2-\varepsilon)})$, $|\tilde{x}| \to 0$, *для любого* $\varepsilon > 0$, *то существует константа* $C > 0$ *такая, что*
$$\frac{1}{C}|\tilde{x}|^{-\tilde{b}_\lambda} \leqslant \varphi(x) \leqslant C|\tilde{x}|^{-\tilde{b}_\lambda}, \qquad \tilde{x} \in S(0,1),$$
где $\tilde{b}_\lambda = \dfrac{N-m-2}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{N-m-2}{2}\right)^2 - \lambda_2}$;

- *если* $q(\tilde{x}) = \mathrm{O}(|\tilde{x}|^{-2-\varepsilon})$, $|\tilde{x}| \to \infty$, *для любого* $\varepsilon > 0$, *то существует константа* $C > 0$ *такая, что*
$$\frac{1}{C}|\tilde{x}|^{-(N-m-2)} \leqslant \varphi(x) \leqslant C|\tilde{x}|^{-(N-m-2)}, \qquad x \in \mathbb{R}^N \setminus S(0,1).$$

(*Доказательство* леммы 2 см. в [2, 3]).

Лемма 3. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — *ограниченная гладкая область* $p \in \Omega$, g), g — *гладкая на* $\Omega \backslash \{p\}$ *и пусть* u — *ньютонов потенциал функции* g, *т.е.*

$$u(x) = \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \int\limits_{\Omega} \frac{g(y)}{|x-y|^{N-2}} dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N \backslash \{p\}.$$

Тогда для всех $q \in \left(\frac{N}{N-2}, \frac{2N}{N-2}\right]$ *элемент* $v \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ *и частная производная*

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{N\omega_N} \int\limits_{\Omega} \frac{g(y)(x_i - y_i)}{|x-y|^N} dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N \backslash \{p\}.$$

(*Доказательство* леммы 3 см. [4]).

Доказательство теоремы состоит из двух шагов.

Шаг 1. Рассмотрим сначала случай, когда $\lambda_1 < \frac{(N-2)^2}{4} - 1$ и $\lambda_2 < \frac{(N-m-2)^2}{4}$. Если особенность в точке $\{a\}$, то тогда в силу теоремы [4, th. 1.8] оператор $-\Delta - V$, $V \in \aleph$, существенно самосопряжен на $C_0^\infty(R^N \backslash S_{\tilde{b}} \cup \{a\})$. Теперь остается доказать теорему в случае, когда особенность в многообразии. В силу леммы 1 для доказательства достаточно показать, что для некоторого $b > 0$ множество $\mathrm{Ran}(-\Delta - \tilde{V} + b)$ плотна на $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash S_{\tilde{b}} \cup \{a\})$ и $b > 0$. Согласно теореме Лакса-Мильграма, существует слабое решение $u \in W_2^1(\mathbb{R}^N)$ уравнения $-\Delta u(x) - \tilde{V}(x)u(x) + bu(x) = f$ на $\mathbb{R}^N$. Кроме того, из леммы 2 следует асимптотическая оценка u в многообразии

$$u(x) \sim |\tilde{x} - \tilde{b}|^{-\tilde{b}_{\lambda_2}}, \qquad \tilde{x} \to \tilde{b}. \tag{5}$$

Поэтому функция $g(x) = \tilde{V}(x)u(x) - bu(x) + f(x) \sim |\tilde{x} - \tilde{b}|^{-\tilde{b}_{\lambda_2} - 2}$. В частности, если $\lambda_2 < \frac{(N-m-2)^2}{4} - 1$, то тогда $g(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Далее, из формулы Грина следует $u(x) =$

$$= \frac{1}{(N-m)(N-m-2)\omega_{N-m}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{B(\tilde{b},\delta)} \frac{g(\tilde{y})}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{N-m-2}} dy + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\partial B(\tilde{b},\delta)} \frac{1}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{N-m-2}} \frac{\partial u}{\partial \tau} ds \right]$$

$$+ \frac{1}{(N-m)\omega_{N-m}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\partial B(\tilde{b},\delta)} \frac{u(\tilde{y})}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{N-m-1}} ds, \qquad \tilde{x} \in B(\tilde{b}, \delta) \subset \mathbb{R}^{N-m}, \tag{6}$$

где ω_{N-m} — единичный шар $\mathbb{R}^{N-m}$, τ — внешняя нормаль к $\partial B(\tilde{a}_i, \delta)$.

Из леммы 3 следует

$$\nabla \left(\frac{1}{(N-m)(N-m-2)\omega_{N-m}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{B(\tilde{b},\delta)} \frac{g(\tilde{y})}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{N-m-2}} d\tilde{y} \right) =$$

$$= \frac{1}{(N-m)\omega_{N-m}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{B(\tilde{b},\delta)} \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{N-m}} g(\tilde{y}) d\tilde{y}.$$

Отсюда
$$\left|\nabla\left(\frac{1}{(N-m)(N-m-2)\omega_{N-m}}\int\limits_{R^m}\int\limits_{B(\tilde b,\delta)}\frac{g(\tilde y)}{|\tilde x-\tilde y|^{N-m-2}}dy\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{B(\tilde b,\delta)}\frac{|\tilde y-\tilde b|^{-\tilde b_{\lambda_2}-2}}{|\tilde x-\tilde y|^{N-m-1}}dy. \tag{7}$$

Если $\lambda_2>1-N+m$, то тогда
$$\left|\nabla\left(\frac{1}{(N-m)(N-m-2)\omega_{N-m}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{B(\tilde b,\delta)}\frac{g(\tilde y)}{|\tilde x-\tilde y|^{N-m-2}}d\tilde y\right)\right|\leqslant \mathrm{const}\ \hbar_i(\tilde x-\tilde b),$$
где
$$\hbar_i(\tilde x)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}}\frac{|\tilde y|^{-\tilde b_{\lambda_2}-2}}{|\tilde x-\tilde y|^{N-m-1}}dy,$$
$\hbar(\alpha\tilde x)=\alpha^{-\tilde b_{\lambda_2}-1}\hbar(\tilde x)$, $\alpha>0$, $\hbar(\tilde x)=|\tilde x|^{-\tilde b_{\lambda_2}-1}\hbar(e_1)$, $e_1=(1,0,...,0)\in\mathbb{R}^{N-m}$.

Если же $\lambda_2>1-N+m$, тогда
$$\left|\nabla\left(\frac{1}{(N-m)(N-m-2)\omega_{N-m}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{B(\tilde b,\delta)}\frac{g(\tilde y)}{|\tilde x-\tilde y|^{N-m-2}}dy\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\ |\tilde x-\tilde b|^{-\tilde b_{\lambda_2}-1}, \tag{8}$$
т.е. $\tilde b_{\lambda_2}\leqslant -1,\quad 0<\varepsilon<\dfrac{N-m-2}{2}$ и
$$\left|\nabla\left(\frac{1}{(N-m)(N-m-2)\omega_{N-m}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{B(\tilde b,\delta)}\frac{g(\tilde y)}{|\tilde x-\tilde y|^{N-m-2}}d\tilde y\right)\right|\leqslant \delta^{-\tilde b_{\lambda_2}-1+\varepsilon}k(\tilde x),$$
где
$$k(\tilde x)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}}\frac{1}{|\tilde y-\tilde b|^{1+\varepsilon}|\tilde y-\tilde x|^{N-m-1}}dy,$$
$$k(\alpha\tilde x)=\alpha^{-\varepsilon}k(\tilde x),\qquad \alpha>0,\qquad k(\tilde x)=|\tilde x|^{-\varepsilon}k(e_1).$$

Тогда, если $\lambda_2\le 1-N+m$, то
$$\left|\nabla\left(\frac{1}{(N-m)(N-m-2)\omega_{N-m}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{B(\tilde b,\delta)}\frac{g(\tilde y)}{|\tilde x-\tilde y|^{N-m-2}}d\tilde y\right)\right|\leqslant C(\varepsilon)|\tilde x-\tilde b|^{-\varepsilon}, \tag{9}$$
где $C(\varepsilon)>0$, константа зависит от N,λ_2,u.

Имеем
$$\nabla u(x)=\begin{cases}\mathrm{O}(|\tilde x-\tilde b|^{-\tilde b_{\lambda_2}-1}),\lambda_2>1-N{+}m,\\ \mathrm{O}(|\tilde x-\tilde b|^{-\varepsilon}),\lambda_2\le 1-N{+}m.\end{cases}\qquad \tilde x\to\tilde b \tag{10}$$

Пусть η_n — такая функция, что $\eta_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash S_{\tilde{b}} \cup \{a\})$ для всех $n \in N$, $\quad 0 \leqslant \eta_n \leq 1$ и

$$\eta_n(x) = 0 \quad \text{на} \quad \left(S(\tilde{b}, \frac{1}{2n}) \cup \left(\mathbb{R}^N \backslash S(0, 2n)\right)\right),$$

$$\eta_n(x) = 1 \quad \text{на} \quad \left(S(0, n) \backslash S(\tilde{b}, \frac{1}{n})\right),$$

$$|\nabla \eta_n(x)| \leqslant Cn \quad \text{на} \quad \left(S\left(\tilde{b}, \frac{1}{n}\right) \backslash \mathrm{S}\left(\tilde{b}, \frac{1}{2n}\right)\right),$$

$$|\nabla \eta_n(x)| \leqslant \frac{C}{n} \quad \text{на} \quad \left(S\left(0, 2n\right) \backslash S(0, n)\right),$$

$$|\Delta \eta_n(x)| \leqslant Cn^2 \qquad \left(S\left(\tilde{b}, \frac{1}{n}\right) \backslash S\left(\tilde{b}, \frac{1}{2n}\right)\right),$$

$$|\Delta \eta_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^2} \quad \text{на} \quad \left(S\left(0, 2n\right) \backslash S\left(0, n\right)\right).$$

Пусть $f_n = \eta_n f - 2\nabla \eta_n \cdot \nabla u - u \Delta \eta_n$ и $u_n = \eta_n u$, так как $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash S_{\tilde{b}} \cup \{a\})$ и $-\Delta u_n(x) - \tilde{V}(x) u_n(x) + b u_n(x) = f_n(x)$. В частности, $f_n \in \mathrm{Ran}(-\Delta - \tilde{V} + b)$. Из того, что $\eta_n f \to f$ выводим,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta_n(x)|^2 |\nabla u(x)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \text{const } n^2 \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{B(\tilde{b}, \frac{1}{n}) \backslash B(\tilde{b}, \frac{1}{2n})} |\nabla u(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} + \frac{\text{const}}{n^2} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{B(0,2n) \backslash B(0,n)} |\nabla u(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const } n^2 \left[\sum_{\lambda_2 > 1 - N + m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{B(0, \frac{1}{n})} |\tilde{x}|^{-2\tilde{b}_{\lambda_2} - 2} d\tilde{x} + \sum_{\lambda_2 \leqslant 1 - N + m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{B(0, \frac{1}{n})} |\tilde{x}|^{-2\varepsilon} d\tilde{x} \right] + \frac{\text{const}}{n^2} \|u\|_{W_2^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const } \left[\sum_{\lambda_2 > 1 - N + m} n^{2\tilde{b}_{\lambda_2} + 4 - N + m} + \sum_{\lambda_2 \leq 1 - N + m} n^{2 + 2\varepsilon - N + m} + n^{-2} \right].$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\Delta \eta_n(x)|^2 |u(x)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \text{const } n^4 \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{B(\tilde{b}, \frac{1}{n}) \backslash B(\tilde{b}, \frac{1}{2n})} |u(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} + \frac{\text{const}}{n^4} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{B(0,2n) \backslash B(0,n)} |u(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const } n^4 \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{B(0, \frac{1}{n})} |\tilde{x}|^{-2\tilde{b}_{\lambda_2}} d\tilde{x} + \frac{\text{const}}{n^4} \|u\|_{W_2^1(R^N)} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const } \left[\sum_{i=1}^k n^{2\tilde{b}_{\lambda_2} + 4 - N + m} + n^{-4} \right].$$

Также для $\lambda_2 < \dfrac{(N-m-2)^2}{4} - 1,\ \ 2\tilde{b}_{\lambda_2} + 4 - N + m < 0$ делаем вывод, что $f_n \to f$, а $L^2(\mathbb{R}^N)$. Следовательно, множество $\mathrm{Ran}(-\Delta - \tilde{V} + b)$. плотно в $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash S_{\tilde{b}} \cup \{a\})$. Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash S_{\tilde{b}} \cup \{a\})$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^N)$, то мы получаем, что множество $\mathrm{Ran}(-\Delta - \tilde{V} + b)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Шаг 2. Пусть теперь $\lambda_1 \leqslant \dfrac{(N-2)^2}{4} - 1$ и $\lambda_2 \leqslant \dfrac{(N-m-2)^2}{4}$.

Если особенность в точке $\{a\}$, то тогда в теореме [4, th. 1.8] доказана существенная самосопряженность оператора L на $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash S_{\tilde{b}} \cup \{a\})$.

Теперь докажем случай, когда особенность в многообразии. Предположим $b > 0$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash S_{\tilde{b}} \cup \{a\})$. Для доказательства достаточно найти некоторую функцию $g \in \mathrm{Ran}(-\Delta - \tilde{V} + b)$ такую, что g сходится в среднем квадратичном к f в $L^2(\mathbb{R}^N)$. Для этого мы фиксируем $\varepsilon > 0$ и напомним, что существует $0 < \sigma < 1$ такой, что если функция $u \in W_2^1(\mathbb{R}^N)$, решение

$$-\Delta u(x) - \tilde{V}_\sigma(x) u(x) + b u(x) = f(x), \tag{11}$$

где

$$\tilde{V}_\sigma(x) = \sum_{\lambda_2 = \left(\frac{N-m-2}{2}\right)^2 - 1} \frac{(\lambda_2 - \sigma)\chi_{S(\tilde{b},\delta)}(x)}{|\tilde{x} - \tilde{b}|^2} +$$

$$+ \sum_{\lambda_2 < \left(\frac{N-m-2}{2}\right)^2 - 1} \frac{\lambda_2 \chi_{S(\tilde{b},\delta)}(x)}{|\tilde{x} - \tilde{b}|^2} - \frac{\lambda_\infty \chi_{R^N \backslash S(0, R_0/\delta)}(\tilde{x})}{|\tilde{x}|^2}. \tag{12}$$

Тогда имеем

$$\left\| (\tilde{V}_\sigma - \tilde{V}) u \right\|_{L^2(R^N)} < \varepsilon. \tag{13}$$

Действительно, в силу леммы 2 существует положительная константа C, не зависящая от $\sigma \in (0,1)$ такая, что все решения (11) можно оценить следующим образом:

$$|u(x)| \leqslant C |\tilde{x} - \tilde{b}|^{-\tilde{b}_{(\lambda_2 - \sigma)}} \|u\|_{W_2^1(\mathbb{R}^N)} \quad \text{на} \quad S(\tilde{b}, \delta), \tag{14}$$

где $\lambda_2 = \frac{(N-m-2)^2}{4} - 1$. Кроме того, все решения (11) удовлетворяют неравенству

$$\|u\|_{W_2^1(R^N)} \leq \frac{\|f\|_{L^2(R^N)}}{\min\{\mu(\tilde{V}), b\}}. \tag{15}$$

Тогда для $\lambda_2 = \dfrac{(N-m-2)^2}{4} - 1$ мы получим

$$\left\| \frac{\sigma \chi_{S(\tilde{b},\delta)}(x) u}{|\tilde{x} - \tilde{b}|^2} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C^2 \sigma^2 \|u\|^2_{W_2^1(R^N)} \int\limits_0^1 r^{N-m-5-2\tilde{b}_{(\lambda_2-\sigma)}} dr =$$

$$= \frac{C^2 \|f\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}^N)}}{2(\min\{\mu(\tilde{V}), b\})^2} \frac{\sigma^2}{\sqrt{1+\sigma} - 1} = o(1), \qquad \sigma \to 0.$$

Поэтому, выбирая σ достаточно маленьким, можно обеспечить, чтобы все решения (11) удовлетворяли (13). Для такого σ пусть $u \in W_2^1(\mathbb{R}^N)$ есть решение (11). Пусть снова η_n есть последовательность функций, рассмотренная в шаге 1. Как и в 1, мы имеем $f_n = \eta_n f - 2\nabla\eta_n \cdot \nabla u - u\Delta\eta_n$, которая сходится к f в $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Следовательно, для достаточно большого n имеем $\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \varepsilon$. Далее, для любого n положим $u_n = \eta_n u \in C_0^\infty(R^N \backslash S(\tilde{b}, r) \cup \{a\})$. Тогда

$$\left\| \left(\tilde{V}_\sigma - \tilde{V}\right) u_n \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} < \left\| \left(\tilde{V}_\sigma - \tilde{V}\right) u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

Обозначая $g_n(x) = f_n(x) + (\tilde{V}_\sigma(x) - \tilde{V}(x))u_n(x)$, получим, что u_n удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u_n(x) - \tilde{V}(x)u_n(x) + bu_n(x) = g_n(x),$$

т.е. $g_n \in \mathrm{Ran}(-\Delta - \tilde{V} + b)$, и $\|g_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} < 2\varepsilon$ для достаточно большого значения n. $\square$

Список литературы

[1] М.Рид, Б.Саймон, Методы современной математической физики, т. 2, М., Мир, 1982.

[2] M.Murata, Structure of positive solutions to $-\Delta - V$ in $\mathbb{R}^N$, *Duke Math. J.* **53**(1986), no. 4, 869-943.

[3] V.Felli, M.Schneider, A note on regularity of solutions to degenerate elliptic equations of Caffarelli-Kohn- Nirenberg type, *Adv. Nonlinear Stud.,* **3**(2003), no. 4, 431-443.

[4] V.Felli, E.M.Marchini, S.Terracini, On Schrodinger operators with multipolar inverse-square potentials. arXiv:math/AP/0602209, 2006.

On Essential Self-Adjointness of the Schrödinger Operator whose Potential is Strongly Singular at a Point and on a Manifold

Marina S.Kosbergenova

The essential self-adjointness of the Schrödinger operator with a strongly singular potential on manifolds is established.

Keywords: strongly singular potential, the Schrödinger operator.