Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
__________ /В.В. Шайдуров

«16» июня 2017 г.

# БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**Направление** 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНР ДЛЯ ПРОВЕРКИ ПРАВИЛЬНОСТИ КЛАССИФИКАЦИИ

Руководитель
кандидат философских наук,
доцент __________ Б.В. Олейников

Выпускник __________ Ю.Ю. Щекотова
16.06.2017

Красноярск 2017

# РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Использование АНР для проверки правильности классификации» содержит 23 страницы текста, 11 использованных источников, 1 приложение.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА, ОБЪЕКТ, КРИТЕРИЙ, ПОПАРНОЕ СРАВНЕНИЕ, ПРЯМАЯ ЗАДАЧА АНР, ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА АНР, ЗАДАЧА КЛАССИФИКАЦИИ, ШКАЛА ПОРЯДКА, ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ШКАЛ НА РЕЗУЛЬТАТ КЛАССИФИКАЦИИ.

Цель работы –для множества объектов изначально разнесенных по некоторым группам рассмотреть возможность использования метода АНР оценки важности каждого объекта для проверки их принадлежности этим группам.

В результате исследований был изучен метод АНР, была решена как прямая, так и обратная задача АНР,решена задача проверки правильности классификации. Для исходных данных проведены вычислительные эксперименты. Проведены эксперименты с  различными шкалами. Также было разработано программное приложения для решения прямой и обратной задач АНР.

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Томас Л. Саатиговорил, что все люди принимают решения, и все, что мы делаем, является результатом какого-либо решения. Не вся имеющаяся у нас в расположении информация является полезной для наших суждений. Если решения принимаются только интуитивно, лицо принимающее решение может думать, что вся информация полезна, и чем большим объемом информации он обладает, тем лучше. Однако, это не так. В настоящее время теория принятия решений развивается все больше, исследуются новые проблемы и появляются новые подходы.

В данной дипломной работе рассматривается использование метода AHP, разработанного Т.Саати для решения проблемы многокритериального выбора, для решения задачи проверки правильности классификации. Изначально у нас имеются результаты некоторой классификации, то есть множество объектов, разнесенное по некоторым группам. Требуется рассмотреть возможность использования метода AHP оценки важности каждого объекта для проверки их принадлежности этим группам.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Изучить метод AHP;
- Предложить подход достижения цели на основе решения прямой и обратной задач AHP;
- Используя решения прямой и обратной задач, оценить важность объектов и критериев;
- Выяснить, как влияет изменение шкалы на результат решения задач.

# 1Задачи многокритериального выбора

## 1.1Общая постановка задачи

В настоящее время во многих отраслях науки приходится сталкиваться с задачами многокритериального выбора. В общем виде эти задачи ставятся следующим образом:

Пусть в рамках решения некоторой задачи выявлено множество её решений или альтернатив $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$. Выбор того или иного решения лицом принимающим решения (далее ЛПР) зависит от множества критериев $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, определяющих предпочтительность ЛПР (отношение R) того или иного решения. Обычно требуется либо найти наиболее предпочтительное решение (объект из множества U) по множеству всех критериев V, либо упорядочить решения (объекты) на множестве U [1].

## 1.2 Подходы к решению

Существует достаточно много методов решения многокритериальных задач принятия решений:

- Метод расчета компромиссных кривых – аналитический метод [1];
- Группа методов ЭЛЕКТРА[2];
- Методы случайного поиска [3];
- Метод STEM (STEpMethod) [3];
- Метод Подиновского [4];
- Метод Джоффриона-Дайера-Файнберга [3];
- Эволюционные методы [3];
- Методы, использующие визуализацию точек и кривых [3];
- Процедура Зайонца-Валлениуса [3];
- Метод анализа иерархий (AHP)[6];

Каждый из этих методовиспользуется дляопределенного класса задач, связанного с тем или иным измерением данных, ограничениями на данные и постановку задачи и прочими условиями.

Среди этих методов более известен метод Analytic Hierarchy Process (AHP), который был разработан американским математиком ТомасомСаати в начале 1970-х годов [6]. В русскоязычной литературе этот метод известен как метод анализа иерархий (МАИ) [5]. В дальнейшем основное внимание будет уделено этому методу.

## 2Метод анализа иерархий

Метод Анализа Иерархий (МАИ) — математический инструмент системного подхода к сложным проблемам принятия решений. Метод не предписывает ЛПР, какого-либо правильного решения, а позволяет ему в интерактивном режиме найти такой вариант, который наилучшим образом согласуется с его пониманием сути проблемы и требованиями к ее решению.

Суть метода в построении иерархии взаимодействия объект-критерий.

МАИ используется во всем мире для принятия решений в различных ситуациях: от решения частных проблем выбора до управления на межгосударственном уровне, решения проблем в бизнесе, промышленности, здравоохранении и образовании.

### 2.1 Постановка задачи

Пусть мы выбираем из n объектов, имеющих m критериев. Сформулируем определение прямой задачи Саати.

**Определение 1.** Прямой задачей Саати назовем задачу нахождения весов объектов исходя из весов критериев и данных о попарном сравнении объектов относительно каждого критерия.

Тогда мы получим m матриц размерности [n×n].

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\omega_{21}}{\omega_{12}} & & & & & \\ \frac{\omega_{12}}{\omega_{21}} & 1 & & \cdots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & 1 & & \\ & & & \cdots & & 1 & \frac{\omega_{n(n-1)}}{\omega_{(n-1)n}} \\ & & & & & \frac{\omega_{(n-1)n}}{\omega_{n(n-1)}} & 1 \end{pmatrix}$$

Следующим шагом строится матрица B – матрица попарного сравнения весов критериев. Матрица попарного сравнения может быть получена по бальной шкале исходя из оценок экспертов; напрямую из исходных измерений, полученных по шкале отношений; приведением измерения из шкалы отношений в шкалу порядка.

Далее для всех матриц попарных сравнений вычисляются доминирующие собственные вектора, и на их основе строится матрица A.

**Определение 2.** Доминирующим собственным вектором будем называть собственный вектор соответствующий наибольшему собственному числу (теорема Пейрона-Фробениуса) [7].

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \text{ - собственный вектор матрицы } A_i.$$

Вычисляется V – транспонированный доминирующий собственный вектор матрицы B.

Составим матричное уравнение для вектораVи переходной матрицыA:

$$U=AV. \quad (1)$$

Элементы вектора U будет весами объектов, из которых ведется выбор по критериям [6]. Таким образом, вектор U – решение прямой задачи Саати.

### 2.2 Алгоритм решения

Алгоритм МАИ включает в себя следующие этапы:

1. Формирование иерархии целей;
2. Выставление приоритетов для критериев;
3. Выставление приоритетов для объектов;
4. Синтез приоритетов.

Этап 1. Анализ проблемы принятия решений в МАИ начинается с построения иерархической структуры, которая включает цель, критерии, альтернативы и другие рассматриваемые факторы, влияющие на выбор. Эта структура отражает понимание проблемы лицом, принимающим решение.

Этап 2. Следующим этапом анализа является определение приоритетов, представляющих относительную важность или предпочтительность элементов построенной иерархической структуры, с помощью процедуры парных сравнений. Безразмерные приоритеты позволяют обоснованно сравнивать разнородные факторы, что является отличительной особенностью МАИ.

Для парного сравнения критериев используется предложенная Т.Саати шкала относительной важности с выставлением относительной важности от 1 до 9. (таблица 1).

Таблица 1- Шкала относительной важности

| *Шкала относительной важности:* | |
|---|---|
| Интенсивность относительной важности | Определение |
| 1 | Равная важность |
| 3 | Умеренное превосходство одного над другим |
| 5 | Существенное превосходство |
| 7 | Значительное превосходство |
| 9 | Очень сильное превосходство |
| 2, 4, 6, 8 | Промежуточное решение между двумя соседними суждениями |

Лицом, принимающим решение на основе шкалы относительной важности, строится матрица критериев.

Матрица критериев указывает на приоритет каждого критерия по отношению к другому критерию.

Далее для матрицы попарных сравнений на основе метода определения собственного вектора строится вектор приоритетов, состоящего в следующем.

Вычисляются компоненты собственного вектора матрицы:

$$a_i = \left( \prod_{j=1}^{n} a_{ij} \right)^{\frac{1}{n}}, i = 1,2,\ldots,n.$$

Далее определяются нормализованные оценки вектора локальных приоритетов первого уровня:

$$K_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}, i = 1,2,\ldots,n.$$

Таким образом, можно получить величину, характеризующую наибольшее собственное значение матрицы суждений и обозначаемую $\lambda_{max}$:

$$\lambda_{max} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} K_j. \quad (2)$$

После построения и обработки матрицы попарных сравнений целесообразно выполнить проверку согласованности суждений.

В общем случае, под согласованностью подразумевается то, что при наличии основного массива необработанных данных все другие данные логически могут быть получены из них. В качестве показателя меры согласованности элементов матрицы критериев, в рамках метода анализа иерархий, используется индекс согласованности (consistencyindex – CI). Индекс согласованности может быть получен следующим образом:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}, \quad (3)$$

где $\lambda_{max}$ вычисляется по формуле (2).

Для оценки приемлемости степени согласованности элементов матрицы используется отношение согласованности (consistency ratio – CR), задаваемое в виде:

$$CR = \frac{CI}{CIS}, \qquad (4)$$

где CIS – среднее значение индекса согласованности как случайной величины, полученное экспериментально в результате обработки большого количества сгенерированных случайным образом матриц парных сравнений, CI вычисляется по формуле (3).

В таблице 2 представлены порядок матрицы и средние CI.

Таблица 2 – Средние значения CI для матриц разных порядков

| *m* | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *CIS* | 0,58 | 0,90 | 1,12 | 1,24 | 1,32 | 1,41 | 1,45 | 1,49 | 1,51 | 1,48 |

Этап 3. На третьем этапе мы строим матрицы попарных сравнений для объектов по каждому критерию. То есть, если у нас в задаче n объектов и m критериев, то мы получим mматриц размерности [n*x*n].

Для каждой матрицы аналогично этапу 2 строятся векторы приоритетов, и выполняется проверка согласованности суждений по формулам (3) и (4).

Этап 4. На заключительном этапе анализа выполняется синтез приоритетов на иерархии, в результате которого вычисляются приоритеты альтернативных решений относительно главной цели.

Составляется матрица размера [nxm] из собственных векторов матриц попарных сравнений объектов по критериям. Далее эта матрица умножается на вектор приоритетов для критериев, т.е. мы решаем матричное уравнение (1). В результате получим вектор весов объектов (альтернатив). Лучшей считается альтернатива с максимальным значением приоритета.

### 2.3 Преимущества и недостатки метода

В рамках метода анализа иерархий нет общих правил для формирования структуры модели принятия решения. Это является отражением реальной ситуации принятия решения, поскольку всегда для одной и той же проблемы имеется целый спектр мнений. Метод позволяет учесть это обстоятельство с помощью построения дополнительной модели для согласования различных мнений, посредством определения их приоритетов.

Преимущества метода:

- Возможность учитывать «человеческий фактор» при принятии решения;
- Метод является универсальным, так как схема его применения не зависит от сферы деятельности, в которой принимается решение;
- Количество процедур расчета рейтингов;
- Модель, составленная с помощью метода анализа иерархий, всегда имеет кластерную структуру, что позволяет разбить большую задачу на ряд малых самостоятельных задач. Для решения этих задач можно привлечь экспертов, работающих независимо друг от друга над локальными задачами. Эксперты могут не знать ничего о характере принимаемого решения, что отчасти способствует сохранению объективности полученных оценок и данных;
- Процедура попарных сравнений не имеет достойных альтернатив.

Недостатки метода:

- Трудоемкий процесс формирования структуры модели принятия решения;
- Возможная противоречивость результатов попарных сравнений;
- В рамках метода нет средств, которые проверяют достоверность данных;
- Метод не имеет внутренних средств для интерпретации рейтингов.

МАИ отражает естественный ход человеческого мышления и дает более общий подход к принятию решений, чем метод логических цепей. Он дает не только способ выявления наиболее предпочтительного решения, но и позволяет количественно выразить степень предпочтительности посредством рейтингования. Это способствует полному и адекватному выявлению предпочтений лица, принимающего решение. Кроме того, оценка меры противоречивости использованных данных позволяет установить степень доверия к полученному результату.

### 2.4 Программные реализации

В настоящее время МАИ реализован во многих пакетах прикладных программ, таких как SuperDecisions, Expert Choice, MPRIORITY, Император 3.1 [8] и др. Но многие из этих пакетов имеют не вполне естественные ограничения (по размеру и структуре матрицы исходных данных, визуализации и др.). Главным недостатком всех этих приложений является ограничение по количеству критериев и объектов. Например, в пакете MPRIORITY невозможно использовать свою оценочную шкалу (есть только 9 балльная) и невозможно работать с более чем 9 объектами и 9 критериями [8].

### 2.5 Обратная задачаAHP

При сведении решения прямой задачи AHP к матричному уравнению возникает вопрос о постановке обратной задачи.

**Определение 3.** Обратной задачей Саати назовём задачу нахождения весов критериев, основываясь на весах объектов и данных о попарном сравнении объектов относительно каждого критерия [11].

Предлагаемое решение обратной задачи Саати основывается на основе решение матричного уравнения полученного при решении прямой задачи:

$$V=A^{-1}U. \tag{5}$$

Однако в общем случае возникает проблема. Матрица A не является квадратной и ее обращение в классическом понимании невозможно. Для решения этой проблемы используется псевдообращением Мура-Пенроуза [9] .

Матрица $A^{-1}$ называется псевдообратной, если выполняются следующие условия:

1. $AA^{-1} =A$;

2. $A^{-1}AA^{-1}A^{-1}$;

3. $(AA^{-1})^{*}= AA^{-1}$;

4. $(A^{-1}A)^{*}= A^{-1}A$, где $M^{*}$ - эрмитова сопряженная матрица M. ($M^{*} = M^{T}$).

В данной работе для псевдообращения используется функция pinv в пакете MatLab.

Стоит отметить, что при обращении или псевдообращении Мура-Пенроуза переходных матриц появляются отрицательные веса критериев.

## 3 Использование AHP в классификации

### 3.1 Общая постановка задачи

Пусть изначально нам известны результаты некоторой классификации, т.е. множество объектов, разнесенное по заданному количеству групп (классов).

**Определение 4.** Задачей проверки классификации назовем задачу проверки правильности их принадлежности к изначально заданным группам (классам) на основе расчета важности объектов, полученного с использованием метода AHP.

### 3.2 Исходные данные

В данной работе исходными данными длявычислительного эксперимента были медицинские данные о детском ожирении.

Рассматриваемая задача состояла в выявлении влияния ряда медицинских показателей (72 критерия) на степень детского ожирения на примере 266 обследованных детей, разделенных на 4 группы. Группа N – дети с нормальными показателями, группа 1 – дети с первой степенью ожирения, группа 2 – дети со второй степенью ожирения, группа 3 - дети с третьей степенью ожирения. Исходные данные были предоставлены в виде таблиц.

Таблица 3 – Часть исходных данных

| Номер объекта | $K_1$ | $K_2$ | … | $K_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 57 | 110/70 | … | 90 |
| 2 | 60 | 120/60 | … | 88 |

Для решения прямой и обратной задачи AHP было разработано программное приложение.

Для решения обратной задачи первоначально предлагается использовать групповой вес объектов, за который можно взять номера группы (с позиции тяжести заболевания) или какую-либо другую характеристику, усредненную по группе. Таким образом, мы имеем групповой вес объектов.

Используя групповой вес объектов, мы можем решить обратную задачу AHP и найти веса критериев.

Для решения обратной задачи мы используем формулу (5).

Далее, для решения прямой задачи AHP вычисляем матрицы попарных сравнений индивидуальных объектов по этим критериям. Для каждого случая мы получаем 72 матрицы размерности [4x4]. На основе этих матриц и решается прямая задача по формуле (1). При её решении можно определить индивидуальные веса каждого объекта.

Зная веса каждого объекта, мы можем определить, как они группируются в рамках 4-х выделенных групп.

При этом проверяется задача влияния шкалы на группировку объектов.

**3.3 Результаты вычислительного эксперимента**

При решении задачи с использованием исходных значений критериев по объектам, в условиях их измерения по шкале отношений, было получено ранжирование объектов, представленное в виде диаграммы, отражающей распределение совокупности точек на плоскости с использованием исходной шкалы отношений (см. рис.1)

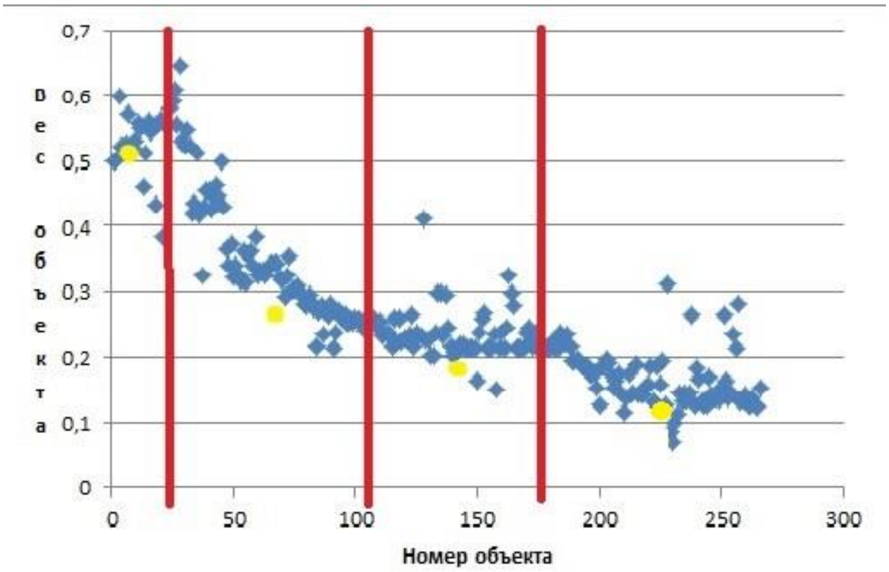



Рисунок1 – результаты при использовании шкалы отношений

На этом рисунке (и на последующих) по вертикали отображается вес объекта, а по горизонтали его порядковый номер согласно исходным данным.

Красными вертикальными линиями обозначены границы групп, на которые изначально были разбиты объекты (дети в соответствии со степенью ожирения).

Желтыми точками обозначены центроиды групп.

Из рисунка видно, что вес объектов в одной группе колеблется в достаточно больших пределах и для некоторых объектов их вес более характерен для другой группы. Если объекты группы N чётко выделяются на диаграмме, то границы между группами I и II видны уже хуже. Выделить группу III ещё сложнее.

В таблице3 указаны значения центроидов и дисперсий для каждой группы.

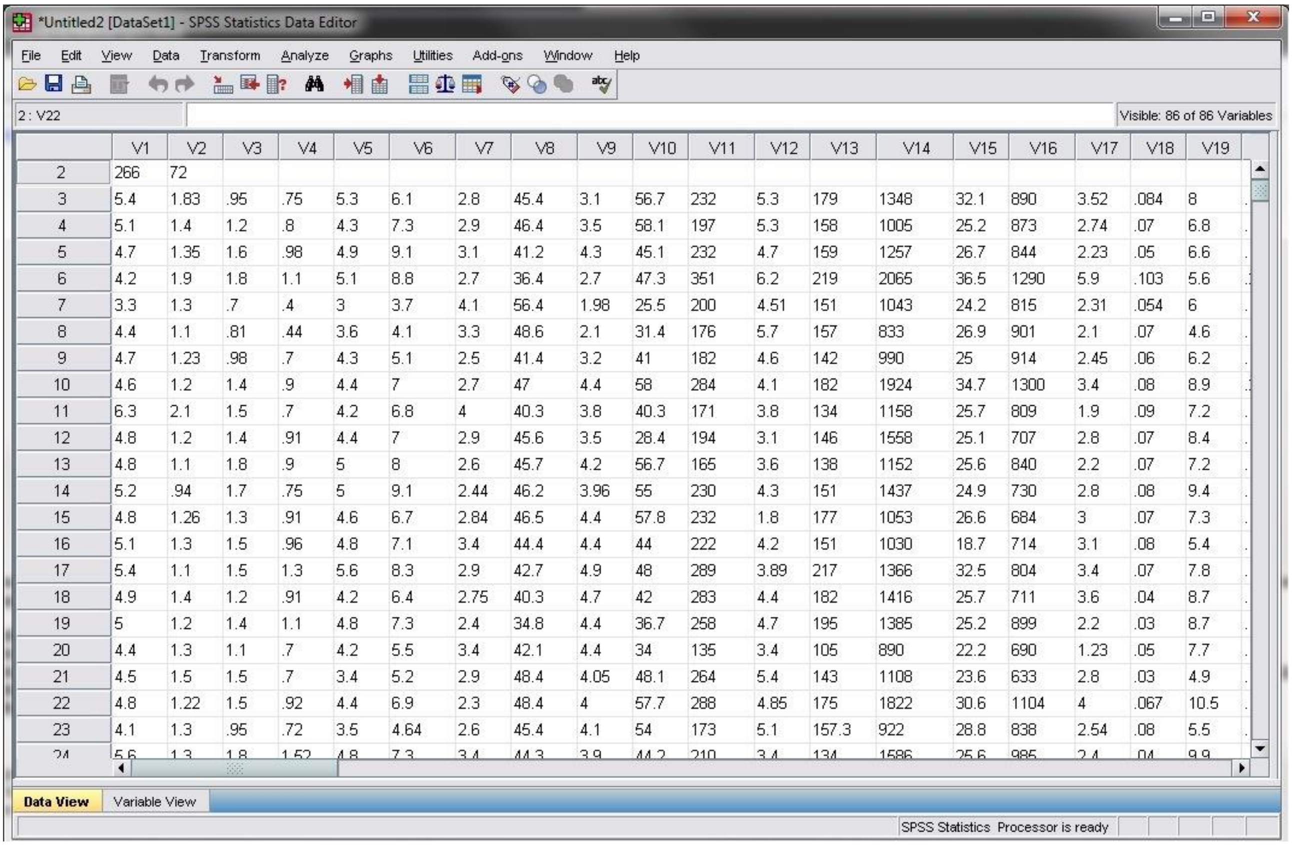
Таблица 3 – значения центроидов и дисперсий для каждой группы

| Группа | Центроид | Дисперсия |
|---|---|---|
| Группа N | 0,5105 | 0,0056 |
| Группа 1 | 0,2741 | 0,0027 |
| Группа 2 | 0,1835 | 0,0018 |
| Группа 3 | 0,1277 | 0,0037 |

Из таблицы видно, что значение центроидов находится на разных расстояниях между собой, что, наряду с относительно высокой дисперсией у группы N и группы III, обуславливает частую возможность переноса объекта в другую группу. Так же странной кажется высокая дисперсия в группе N – группе объектами, показатели которых близки к медицинским нормам.

### 3.4 Классификация в пакете SPSS

Для сравнения с результатами проведенной проверки классификации был использован пакет SPPS.




| | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 | V7 | V8 | V9 | V10 | V11 | V12 | V13 | V14 | V15 | V16 | V17 | V18 | V19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 266 | 72 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 5.4 | 1.83 | .95 | .75 | 5.3 | 6.1 | 2.8 | 45.4 | 3.1 | 56.7 | 232 | 5.3 | 179 | 1348 | 32.1 | 890 | 3.52 | .084 | 8 |
| 4 | 5.1 | 1.4 | 1.2 | .8 | 4.3 | 7.3 | 2.9 | 46.4 | 3.5 | 58.1 | 197 | 5.3 | 158 | 1005 | 25.2 | 873 | 2.74 | .07 | 6.8 |
| 5 | 4.7 | 1.35 | 1.6 | .98 | 4.9 | 9.1 | 3.1 | 41.2 | 4.3 | 45.1 | 232 | 4.7 | 159 | 1257 | 26.7 | 844 | 2.23 | .05 | 6.6 |
| 6 | 4.2 | 1.9 | 1.8 | 1.1 | 5.1 | 8.8 | 2.7 | 36.4 | 2.7 | 47.3 | 351 | 6.2 | 219 | 2065 | 36.5 | 1290 | 5.9 | .103 | 5.6 |
| 7 | 3.3 | 1.3 | .7 | .4 | 3 | 3.7 | 4.1 | 56.4 | 1.98 | 25.5 | 200 | 4.51 | 151 | 1043 | 24.2 | 815 | 2.31 | .054 | 6 |
| 8 | 4.4 | 1.1 | .81 | .44 | 3.6 | 4.1 | 3.3 | 48.6 | 2.1 | 31.4 | 176 | 5.7 | 157 | 833 | 26.9 | 901 | 2.1 | .07 | 4.6 |
| 9 | 4.7 | 1.23 | .98 | .7 | 4.3 | 5.1 | 2.5 | 41.4 | 3.2 | 41 | 182 | 4.6 | 142 | 990 | 25 | 914 | 2.45 | .06 | 6.2 |
| 10 | 4.6 | 1.2 | 1.4 | .9 | 4.4 | 7 | 2.7 | 47 | 4.4 | 58 | 284 | 4.1 | 182 | 1924 | 34.7 | 1300 | 3.4 | .08 | 8.9 |
| 11 | 6.3 | 2.1 | 1.5 | .7 | 4.2 | 6.8 | 4 | 40.3 | 3.8 | 40.3 | 171 | 3.8 | 134 | 1158 | 25.7 | 809 | 1.9 | .09 | 7.2 |
| 12 | 4.8 | 1.2 | 1.4 | .91 | 4.4 | 7 | 2.9 | 45.6 | 3.5 | 28.4 | 194 | 3.1 | 146 | 1558 | 25.1 | 707 | 2.8 | .07 | 8.4 |
| 13 | 4.8 | 1.1 | 1.8 | .9 | 5 | 8 | 2.6 | 45.7 | 4.2 | 56.7 | 165 | 3.6 | 138 | 1152 | 25.6 | 840 | 2.2 | .07 | 7.2 |
| 14 | 5.2 | .94 | 1.7 | .75 | 5 | 9.1 | 2.44 | 46.2 | 3.96 | 55 | 230 | 4.3 | 151 | 1437 | 24.9 | 730 | 2.8 | .08 | 9.4 |
| 15 | 4.8 | 1.26 | 1.3 | .91 | 4.6 | 6.7 | 2.84 | 46.5 | 4.4 | 57.8 | 232 | 1.8 | 177 | 1053 | 26.6 | 684 | 3 | .07 | 7.3 |
| 16 | 5.1 | 1.3 | 1.5 | .96 | 4.8 | 7.1 | 3.4 | 44.4 | 4.4 | 44 | 222 | 4.2 | 151 | 1030 | 18.7 | 714 | 3.1 | .08 | 5.4 |
| 17 | 5.4 | 1.1 | 1.5 | 1.3 | 5.6 | 8.3 | 2.9 | 42.7 | 4.9 | 48 | 289 | 3.89 | 217 | 1366 | 32.5 | 804 | 3.4 | .07 | 7.8 |
| 18 | 4.9 | 1.4 | 1.2 | .91 | 4.2 | 6.4 | 2.75 | 40.3 | 4.7 | 42 | 283 | 4.4 | 182 | 1416 | 25.7 | 711 | 3.6 | .04 | 8.7 |
| 19 | 5 | 1.2 | 1.4 | 1.1 | 4.8 | 7.3 | 2.4 | 34.8 | 4.4 | 36.7 | 258 | 4.7 | 195 | 1385 | 25.2 | 899 | 2.2 | .03 | 8.7 |
| 20 | 4.4 | 1.3 | 1.1 | .7 | 4.2 | 5.5 | 3.4 | 42.1 | 4.4 | 34 | 135 | 3.4 | 105 | 890 | 22.2 | 690 | 1.23 | .05 | 7.7 |
| 21 | 4.5 | 1.5 | 1.5 | .7 | 3.4 | 5.2 | 2.9 | 48.4 | 4.05 | 48.1 | 264 | 5.4 | 143 | 1108 | 23.6 | 633 | 2.8 | .03 | 4.9 |
| 22 | 4.8 | 1.22 | 1.5 | .92 | 4.4 | 6.9 | 2.3 | 48.4 | 4 | 57.7 | 288 | 4.85 | 175 | 1822 | 30.6 | 1104 | 4 | .067 | 10.5 |
| 23 | 4.1 | 1.3 | .95 | .72 | 3.5 | 4.64 | 2.6 | 45.4 | 4.1 | 54 | 173 | 5.1 | 157.3 | 922 | 28.8 | 838 | 2.54 | .08 | 5.5 |
| 24 | 5.6 | 1.3 | 1.8 | 1.52 | 4.8 | 7.3 | 3.4 | 44.3 | 3.9 | 44.2 | 210 | 3.4 | 134 | 1586 | 25.6 | 985 | 2.4 | .04 | 9.9 |

Рисунок 5 – представление исходных данных в пакете SPSS

В пакете SPSS была проведена классификация исходных данных методом иерархий.

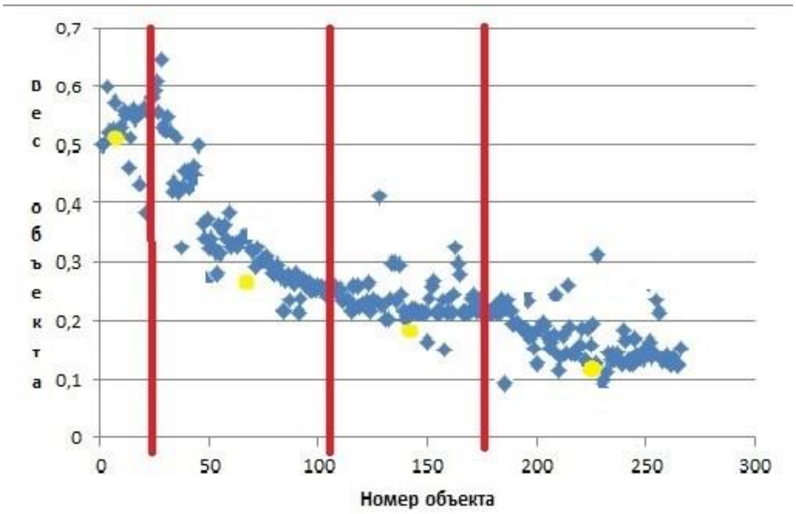



Рисунок 6 – Результаты при классификации в пакете SPSS

Из рис. 6 видно, что результаты классификации в пакете SPSS не сильно отличаются от результатов метода АНР для шкалы отношений.

# 3О влиянии шкалы на результаты решения задач

Альтернативой использованию значений, полученных при измерении шкалы отношений, является перевод их в ограниченную порядковую шкалу $Order_i$, где индекс $i$ определяет количество допустимых значений шкалы порядка. Такое преобразование позволит избежать ошибок, вызванных разницей в плотности значений по разным критериям.

Метод приведения значений к шкале $Order_i$состоит в следующем. По каждому критерию $V_i$исходя из исходных данных группы N строится область $R_j$, в которую попадают все значения группы N по критерию $V_i$.

Значение $s_{ij}$ в шкале $Order_i$ищется следующим образом:

$$s_{ij} = l - \left\lfloor l \frac{|w_{ij} - r_i|}{|max_i - r_i|} \right\rfloor,$$

где $l$– максимальное значение в выбранной шкале, $w_{ij}$ - исходное значение показателя объекта $v_j$ по критерию $Vi$ ,$r_i$ – центр области $R_i$, $max_i$– максимально удаленное от $r_i$ значение из $w_i = \{w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}\}$, операция $\lfloor \dots \rfloor$– округление с низу.

Если $max_i = w_{ij}$, то $s_{ij} = l$.

Стоит отметить, что есть и другие варианты приведения данных к шкале порядка в зависимости от вида исходных данных. Например, для отдельного параметра, чем больше значение, тем лучше; для другого параметра отклонение от нормы всегда плохо и т.д.

Для следующего эксперимента возьмем шкалу порядка $Order_9$, которая используется в работах основателя метода AHP Т. Саати. Для решения задач принятия решений методом AHP чаще всего используется именно эта шкала.

Стоит отметить, что шкалы, начинающиеся с 0 использовать нельзя, так как это делает невозможным последующее попарное сравнение.

Ранжирование весов, полученное при решении задачи с переходом к ограниченной шкале порядка, представлено на рис.2

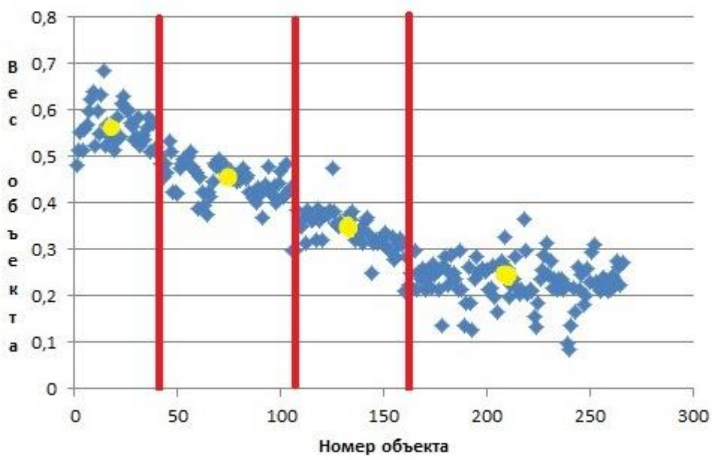



Рисунок 2 – результаты при использовании шкалы$Order_9$

На рисунке красными линиями разделены границы групп, полученные в ходе решения с использованием ограниченной шкалы порядка$Order_9$.Жирными желтыми точками обозначены центроиды групп.

Из полученных данных видно, что использование значений приведенных к ограниченной шкале дает более предпочтительный результат классификации.

Значения дисперсий и центроидов для различных групп, полученных при использовании шкалы, представлены в таблице4.

Таблица 4 - Значения центроидов и дисперсий для $Order_9$

| Группа | Центроид | Дисперсия |
|---|---|---|
| Группа N | 0,56 | 0,0017 |
| Группа 1 | 0,4502 | 0,0015 |
| Группа 2 | 0,3433 | 0,0022 |
| Группа 3 | 0,2508 | 0,0039 |

Мы видим, что снизились дисперсии для всех групп кроме группы II – для нее дисперсия увеличилась, но не значительно.

Центроиды групп I, II и III теперь расположены на приблизительно равном расстоянии (приблизительно около 0,1), а центроид группы N удалён на большее расстояние, что вместе со снижением дисперсий улучшило чёткость размещения объектов по группам. При использовании шкалы от 1 до 9 меньший процент объектов имеют тенденцию к перенесению в другую группу.

Можно высказать предположение, что повлиять на адекватность размещения объектов по группам возможно и изменением порядковой шкалы (в частности, изменением числа ее значений).

Для проверки этого предположения можно использовать шкалу $Order_{18}$ (шаг шкалы станет в два раза меньше) и $Order_5$(шаг шкалы станет больше почти в два раза).Распределение весов для$Order_{18}$показаны на рис. 3, $Order_5$ на рис. 4.

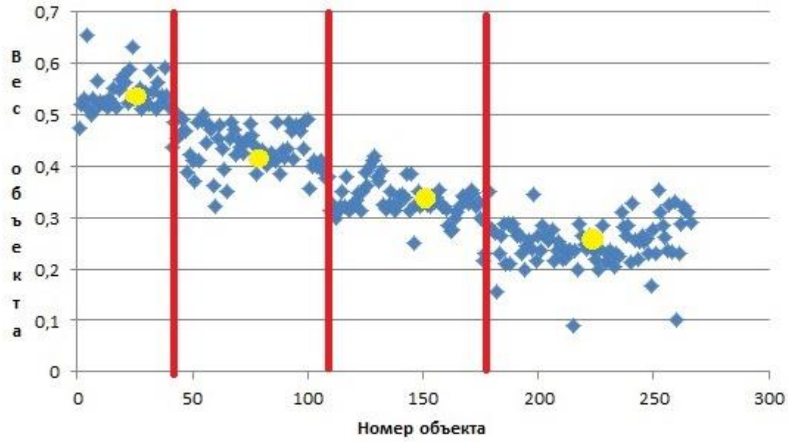



Рисунок 3 – Результаты при использовании шкалы $Order_{18}$

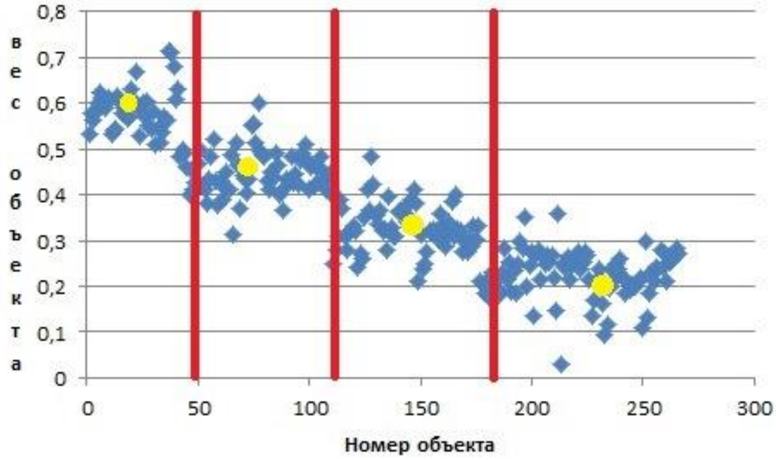



Рисунок 4 – Результаты при использовании шкалы $Order_5$

Сравнивая результаты вычислений, мы видим, что распределение на рис. 3 не сильно отличается от распределения на рис.2.

На рисунке 4 видно, что распределение отличается от распределения, приведенного на рис. 2.

В таблицах 5 и 6 представлены центроиды и дисперсии для $Order_{18}$ и $Order_5$.

Таблица 5 – Значения центроидов и дисперсий для $Order_{18}$

| Группа | Центроид | Дисперсия |
|---|---|---|
| Группа N | 0,5431 | 0,0017 |
| Группа 1 | 0,4144 | 0,0013 |
| Группа 2 | 0,3411 | 0,0023 |
| Группа 3 | 0,2709 | 0,0032 |

Таблица 6 – Значения центроидов и дисперсий для шкалы $Order_5$

| Группа | Центроид | Дисперсия |
|---|---|---|
| Группа N | 0,6012 | 0,0023 |
| Группа 1 | 0,4663 | 0,0028 |
| Группа 2 | 0,3255 | 0,0034 |
| Группа 3 | 0,2160 | 0,004 |

В ходе эксперимента выяснилось, что увеличивать шкалу не имеет смысла, т.к. центроиды групп стали располагаться ближе друг к другу, что стало причиной для увеличения процента объектов возможных для переноса.

При уменьшении шкалы наблюдается увеличение дисперсии по всем группам, что повлияло на увеличение процента объектов возможных для переноса.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты.

1. Изучен метод анализа иерархий. Решены прямая и обратная задачи AHP.
2. Была решена поставленная задача проверки правильности классификации. Исходное распределение объектов по группам было верно, что было подтверждено вычислительными экспериментами с помощью метода AHP.
3. Рассмотрено влияние изменения шкал на результаты решения задач.
4. Проведены вычислительные эксперименты.

Стоить отметить, что решение обратной задачи AHP иногда является более важным (выгодным), чем решение прямой. Также нужно учесть, что при решении задач могут быть некоторые неточности, связанные с изначальной классификацией данных.

В результате проведённого исследования можно заключить, что при решении как прямой, так и обратной задачи AHP следует переводить исходные значения данных, измеренных по шкале отношений, в значения, представленные некоторой ограниченной шкалой порядка.

При экспериментах с различными шкалами порядка выяснилось, что при увеличении размерности шкалы можно несущественно улучшить результат классификации. При большом уменьшении размерности шкалы результаты значительно ухудшаются.При изменении размерности шкалы увеличивается дисперсия или смещаются центроиды групп, что может незначительно изменить порядок объектов отсортированных по весу.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Горбунов, В.М. Теория приятия решений / В.М. Горбунов – Томск: НациональныйСледовательский Томский Политехнический Университет, 2010. – 65 с.
2. Анич, И. Метод ЭЛЕКТРА и проблема ацикличности отношений альтернатив. / И. Анич, О. И. Ларичев / Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 8. – С. 108–118.
3. Лотов, А.В. Многокритериальные задачи принятия решений / А.В. Лотов, И.И. Поспелова – М.: МАКС Пресс, 2008. – 197 с.
4. Подиновский, В.В. Парето оптимальные решения многокритериальных задач. / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин – М.: Наука, 1982. – 254 с.
5. Саати Т., Взаимодействия в иерархических системах. / Т. Саати / Техническая кибернетика. –1979. – № 1. – С. 68–84.
6. Саати, Т. Принятие ращений. Метод анализа иерархий. / Т. Саати – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.
7. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер — М.: Наука 1966, 576 с.
8. Программные системы поддержки принятия оптимальных решений: сайт / Ю. А. Сушков, А. Ш. Абакаров – М.: Tomakechoice.com, 2006-2010. – URL: http://tomakechoice.com (дата обращения 31.03.2017).
9. Стренг, Г. Линейная алгебра и ее применения. / Г. Стренг – М.: Мир, 1980.
10. Подвинский *В.В.,* Подвинская *О.В.* О некорректности метода анализа иерархий / Проблемы управления. 2011. № 1. С. 8-13.
11. Бескорсый Н.С., Олейников Б.В. Решение обратной задачи многокритериального выбора в методологии метода анализа иерархий / ФАМЭБ’2013: труды XII междунар. конф. –Красноярск: СФУ НИИППБ, 2013. С. 80-82.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

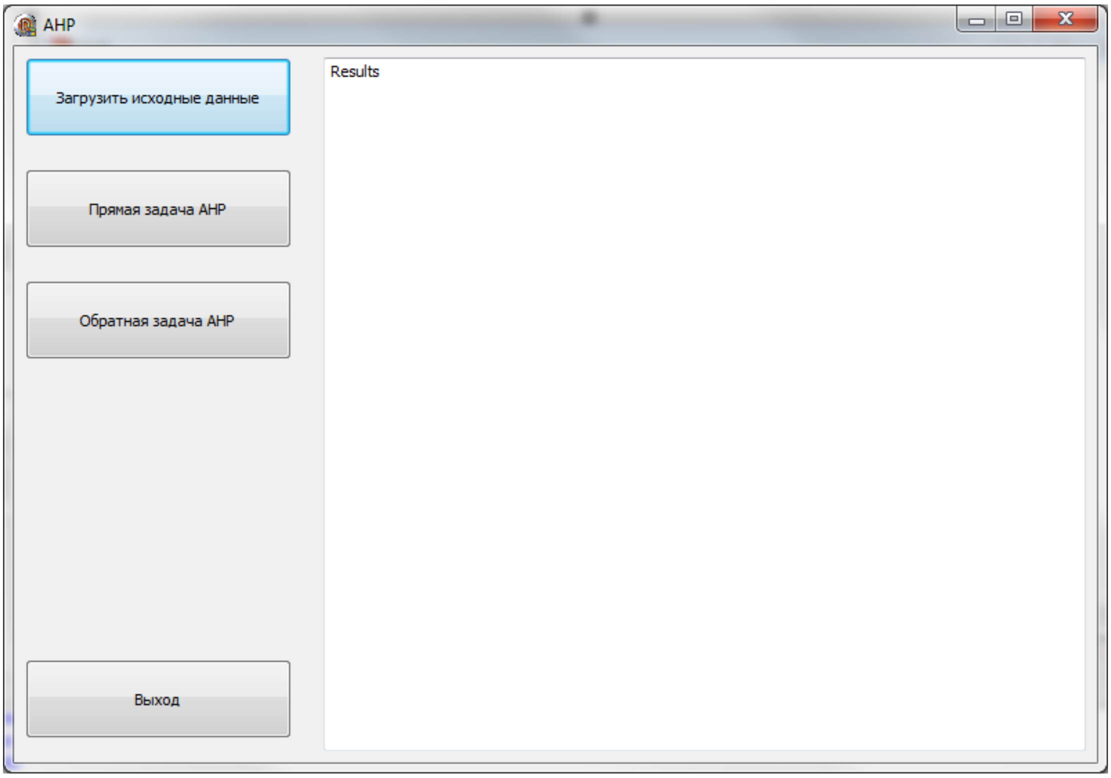



Рисунок А.1 – Рабочее окно программного приложения

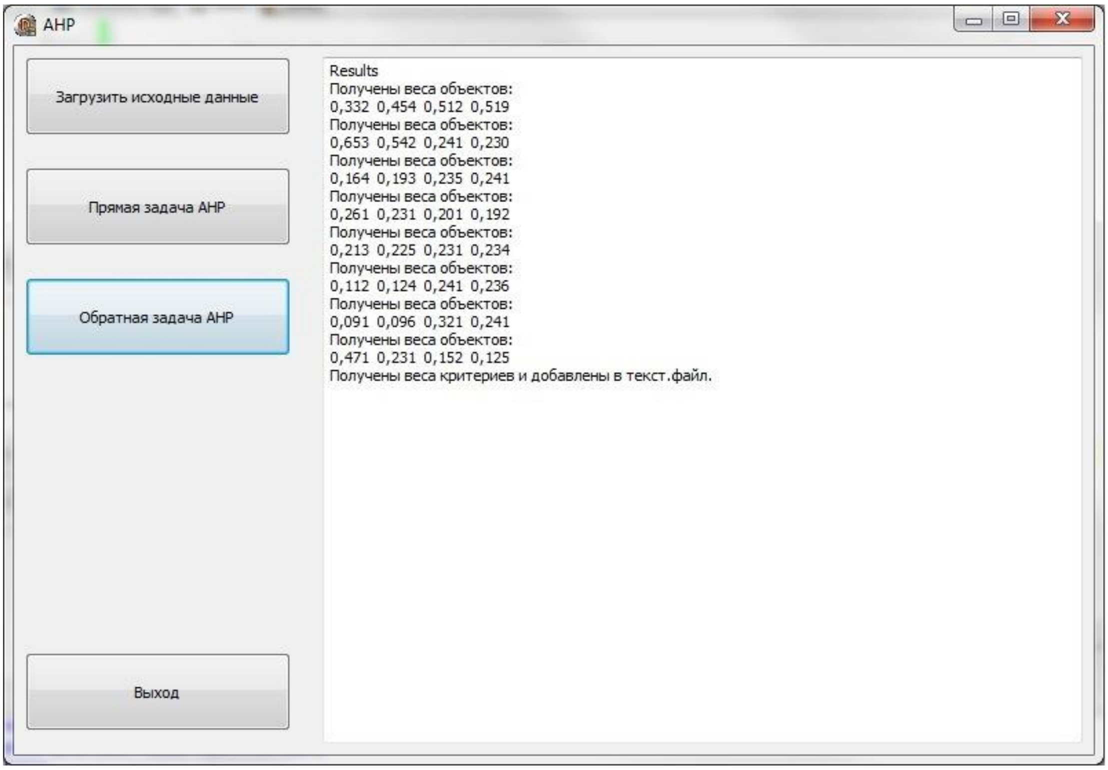



Рисунок А.2 – Рабочее окно после решения прямой и обратной задачи для нескольких объектов исследования

```
TForm1 = class(TForm)
  Button1: TButton; // "загрузить исходные данные"
  Button2: TButton; //"прямая задача AHP"
  Button3: TButton; // "обратная задача"
  Button4: TButton; // кнопка выхода
  Results: TMemo;  // для вывода результатов
  procedure Button4Click(Sender: TObject); // для выхода из программы
  procedure Button2Click(Sender: TObject);// вывод решения прямой задачи
  procedure Button3Click(Sender: TObject); // вывод решения обратной задачи
  procedure Button1Click(Sender: TObject);  // загрузка данных из файла
private
```

Рисунок А.3 – Описание структуры TForm1 для программного приложения

```
type
 vector= array [1..n] of real;
 matrix= array [1..m,1..m] of real;
 Tdecclass=class
   A:array [1..n,1..n] of real; //матрица попарных сравнений для критериев
   B:matrix; // матрицы попарных сравнений объектов
   matB:array of matrix;// для хранения матриц попарных сравнений объектов
   matV:array of vector;// для хранения собственных векторов
   procedure Multi(var mat:A;var v:vector;var u:vector); //решает ур-е U=AV
   procedure Normmat(var mat:A);// нормирование матрицы
   procedure Printmat(mat:A);// вывод матрицы
   procedure GetVector(var mat:A;var v:vector);// считает собственный вектор
 end;
 procedure inv_task(var mat:A; var v:vector;var u:vector); //решает уравнение V=A(-1)U
 //для решения обратной задачи
```

Рисунок А.4 – Описание структуры Tdecclass для решения задач AHP

```
procedure NormMat(var a:matrix);
 var i,j:integer;
 sum:real;
begin
 for j:=1 to m do
  begin
   for i:=1 to m do
    sum:=sum+a[i,j];
   for i:=1 to n do
    a[i,j]:=a[i,j]/sum;
   sum:=0;
  end;
end;
procedure Getvector(var a:matrix;var v:vector);
 var
  i,j:integer;
  sum:real;
begin
  sum:=0;
  for i:=1 to m do
   begin
     for j:=1 to m do
      begin
       sum:=sum+a[i,j];
       v[i]:=sum/m;
      end;
     sum:=0;
   end;

end;
```

Рисунок А. 5– Описание процедур нормирования матрицы и получения собственного вектора

```
procedure Multi(var a:matrix;var b:vector;var c:vector;m:integer) ;
 var
  i,j:integer;
begin
 for i:=1 to m do
   begin
     for j:=1 to m do
      c[i]:=c[i]+a[i,j]*b[j];
   end;

end;
procedure inverse_task(var a1:matrix;var b:vector;var c:vector;m:integer) ;
 var
  i,j:integer;
begin
 for i:=1 to m do
   begin
     for j:=1 to m do
      c[i]:=c[i]+a1[i,j]*b[j];
   end;
```

Рисунок А.6 – Описание процедур решения матричных уравнений U=AV и $V=A^{-1}U$