СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

ПРОСПЕКТ СВОБОДНЫЙ- 2017

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ “ПРОСПЕКТ СВОБОДНЫЙ 2017” ПОСВЯЩЕННОЙ ГОДУ ЭКОЛОГИИ В РФ

КРАСНОЯРСК, СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

17-21 АПРЕЛЯ 2017 Г.

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»

Проспект Свободный - 2017

Материалы научной конференции
посвященной Году экологии в Российской Федерации
17-21 апреля 2017 г.

Электронное издание

Красноярск
СФУ
2017 г.

Mathematics and Computer Science

УДК 517.9

ON THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF A LOADED SYSTEM FOR TWO PARABOLIC EQUATIONS WITH THE CAUCHY DATA

AntipinaI.S.

Scientific supervisor Can.Sc. (Phys.-Math.)Frolenkov I.V.

Language supervisor Sviridova T.N.

Siberian Federal University

In the space$E_1$of variables$x$choose$r$different pointsα_k, $k=\overline{1,r}$.Inthestrip$G_{[0,T]}=$ $=\{(t,x)|\ 0\le t\le T, x\in E_1\}$considertheCauchyproblemfor the system of loaded nonclassical parabolic equations

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= a_1(t)u_{xx}(t,x)+b_1(t)u_x(t,x)+f_1\big(t,x,u,v,\bar{\varphi}_u(t),\bar{\varphi}_v(t)\big),\\ v_t(t,x) &= a_2(t)v_{xx}(t,x)+b_2(t)v_x(t,x)+f_2\big(t,x,u,v,\bar{\varphi}_u(t),\bar{\varphi}_v(t)\big), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(0,x)&=u_0(x),\\ v(0,x)&=v_0(x), \end{aligned} \qquad x\in E_1. \quad (2)$$

Here the components of vector-functions

$$\bar{\varphi}_u(t)=\left(u(t,\alpha_k),\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,\alpha_k)\right),\qquad \bar{\varphi}_v(t)=\left(v(t,\alpha_k),\frac{\partial^j}{\partial x^j}v(t,\alpha_k)\right),$$

$$k=\overline{1,r},\qquad j=\overline{0,p_1},$$

aretracesoffunctions$u(t,x)$, $v(t,x)$and all their derivatives with respect to $x$up to orderp_1.

Denoteby$Z_x^p\big(G_{[0,t^*]}\big)$thesetofthefunctions$u(t,x)$ defined in$G_{[0,t^*]}$, belonging to the class

$$C_{t,x}^{1,p}\big(G_{[0,t^*]}\big)=\left\{u(t,x)|\ \frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\in C\big(G_{[0,t^*]}\big), j=\overline{0,p}\right\},$$

andboundedin$(t,x)\in G_{[0,t^*]}$together with their derivatives

$$\sum_{j=0}^{p}\left|\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial x^j}\right|\le C.$$

In [1] sufficient conditions for the existence of solving the problem $(1),(2)$in the class$Z_x^p\big(G_{[0,t^*]}\big)$ are obtained. Supposethat$p\ge\max\{p_1,2\}+2\ge4$, andwiththis$p$satisfies the conditions of the existence theorem [1]. In view of this theorem a classical solution $u^1(t,x)$, $v^1(t,x)\in Z_x^p\big(G_{[0,t^*]}\big)$ of the problem$(1),(2)$exists.We prove that this solution is unique. Supposethattherereareanotherfunctions$u^2(t,x)$, $v^2(t,x)\in Z_x^p\big(G_{[0,t^*]}\big)$ along with the functions $u^1(t,x)$, $v^1(t,x)$ is a solution of the system of equations. Then

$$u_t^i(t,x) = a_1(t)u_{xx}^i(t,x) + b_1(t)u_x^i(t,x) + f_1\left(t,x,u^i,v^i,\bar{\varphi}_{u^i}(t),\bar{\varphi}_{v^i}(t)\right),$$
$$v_t^i(t,x) = a_2(t)v_{xx}^i(t,x) + b_2(t)v_x^i(t,x) + f_2\left(t,x,u^i,v^i,\bar{\varphi}_{u^i}(t),\bar{\varphi}_{v^i}(t)\right), \quad i = 1,2,$$

$$u^i(0,x) = u_0(x), \quad v^i(0,x) = v_0(x), \quad x \in E_1, \;\; i = 1,2.$$

We assume that the functions $a_1(t), a_2(t), b_1(t), b_2(t), u_0(x), v_0(x)$ are real-valued, defined in $[0,T], G_{[0,T]}, E_1$ respectively and have all continuous derivatives occurring in the following relation and satisfying it

$$|a_1(t)| + |a_2(t)| + |b_1(t)| + |b_2(t)| + \sum_{k=0}^{p+2}\left|\frac{d^k}{dx^k}u_0(x)\right| + \sum_{k=0}^{p+2}\left|\frac{d^k}{dx^k}v_0(x)\right| \le C.$$

Functions f_1 and f_2 are real-valued, defined and continuous for any values of their arguments.For all $t_1 \in (0,T]$, $u(t,x)$, $v(t,x) \in Z^{p+2}([0,t_1])$ these functions as functions of the variables $(t,x) \in G_{[0,t_1]}$are continuous and have continuous derivatives occurring in the relation

$$\sum_{j=0}^{p+2}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}f_1\left(t,x,u,v,\bar{\varphi}_u(t),\bar{\varphi}_v(t)\right)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}f_2\left(t,x,u,v,\bar{\varphi}_u(t),\bar{\varphi}_v(t)\right)\right|\right) \le C(u,v).$$

Here Cisaconstantdependingon u, v.

Thedifferences $u^1(t,x) - u^2(t,x) = U(t,x)$,$v^1(t,x) - v^2(t,x) = V(t,x)$are a solution of the system of equations

$$U_t(t,x) = a_1(t)U_{xx}(t,x) + b_1(t)U_x(t,x) + f_1\left(t,x,u^1,v^1,\bar{\varphi}_{u^1}(t),\bar{\varphi}_{v^1}(t)\right) - \\ -f_1\left(t,x,u^2,v^2,\bar{\varphi}_{u^2}(t),\bar{\varphi}_{v^2}(t)\right),$$
$$V_t(t,x) = a_2(t)V_{xx}(t,x) + b_2(t)V_x(t,x) + f_2\left(t,x,u^1,v^1,\bar{\varphi}_{u^1}(t),\bar{\varphi}_{v^1}(t)\right) - \\ -f_2\left(t,x,u^2,v^2,\bar{\varphi}_{u^2}(t),\bar{\varphi}_{v^2}(t)\right),$$

$$U(0,x) = 0, \quad V(0,x) = 0, \quad x \in E_1.$$

Condition 1. Suppose that the functionsf_1, $f_2$such that$\forall t_1 \in (0,T]$, $\forall\, u^1(t,x)$, $u^2(t,x)$, $v^1(t,x)$, $v^2(t,x) \in Z_x^p\left(G_{[0,t_1]}\right)$, the following relation holds

$$f_1\left(t,x,u^1,v^1,\bar{\varphi}_{u^1}(t),\bar{\varphi}_{v^1}(t)\right) - f_1\left(t,x,u^2,v^2,\bar{\varphi}_{u^2}(t),\bar{\varphi}_{v^2}(t)\right) =$$
$$= (u^1 - u^2)\cdot F^1 + \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\left(\frac{\partial s}{\partial x^s}u^1(t,\alpha_k) - \frac{\partial s}{\partial x^s}u^2(t,\alpha_k)\right)\cdot F_{k,s}^1 + (v^1 - v^2)\cdot$$
$$\cdot G^1 + \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\left(\frac{\partial s}{\partial x^s}v^1(t,\alpha_k) - \frac{\partial s}{\partial x^s}v^2(t,\alpha_k)\right)\cdot G_{k,s}^1\,,$$

$$f_2\big(t,x,u^1,v^1,\bar{\varphi}_{u^1}(t),\bar{\varphi}_{v^1}(t)\big)-f_2\big(t,x,u^2,v^2,\bar{\varphi}_{u^2}(t),\bar{\varphi}_{v^2}(t)\big)=$$

$$=(u^1-u^2)\cdot F^2+\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\left(\frac{\partial s}{\partial x^s}u^1(t,\alpha_k)-\frac{\partial s}{\partial x^s}u^2(t,\alpha_k)\right)\cdot F_{k,s}^2+(v^1-v^2)\cdot$$

$$\cdot G^2+\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\left(\frac{\partial s}{\partial x^s}v^1(t,\alpha_k)-\frac{\partial s}{\partial x^s}v^2(t,\alpha_k)\right)\cdot G_{k,s}^2 .$$

Condition 2. Thefunctions$F^1,F_{k,s}^1,G^1,G_{k,s}^1,F^2,F_{k,s}^2,G^2,G_{k,s}^2$,where $k=\overline{1,r}, s=\overline{0,p_1}$, areknownandsufficientlysmooth, dependon$t,x,u^1(t,x)$, $u^2(t,x)$, $v^1(t,x)$, $v^2(t,x)$, $\bar{\varphi}_{u^1}(t)$, $\bar{\varphi}_{v^1}(t)$, $\bar{\varphi}_{u^2}(t)$, $\bar{\varphi}_{v^2}(t)$ and have all continuous derivatives occurring in the following relation and satisfying it

$$\sum_{j=0}^{p_1}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}F^1\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}G^1\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}F^2\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}G^2\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\left(\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}F_{k,s}^1\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}G_{k,s}^1\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}F_{k,s}^2\right|+\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}G_{k,s}^2\right|\right)\right)\le C,$$

$$\forall(t,x)\in G_{[0,t_1]}.$$

Cisaconstantindependentof $U(t,x)$, $V(t,x)$.

Undertheassumptionof the fulfillment of the conditions 1, 2, it is proved that$U(t,x)\equiv 0$and$V(t,x)\equiv 0$in$G_{[0,t^*]}$.Thus the following theorem holds.

Theorem of the uniqueness of the solution. Ifthesolutionofthesystemofequations(1),(2)exists in the class$Z_x^p\big(G_{[0,t^*]}\big)$, where$p\ge\max\{p_1,2\}+2\ge 4$, then under the conditions 1, 2 it is unique in the class$Z_x^p\big(G_{[0,t^*]}\big)$.

Let us take the example of an inverse problem for a system of parabolic equations for which the existence of the solution was investigated in [2].

Example. In the strip $\Pi_{[0,T]}=\{(t,x)|\ t\in[0,T],x\in E_1\}$ we consider that the problem of finding real-valued functions $U(t,x)$, $V(t,x),g_i(t),i=1{,}2$, satisfying the system of equations

$$\begin{aligned}U_t&=U_{xx}+b_{11}(t)U^2+b_{12}(t)V+g_1(t)m_1(t,x),\\ V_t&=V_{xx}+b_{21}(t)U+b_{22}(t)V^2+g_2(t)m_2(t,x),\end{aligned}\tag{3}$$

$$U(0,x)=U_0(x),\qquad V(0,x)=V_0(x),\qquad x\in E_1.\tag{4}$$

The solution satisfies the overdetermination condition

$$U(t,0)=\beta_1(t),\qquad V(t,0)=\beta_2(t),\qquad t\in[0,T],$$

where$b_{ij}(t),m_i(t,x),U_0(x),V_0(x),\beta_i(t)$, $i,j=1{,}2$ are given real-valued functions. Let the consistency conditions be fulfilled

$$U_0(0)=\beta_1(0),\qquad V_0(0)=\beta_2(0).$$

Let the following condition be true

$$|m_i(t,0)| \geq \delta > 0, \qquad i = 1,2, \qquad t \in [0,T], \qquad \delta - const.$$

All input data are real-valued, sufficiently smooth and limited functions with their derivatives in $\Pi_{[0,T]}$.

The problems(3), (4) are reduced to the auxiliary direct problem

$$U_t = U_{xx} + b_{11}(t)U^2 + b_{12}(t)V +$$
$$+ m_1(t,x)m_1^{-1}(t,0)\left(\beta_1'(t) - U_{xx}(t,0) - b_{11}(t)\beta_1^2(t) - b_{12}(t)V(t,0)\right),$$
$$V_t = V_{xx} + b_{21}(t)U + b_{22}(t)V^2 +$$
$$+ m_2(t,x)m_2^{-1}(t,0)\left(\beta_2'(t) - V_{xx}(t,0) - b_{21}(t)U(t,0) - b_{22}(t)\beta_2^2(t)\right),$$
$$U(0,x) = U_0(x), \qquad V(0,x) = V_0(x).$$

Differences $W(t,x) = U_1(t,x) - U_2(t,x)$, $Q(t,x) = V_1(t,x) - V_2(t,x)$ are a solution of the problem

$$W_t = W_{xx} + b_{11}(t)W(U^1 + U^2) + b_{12}(t)Q + m_1(t,x)m_1^{-1}(t,0)\big(-W_{xx}(t,0) - b_{12}(t)Q(t,0)\big),$$
$$Q_t = Q_{xx} + b_{21}(t)W + b_{22}(t)Q(V^1 + V^2) + m_2(t,x)m_2^{-1}(t,0)\big(-Q_{xx}(t,0) - b_{21}(t)W(t,0)\big),$$
$$W(0,x) = 0, \qquad Q(0,x) = 0.$$

Check the conditions of the Theorem

$$f_1\big(t,x,U^1,V^1,\bar{\varphi}_{U^1}(t),\bar{\varphi}_{V^1}(t)\big) - f_1\big(t,x,U^2,V^2,\bar{\varphi}_{U^2}(t),\bar{\varphi}_{V^2}(t)\big) =$$
$$= (U^1 - U^2)\cdot F^1 + \big(U_{xx}^1(t,0) - U_{xx}^2(t,0)\big)\cdot F_{1,2}^1 + (V^1 - V^2)\cdot G^1 +$$
$$+ \big(V^1(t,0) + V^2(t,0)\big)\cdot G_{1,0}^1 ,$$
$$f_2\big(t,x,U^1,V^1,\bar{\varphi}_{U^1}(t),\bar{\varphi}_{V^1}(t)\big) - f_2\big(t,x,U^2,V^2,\bar{\varphi}_{U^2}(t),\bar{\varphi}_{V^2}(t)\big) =$$
$$= (U^1 - U^2)\cdot F^2 + \big(U^1(t,0) + U^2(t,0)\big)\cdot F_{1,0}^2 + (V^1 - V^2)\cdot G^2 +$$
$$+ \big(V_{xx}^1(t,0) - V_{xx}^2(t,0)\big)\cdot G_{1,2}^2 ,$$

where

$$F^1 = b_{11}(t)(U^1 + U^2), F_{1,2}^1 = -m_1(t,x)m_1^{-1}(t,0), F^2 = b_{21}, F_{1,0}^2 = -b_{21}m_2(t,x)m_2^{-1}(t,0),$$
$$G^1 = b_{12}, G^2 = b_{22}(t)(V^1 + V^2), G_{1,0}^1 = -b_{12}m_1(t,x)m_1^{-1}(t,0), G_{1,2}^2 = -m_2(t,x)m_2^{-1}(t,0)$$

are known, sufficiently smooth and limited functions.

The conditions 1, 2 of the Theorem of the uniqueness of the solution are fulfilled. Hence the solutions of the problems(3), (4) are unique.

References

1. Фроленков И.В., Романенко Г.В. О разрешимости специальных систем одномерных нагруженных параболических уравнений и систем составного типа с данными Коши // Сибирский журнал индустриальной математики, Новосибирск, 2014, 17:1, с. 135–148

2. Спичак Г.А., Шипина Т.Н. Задачи идентификации коэффициентов в одной нелинейной системе уравнений параболического типа // Междунар. конф. посвящ. 80-летию со дня рождения акад. М.М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики». Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2012. С. 108.

3. Фроленков И.В., Белов Ю.Я. О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши // Неклассические уравнения математической физики, сб.науч.статей, Отв. ред. А.И.Кожанов, Изд. Института мат., Новосибирск, 2012, с.262 – 279

4. Яровая М.А. О задаче Коши для одномерного нагруженного параболического уравнения специального вида: бакалаврская работа / Яровая Маргарита Алексеевна – Красноярск, 2014 (защищена 29.06.14, ИМФИ СФУ)

5. Frolenkov I.V., Darzhaa M.A. On the existence of solution of some problems for nonlinear loaded parabolic equations with Cauchy data // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics, 2014, **7**:2, c. 173–185

УДК 512.774.1

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБЩЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Черепанский А.Н.

Научный руководитель профессор Цих А.К.

Сибирский федеральный университет

В самом конце прошлого столетия обнаружилась тесная связь между теориями алгебраических и гипергеометрических функций [1],[2]. С помощью идей статьи Горна об областях сходимости гипергеометрических рядов и известной Теоремы Капранова удалось получить эффективную параметризацию для дискриминантного множества общей алгебраической функции. В [2] была намечена стратегия использования параметризации дискриминантного множества для описания областей сходимости степенных рядов, представляющих ветви общей алгебраической функции. Основная цель исследования состоит в реализации указанной стратегии для решения тетраномиальных уравнений.

Под алгебраической функцией мы будем понимать решение $y(a_0, \dots, a_n)$ общего алгебраического уравнения

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1} + a_n y^n = 0 \qquad (1)$$

с комплексными переменными коэффициентами $a = (a_0, \dots, a_n)$. В статье Биркеланда [3] было замечено, что мы всегда можем свести уравнение (1) к следующему виду

$$a_0 + a_1 y + \dots + y^p + \dots + y^q + \dots + a_{n-1} y^{n-1} + a_n y^n = 0, \qquad (2_{pq})$$

путем фиксации произвольной пары коэффициентов.

В [1] показано, что в окрестности точки $a_0 = 0, \dots, [p], \dots, [q], \dots, a_n = 0$ это уравнение определяет $q-p$ аналитических решений, представляемых следующими гипергеометрическими рядами вида

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^{n-1}} \frac{\varepsilon^{-(\beta_q, k)+1} \Gamma((-(\beta_q, k)+1)/(q-p))}{(q-p) k! \, \Gamma(1 + ((\beta_q, k)+1)/(q-p))} \, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \dots [p] \dots [q] \dots a_n^{k_n}, \qquad (3_{pq})$$

где $\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{q-p}}$ – первообразный корень, а β_q и β_p – некоторые вектора с рациональными координатами.

Области сходимости D_{pq} гипергеометрических рядов (3_{pq}) были описаны в статьях Горна [4] и Пассаре-Циха [2] (см. также [5]). Однако их результат несет комбинаторный характер, поэтому остается актуальная задача описания областей сходимости в виде явных функциональных неравенств на модули переменных $a_0, \dots, [p], \dots, [q], \dots, a_n$.

Поскольку сингулярности алгебраической функции, определенной решением уравнения (2_{pq}), являются множеством нулей дискриминанта Δ_{pq}, естественно ожидать, что неравенства для областей сходимости D_{pq} выражаются каким-то образом через дискриминант.

Для кубических уравнений идея решения была продемонстрирована в [2], однако были допущены ошибки в вычислении неравенств. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы распространить наблюдение в [2] на любое тетрономиальное уравнение, т.е. уравнение вида

$$a_0 + a_l y^l + a_m y^m + a_n y^n = 0, \qquad (4)$$

которое содержит три взаимно простых целочисленных показателя $0 < l < m < n$.

Аналогично уравнению (2_{pq}) имеется шесть приведений уравнения (4) путем фиксации двух коэффициентов при мономах y^p и y^q. Соответствующие решения приведенного уравнения будут получаться из (3_{pq}), полагая $a_j = 0$ для всех отсутствующих мономов y^j.

Полный анализ областей сходимости проведен для каждого типа областей D_{pq} в отдельности. Исключения составляют два случая: D_{0l} и D_{mn}, когда l – нечетное, $m -$ нечетное и $n -$ четное. Для них не удается описать область сходимости. Для всех остальных случаев в следующей теореме резюмируется основные характеристики областей D_{pq}. Обозначим дополнительную пару коэффициентов через a_t и a_s. Тогда справедлива следующая

Теорема. *Для любой пары $p, q \in \{0, l, m, n\}$ область сходимости D_{pq} ряда, представляющего решение приведенного тетраномиального уравнения, задается либо одним неравенством одного из следующего типов*

$$\{\varepsilon^{\mp(t-p)(s-p)}\Delta_{pq}(\pm\varepsilon^{t-p}|a_t|, \pm\varepsilon^{s-p}|a_s|) \lesseqgtr 0\},$$

$$\{\Delta_{pq}(-|a_t|, -|a_s|) > 0\},$$

либо двумя неравенствами одного из следующих типов

$$\{\Delta_{pq}(\varepsilon^{t-p}|a_t|, \varepsilon^{s-p}|a_s|) \lesseqgtr 0, \qquad \Delta_{pq}(-|a_t|, -|a_s|) \lesseqgtr 0\},$$

$$\{\Delta_{pq}(-\varepsilon^{t-p}|a_t|, -\varepsilon^{s-p}|a_s|) \lesseqgtr 0, \qquad \Delta_{pq}(\varepsilon^{p-t}|a_t|, \varepsilon^{p-s}|a_s|) \lesseqgtr 0\}.$$

Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-9149.2016.1.

Список использованных источников

1. Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V. Discriminants, resultants and multidimensional determinants // Birkh¨auser, 1994.

2. Passare M., Tsikh A.K. *Algebraic equations and hypergeometric series. The legacy of N.H. Abel, Springer-Verlag, 2004. P. 653-672*

3. Birkeland R. *Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen // Math. Zeitschrift. 1927. Bd. 26, Tl. 1. S. 565-578*

4. Horn J. *Über die Konvergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen // Math. Ann. 1889. Vol. 34. P. 544-600.*

5. Садыков Т.М., Цих А.К. *Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных // М.: Наука, 2014*

УДК 51-73

SOLUTION OF THE MATHEMATICAL PROBLEM POSED BY N. BLOMBERGENIN NMR POLYCRYSTALS

Kondratov A.S.

Scientific supervisor Can.Sc. (Phys.-Math.)Falaleev O.V.

Language supervisor: Sviridova T.N.

Siberian Federal University

Kirensky Institute of Physics SB RAS

The work is devoted to an analytical consideration of the relationship between the probability density of $p(x) = dP(x)/dx$ and the probability distribution function $P(x)$. As is known, the probability density is widely used in almost all the fields of physics and technology. Applications of the probability distribution functions are also very wide.The textbook example, when $p(x)$ as a Gauss function gave rise to $P(x)$ as a special function: the Gauss error function:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad\qquad P(x) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right) \tag{1}$$

The following example is a continuous uniform distribution:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & at\ a \le x \le b \\ 0 & at\ x > a, x < b \end{cases} \qquad\qquad P(x) = \begin{cases} 0 & at\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & at\ a \le x < b \\ 1 & at\ x \ge b \end{cases} \tag{2}$$

Also in physics, for the presentation of signals, the Dirac delta function as $p(x)$ and its integral, the Heaviside function, as $P(x)$ are often used:

$$p(x) = \begin{cases} +\infty & at\ x = 0; \\ 0 & at\ x \ne 0. \end{cases} \qquad\qquad P(x) = \begin{cases} 0 & at\ x < 0; \\ 1/2 & at\ x = 0; \\ 1 & at\ x > 0; \end{cases} \tag{3}$$

In 1953, Bloembergen and Rowland obtainedthe expression $p(x)$ for the probability density of detection of a spectral line in Nuclear Magnetic Resonance (NMR) of solids [1]. It is described by a step function with the existence region$[a, c]$. Between a and c there is a special point b, in which $p(x)$ tends to infinity, causing problems. For $a \le b \le c$ the Bloembergen-Rowland function(4) (BRf) has the form (Figure 1):

$$p(x)=\begin{cases} 0 & at\ x<a \\ \dfrac{K(\alpha_1)}{\pi\sqrt{u}} & at\ a\le x\le b \\ \dfrac{K(\alpha_3)}{\pi\sqrt{v}} & at\ b\le x\le c \\ 0 & at\ x>c \end{cases} \tag{4}$$

where $K(\alpha_i)$ is the complete elliptic integral of the first kind;

$k_1=\frac{v}{u},\ k_3=\frac{u}{v},\ u=(c-x)(b-a),\ v=(c-b)(x-a),\ \alpha_i=\arcsin\sqrt{k_i}$.

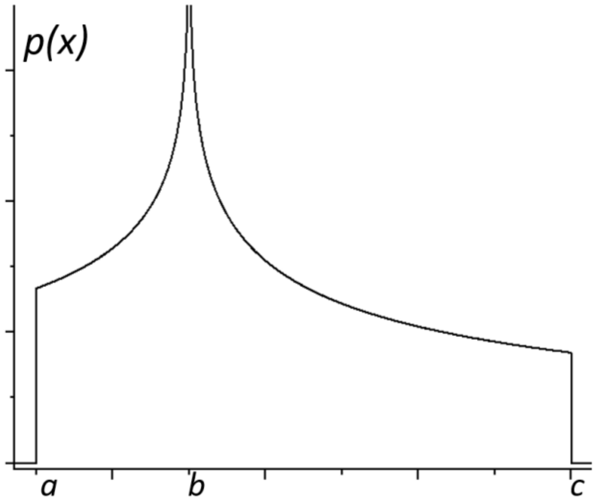

Figure 1 - Distribution of probability density (4)

Despite a lot of attempts [2, 3, 4] for BRf there was no $P(x)$ thatgave rise to a large number of unconvincing artificial methods of numerical integration in the divergence domain,without integration. It was impossible to carry out even the normalization $P(x)$ over the area.

As can be seen, the BRf has the properties of both (2) and (3). And naturally arises the question whether it won't be necessary to introduce a new special function (as in (1)). Note that the use of modern means of computer mathematics (Wolfram Mathematica and MAPLE) helps with the problem solving, but requires non-trivial approaches.For example, to get a simple result with MAPLE, we had to complicate input.

As a result of the work, we obtained two equivalent analytical solutions for the integral of the BRf (4). One is expressed in terms of an elliptic integral of the third kind and on the half-interval $a\le x<b$ as follows:

$$P_{ab}(x)=1-\frac{2\left((b-x)\Pi\left(\frac{b-c}{x-c};\alpha_1\right)\right)}{\sqrt{u}}. \tag{5}$$

(P_{bc} can be obtained in analogous way)

The second, the most compact solution, coincides with the one proposed earlier from intuitive physical considerations in [3, 5] (Figure 2):

$$P(x)=\begin{cases} 0 & at\ x<a \\ 1-\Lambda_0(\varphi_1 \backslash \alpha_1) & at\ a\le x<b \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{c+a-2b}{c-a}\right) & at\ b=x \\ \Lambda_0(\varphi_3 \backslash \alpha_3) & at\ b<x\le c \\ 1 & at\ x>c \end{cases} \tag{6}$$

where $\varphi_1=\arcsin\sqrt{\frac{c-x}{c-a}}$, $\varphi_3=\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{c-a}}$, the parameters α_1 and α_3 were introduced earlier and

$$\Lambda_0(\varphi \backslash \alpha)=\frac{2}{\pi}\left\{K(\alpha)E\left(\varphi \backslash \frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\left(K(\alpha)-E(\alpha)\right)F\left(\varphi \backslash \frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\} \text{[6].}$$

It seems that solution (6) is more convenient for analytical considerations, while solution (5) is for exact numerical calculations. Detailed calculations can be found in [7].

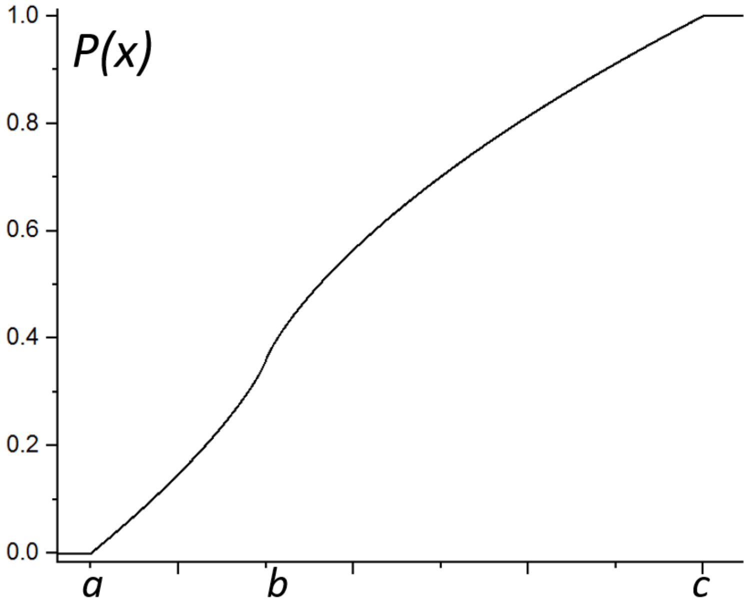

Figure 2 - Distribution of the probability (6)

The author expresses gratitude for the statement of the problem to the RAS academician Bouznik V.M.

References

1. Bloembergen N. and Rowland T. J., NMR in metals and alloys. *Acta Metallurgica*, 1953

2. Chizhik V. I., Chernyshev Yu. S., Donets A.V. et al. *Magnetic Resonance and Its Applications.* Springer International Publishing, 2014.

3. Zeer J. P., Zobov V. E. and Falaleev O. V. *New ("Cross-Singular") effects in NMR of poly.* Science. Siberian branch, 1991

4. Haeberlen U. *High Resolution NMR in Solids Selective Averaging.* Academic Press, 1976

5. Falaleev O. V. and Kondratov A. S. Analysis of experimental NMR absorption bands of polycrystals using the Heuman λ-function. *Journal of Structural Chemistry,* 2016, 375-381

6. Heuman C. Tables of complete elliptic integrals. *Journal of Mathematical Physics,* 1941, 127-206

7. Kondratov A.S. Integration of Bloembergen-Rowland function.*Journal SFU - Mathematics and Physics* (in press)