



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY



ПРОСПЕКТ СВОБОДНЫЙ- 2017

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ СТУДЕНТОВ,
АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
“ПРОСПЕКТ СВОБОДНЫЙ 2017”
ПОСВЯЩЕННОЙ ГОДУ ЭКОЛОГИИ В РФ

КРАСНОЯРСК, СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

17-21 АПРЕЛЯ 2017 Г.

**Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»**

Проспект Свободный - 2017

Материалы научной конференции
посвященной Году экологии в Российской Федерации
17-21 апреля 2017 г.

Электронное издание

Красноярск
СФУ
2017 г.

Фундаментальная математика

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Григорьев А. А.

Научный руководитель д-р физ.-мат. наук Лейнартас Е. К.

Сибирский федеральный университет

На комплекснозначных функциях $f(x)$ целочисленного переменного определим оператор сдвига δ :

$$\delta f(x) = f(x+1); \quad (1)$$

для $\alpha \in \mathbb{N}_+$, $\delta^\alpha = \underbrace{\delta \circ \dots \circ \delta}_\alpha$; δ^0 — тождественный оператор.

Будем рассматривать полиномиальный разностный оператор

$$P(\delta) = \sum_{\alpha=0}^m c_\alpha \delta^\alpha, \quad (2)$$

где c_α — постоянные.

Характеристическим многочленом разностного оператора (2) назовем многочлен

$$P(z) = \sum_{\alpha=0}^m c_\alpha z^\alpha. \quad (3)$$

Данная работа посвящена задаче отыскания частных решений уравнений вида

$$P(\delta) f(x) = Q(x), \quad (4)$$

где $Q(x)$ — заданный полином, $f(x)$ — искомая функция. Задача нахождения таких решений тесно связана с одной из важнейших задач теории конечных разностей — *задачей суммирования функций дискретного аргумента*. Эта задача состоит в отыскании суммы значений некоторой данной функции $\varphi(t)$ в целых неотрицательных точках отрезка $[0, x]$:

$$S(x) = \sum_{t=0}^x \varphi(t). \quad (5)$$

Сумму $S(x)$ можно найти, зная решение $f(x)$ разностного уравнения

$$(\delta - 1) f(x) = \varphi(x), \quad (6)$$

так как в этом случае $S(x)$ выражается через значения $f(x)$ в концах отрезка $[0, x+1]$:

$$S(x) = f(x+1) - f(0). \quad (7)$$

По аналогии с задачей интегрирования функций, функцию $f(x)$ называют *дискретной первообразной функции* $\varphi(x)$, а формулу (7) — *дискретным аналогом формулы Ньютона—Лейбница*.

Для случая, когда $\varphi(t) = t^\mu$, задачу суммирования решил Якоб Бернулли (1713)[1], получив соотношение

$$(\delta - 1)B_\mu(x) = \mu x^{\mu-1}, \quad (8)$$

из которого следует решение задачи (5):

$$\sum_{t=0}^x t^\mu = \frac{1}{\mu+1} [B_\mu(x+1) - B_\mu(0)], \quad (9)$$

где

$$B_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\mu} C_\mu^k b_{\mu-k} x^k \quad (10)$$

многочлены Бернулли — термин, введенный Йозефом Раабе [2, с. 423]; b_μ — *числа Бернулли*, определяемые разложением *производящей функции чисел Бернулли*

$$T(\xi) = \frac{\xi}{e^\xi - 1} \quad (11)$$

в ряд

$$T(\xi) = \sum_{\mu} b_\mu \frac{\xi^\mu}{\mu!}. \quad (12)$$

Эйлер (1733) и независимо от него Маклорен (1738) для функции произвольного вида $\varphi(t)$ получили формулу, в которой искомая сумма (5) выражается через производные и интеграл функции $\varphi(t)$:

$$\sum_{t=0}^x \varphi(t) = \int_0^{x+1} \varphi(t) dt + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{b_\mu}{\mu!} [\varphi^{(\mu-1)}(x+1) - \varphi^{(\mu-1)}(0)]. \quad (13)$$

Доказываются два предложения:

Предложение 1. Рассмотрим уравнение $P(\delta)f(x) = Q(x)$, где $P(\delta) = \sum_{\alpha=0}^m c_\alpha \delta^\alpha$. Если характеристический многочлен оператора $P(\delta)$ удовлетворяет условию

$$P(1) = 0, \quad (14)$$

то сумма

$$S(x) = Q(0) + Q(1) + Q(2) + \dots + Q(x) = \sum_{t=0}^x Q(t) \quad (15)$$

выражается через значения $f(x)$ в концах отрезка $[0, x+1]$, а именно:

$$S(x) = R(\delta)(f(x+1) - f(0)), \quad (16)$$

где $R(\delta)$ — разностный оператор, определяемый соотношением

$$P(\delta) = (\delta - 1) \circ R(\delta). \quad (17)$$

Предложение 2. В условиях предложения 1 обозначим n — кратность корня $z=1$ характеристического многочлена разностного оператора $P(\delta)$. Тогда для суммы (15) справедливо следующее представление:

$$S(x) = R(\delta) \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \sum_{i=0}^k (-1)^{n-i} C_n^i + \sum_{k=1}^n f(x+k) \sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} C_n^i \right), \quad (18)$$

где $R(\delta)$ — разностный оператор, определяемый соотношением $P(\delta) = (\delta - 1)^n \circ R(\delta)$.

Определение. Разностные операторы, рассмотренные в предложениях 1-2, позволяют сводить задачу суммирования (5) к вычислению значений функции $f(x)$ в ограниченном наборе точек. Условимся называть такие операторы *операторами, обладающими суммирующим эффектом*.

Таким образом, возникает задача об отыскании решения уравнения вида (4) для операторов, обладающих суммирующим эффектом.

В следующей теореме рассмотрен случай $Q(x) = x^\mu$.

Теорема. Пусть $P(\delta) = \sum_{\alpha=0}^m c_\alpha \delta^\alpha$ — разностный оператор, коэффициенты c_α — постоянные. Тогда для любого целого неотрицательного μ существует полиномиальное решение уравнения

$$P(\delta) f(x) = x^\mu, \quad x \in \square_+, \quad (19)$$

причем, если k — кратность корня $z=1$ характеристического уравнения $P(z)=0$, то решение уравнения (19) зависит от k произвольных констант, имеет степень, равную $\mu+k$ и его можно записать в виде:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{k-1} \frac{\beta_h}{h!} \frac{x^{\mu+k-h}}{(\mu+k+h)^{(k-h+1)}} + \sum_{v=k}^{\mu} \frac{\beta_v}{v!} \mu^{(v-k)} x^{\mu-v+k} + \sum_{i=0}^{k-1} C_i x^{k-1-i}, \quad C_i = \text{const}. \quad (20)$$

В основе доказательства лежит идея, примененная Эйлером в его доказательстве вышеупомянутой формулы Эйлера—Маклорена. Приведем схему доказательства.

1. Запишем

$$\delta f(x) = f(x+1) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \right] f(x). \quad (21)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, рассматриваем как некоторый дифференциальный оператор, действие которого на всякую функцию $f(x)$ заключается в том, что мы получаем $f(x+1)$. Это эквивалентно действию оператора δ , поэтому естественно эти операторы считать равными.

2. Условно можно записать

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} = e^{\frac{d}{dx}}, \quad (22)$$

или, после переобозначения $\frac{d}{dx} = D$:

$$\delta f(x) = e^D f(x). \quad (23)$$

3. Будем решать наше разностное уравнение $P(\delta) f(x) = x^\mu$ с точки зрения нахождения оператора, обратного $P(\delta)$, то есть такого, который, будучи примененным к $P(\delta) f(x)$, давал бы $f(x)$. Этот оператор естественно обозначить $\frac{1}{P(\delta)}$.

4. Учитывая (23), имеем:

$$f(x) = \left[\frac{1}{c_0 + c_1 e^D + c_2 e^{2D} + \dots + c_m e^{mD}} \right] x^\mu. \quad (24)$$

5. Пусть точка $z=1$ — корень характеристического уравнения $P(z) = 0$; k — кратность этого корня, тогда $P(z) = (z-1)^k R(z)$, $R(1) \neq 0$.

6. Запишем

$$\frac{D^k}{c_0 + c_1 e^D + c_2 e^{2D} + \dots + c_m e^{mD}} = \frac{D^k}{(e^D - 1)^k R(e^D)}, \quad (25)$$

точка $D=0$ — точка регулярности.

7. Разлагая функцию (25) формально в ряд Тейлора по степеням D , получаем соотношение

$$D^k f(x) = \left[\frac{D^k}{c_0 + c_1 e^D + c_2 e^{2D} + \dots + c_m e^{mD}} \right] x^\mu = \left[\sum_{\nu} \frac{\beta_{\nu} D^{\nu}}{\nu!} \right] x^\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta_{\nu}}{\nu!} \mu^{(\nu)} x^{\mu-\nu}, \quad (26)$$

здесь $\mu^{(\nu)}$ — обобщенная степень, определяемая по правилу:

$$\mu^{(\nu)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-(\nu-1)), \quad \mu^0 = 1.$$

8. Интегрируя последовательно (26), получим утверждение теоремы.

Замечание 1. В силу линейности разностного полиномиального оператора

$P(\delta)$ теорема

легко обобщается на случай, когда в правой части исходного разностного уравнения стоит

произвольный полином

$$P(\delta) f(x) = \sum_{\mu=0}^q a_{\mu} x^{\mu}.$$

Замечание 2. В данном решении коэффициенты β_μ естественно назвать *обобщенными числами Бернулли* [4], а сами решения — *обобщенными многочленами Бернулли*.

Список использованных источников

1. Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей* — М.: Наука, 1967.
2. Виноградов И.М. *Математическая энциклопедия*, Т.1 — М.: Советская энциклопедия, 1977.
3. Эйлер. Л. *Дифференциальное исчисление*: пер. с лат. / Л. Эйлер. — М.: Гостехиздат, 1949.
4. Шишкина О. А. Формула Эйлера–Маклорена для рационального параллелограмма. *Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика*, 2015, том 13, 56–71.

О НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ 2-РАНГА 1

Дураков Б. Е.

Научный руководитель д-р физ.-мат. наук Созутов А. И.

Сибирский федеральный университет

В теории конечных групп большое значение имеет теорема Фробениуса. Напомним, что конечная группа G называется *группой Фробениуса*, если в ней найдётся собственная подгруппа H , совпадающая со своим нормализатором и пересекающаяся по единице со всеми сопряжёнными с ней подгруппами, отличными от H [1]. Согласно теореме Фробениуса, элементы группы G , не принадлежащие H и всем сопряжённым с ней подгруппам, вместе с единицей составляют нормальную подгруппу F группы G , называемую *ядром*. Группа G представляется полупрямым произведением ядра и своей подгруппы H , называемой *дополнением*. Имеется ряд теорем, описывающих строение ядра и дополнения конечной группы Фробениуса (например, [2]). Необходимость обобщения теоремы Фробениуса на бесконечные группы отмечалась ещё О. Ю. Шмидтом. Однако уже в классе всех периодических групп теорема Фробениуса неверна [3], поэтому речь пойдёт лишь о некоторых классах групп.

В настоящем докладе приводится схема доказательства возможности обобщения теоремы Фробениуса на класс бесконечных групп 2-ранга 1 с конечной инволюцией и немаксимальной 2-подгруппой, которая является централизатором некоторой инволюции. Здесь инволюция i группы G называется *конечной*, если для каждого элемента $g \in G$ порядок коммутатора $[i, g] = ig^{-1}ig$ конечен [3]. В периодической группе каждая инволюция является конечной. Существуют примеры таких бесконечных групп G с конечной инволюцией i , в которых подгруппа $[i, G]$ не является периодической.

В доказательстве основной теореме данного доклада используются результаты В. П. Шункова, А. И. Созутова, В. Д. Мазурова, Н. М. Сучкова о бесконечных группах с сильно вложенными подгруппами. Напомним, что подгруппа B группы G называется *сильно вложенной*, если B содержит инволюцию и $B \cap B^g$ не содержит инволюций для всякого $g \in G \setminus B$. Бесконечные группы с сильно вложенной подгруппой и конечной инволюцией исследовались в статьях [4-8]. Группы с конечной инволюцией, в которых централизатор каждой инволюции есть абелева 2-группа, изучены В. Д. Мазуровым [5], за исключением случая, когда силовская 2-подгруппа является квазициклической. Для периодических групп с абелевыми централизаторами инволюций некоторой силовской 2-подгруппы Н. М.

Сучковым [6] получен аналог известной теоремы Судзуки. Строение групп с конечной инволюцией и локально циклическим централизатором некоторой инволюции определил А. И. Созутов [9] при условии, что централизатор инволюции не является максимальной подгруппой.

В ходе доказательства основной теоремы в [9] используется сильная вложенность в группу некоторой собственной подгруппы, содержащей централизатор инволюции и не совпадающей с ним. Поэтому существенно используется немаксимальность централизатора. В теореме, доказанной Н. М. Сучковым [7], точно дважды транзитивная группа G со стабилизатором точки $H = C_G(i)$ для некоторой инволюции $j \in G \setminus H$ представляется как $G = H \langle j \rangle H$ и определяется строение группы G при условии, что H является 2-группой. Этот результат, перечисленные выше и другие можно найти в монографии [9].

Приведём формулировку основной теоремы доклада.

Теорема. Пусть G – группа 2-ранга 1 с конечной инволюцией и централизатор некоторой её инволюции i является 2-группой, не максимальной в G . Тогда $G = [i, G] \rtimes C_G(i)$ – группа Фробениуса с абелевым 2-полным ядром $[i, G]$ и дополнением $C_G(i)$.

Доказательство теоремы разбивается на следующий ряд лемм.

Лемма 1. $C_G(u) \leq C_G(i)$ для каждого неединичного элемента $u \in C_G(i)$, все инволюции в G сопряжены и порядок произведения любых двух инволюций группы G конечен и нечётен. Для любых двух различных инволюций j, k группы G существует единственная инволюция $v \in G$ такая, что $j^v = k$.

Лемма 2. Любая собственная подгруппа B группы G , содержащая $C_G(i)$, сильно вложена в G .

Лемма 3. Если подгруппа $C_G(i)$ конечна, то $G = [i, G] \rtimes C_G(i)$ – локально конечная группа Фробениуса с ядром $[i, G]$ и дополнением $C_G(i)$.

Лемма 4. Пусть G – группа с конечной инволюцией i , централизатор которой является либо квазициклической группой, либо бесконечной обобщённой группой кватернионов, и $C_G(i) < B < G$. Тогда $B = [i, B] \rtimes C_G(i)$ – локально конечная группа Фробениуса с ядром $[i, B]$ и дополнением $C_G(i)$, при этом $[i, B] = B \cap B^j$ для каждой инволюции $j \in G \setminus B$.

В завершение доказательства теоремы структура сильно вложенной подгруппы B из леммы 4 переносится на всю группу G . При доказательстве леммы 4 используется результат недавно вышедшей статьи Б. Амберга и Я. Сысака [10].

Более общая цель проводимых исследований заключается в переносе теоремы Фробениуса на группы G с обособленной подгруппой H , которая содержит конечную или совершенную в G инволюцию. В частности, определить, верна ли теорема Фробениуса в случае, когда G разлагается на конечное число двойных смежных классов по H .

Список использованных источников

1. Старостин А. И. *О группах Фробениуса*. Укр. матем. ж., 1971, 23(5), 629-639.
2. Hall M. *The Theory of Groups*. New York: AMS Chelsea, 1976. 434 p.
3. Попов А. М., Созутов А. И., Шунков В. П. *Группы с системами фробениусовых подгрупп*. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. 211 с. [Popov A. M., Sozutov A. I., Shunkov V. P. *Groups with systems of Frobenius subgroups*. Krasnoyarsk, IPC KGTU, 2004, 211 p. (in Russian)]
4. Созутов А. И. *О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой*. Алгебра и логика, 2000, 39(5), 602-617.
5. Мазуров В. Д. *О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций*. Алгебра и логика, 2000, 39(1), 74-86.
6. Сучков Н. М. *О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций*. Матем. сб., 2002, 193(2), 153-160.
7. Сучков Н. М. *О конечности некоторых точно дважды транзитивных групп*. Алгебра и логика, 2001, 40(3), 153-150.
8. Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г. *Бесконечные группы с инволюциями*. Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2011. 149 с. [Sozutov A. I., Suchkov N. M., Suchkova N. G. *Infinite groups with involutions*. Krasnoyarsk, SFU, 2011, 149 p. (in Russian)]
9. Созутов А. И. *О группах с квазициклическим централизатором конечной инволюции*. Сиб. матем. журн., 2016, 57(5), 1127-1130.
10. Amberg B., Sysak Ya. *On products of Groups with abelian subgroups of small index*. Journal of Group Theory, 2017.

ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ КОНВЕКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТРУБЕ

Петров С. В.

Научный руководитель д-р физ.-мат. наук Андреев В. К.

Сибирский Федеральный Университет

Постановка задачи[1]. Найти функции $W(r, t), T(r, t), V(r, t), F(t)$, удовлетворяющие при $r \in (0, a), t \in (0; t_0)$ уравнениям

$$W_t = \nu(W_{rr} + \frac{1}{r}W_r) - \frac{1}{2}ABw^2(t)r^2 - F(t), \quad (1)$$

$$T_t = \chi(T_{rr} + \frac{1}{r}T_r) + AW, \quad (2)$$

$$V_t = \nu(V_{rr} + \frac{1}{r}V_r - \frac{1}{r^2}V) - \dot{w}(t)r, \quad (3)$$

начальным и граничным условиям

$$W(r, 0) = W_0(r), T(r, 0) = T_0(r), V(r, 0) = V_0(r), \quad (4)$$

$$W(a, t) = 0, T(a, t) = 0, V(a, t) = w(t)a \text{ при } 0 \leq t \leq t_0, \quad (5)$$

$$|W(0, t)| < \infty, |T(0, t)| < \infty, |V(0, t)| < \infty. \quad (6)$$

Кроме того,

$$\int_0^a rW(r, t)dr = q(t), t \in [0, t_0]. \quad (7)$$

Начально-краевая задача (1)-(7) описывает движение вязкой теплопроводной жидкости во вращающейся цилиндрической трубе радиуса «а» и является обратной. Наряду с функциями $W(r, t), T(r, t), V(r, t)$ искомой является и функция $F(t)$. В поставленной задаче: $\nu (м^2/с)$ - кинематическая вязкость жидкости, $A(К/м)$ – градиент температуры вдоль оси трубки, $B(1/К)$ – коэффициент теплового расширения, $\chi (м^2/с)$ – коэффициент температуропроводности, $w(1/сек)$ - угловая скорость вращения трубки вокруг её оси, $\dot{w}(1/сек^2)$ - угловое ускорение. Функции $W_0(r), T_0(r), V_0(r), w(t), q(t)$ являются заданными при $r \in [0, a], t \in [0, t_0]$, причем $2\pi q(t)$ есть расход жидкости через поперечное сечение трубы. Величины ν, A, a, B, χ являются заданными положительными постоянными.

Стационарное решение. Пусть $w = w^S$, $q = q^S$ - постоянные, тогда уравнения для определения стационарного состояния $W^S(r)$, $T^S(r)$, $V^S(r)$ и F^S примут вид

$$v(W_{rr}^S + \frac{1}{r}W_r^S) = \frac{1}{2}AB(w^S)^2 r^2 + F^S, \quad (8)$$

$$\chi(T_{rr}^S + \frac{1}{r}T_r^S) = -AW^S, \quad (9)$$

$$v(V_{rr}^S + \frac{1}{r}V_r^S - \frac{1}{r^2}V^S) = 0, \quad (10)$$

с граничными условиями

$$W^S(a) = 0, \quad T^S(a) = 0, \quad V^S(a) = w^S a, \quad (11)$$

$$|W^S(0)| < \infty, \quad |T^S(0)| < \infty, \quad |V^S(0)| < \infty. \quad (12)$$

Кроме того,

$$\int_0^a r W^S(r) dr = q^S. \quad (13)$$

Краевая задача (8)-(13)[2] имеет решение

$$W^S(r) = \frac{AB(w^S)^2}{32v}(r^4 - a^4) + \frac{F^S}{4v}(r^2 - a^2), \quad (14)$$

$$T^S(r) = -\frac{A^2 B(w^S)^2}{32v\chi}(\frac{r^6}{36} - \frac{a^4 r^2}{4} + \frac{2}{9}a^6) - \frac{AF^S}{4v\chi}(\frac{r^4}{16} - \frac{a^2 r^2}{4} + \frac{3}{16}a^4), \quad (15)$$

$$V^S(r) = w^S r,$$

$$F^S = -\frac{16vq^S}{a^4} - \frac{AB(w^S)^2 a^2}{6}, \quad (16)$$

или в безразмерных переменных

$$\bar{W}^S(e) = \frac{Ra}{96}(3e^4 - 4e^2 + 1) + 4\bar{q}^S(1 - e^2), \quad (17)$$

$$\bar{T}^S(e) = \frac{Ra}{32*36}(\frac{9e^2 - 8 - e^6}{48} + e^4 - 4e^2 + 3) + \frac{\bar{q}^S}{4}(e^4 - 4e^2 + 3), \quad (18)$$

$$\bar{V}^S(e) = e,$$

$$\bar{F}^S = -16\bar{q}^S - \frac{Ra}{6}, \quad (19)$$

где $e = \frac{r}{a}$ - безразмерная переменная, $Ra = \frac{AB(w^S)^2 a^5}{v\chi}$ - число Релея, $\bar{q}^S = \frac{q^S}{a\chi}$ - безразмерная

функция q^S .

Ниже приведен профиль скорости в зависимости от расхода жидкости через поперечное сечение. Нетрудно заметить, что при определенных $\bar{q}^s$ скорость будет всегда положительна. Такими значениями в данной задаче являются $\bar{q}^s \geq \frac{Ra}{384}$.

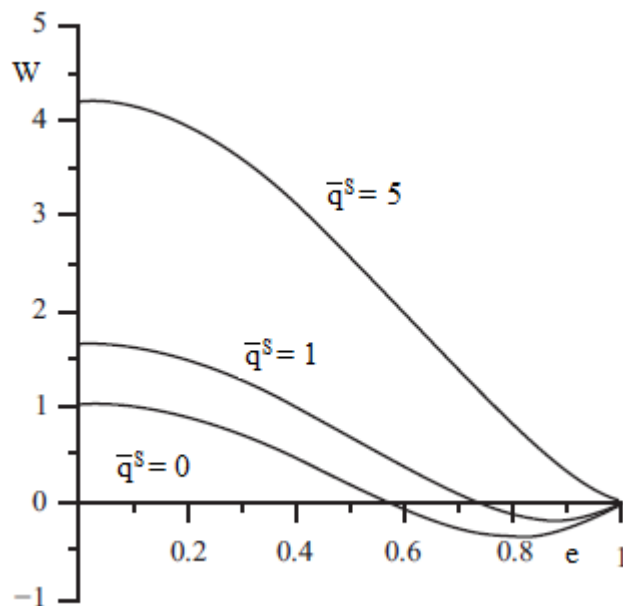


Рис.1 – Профиль скорости конвективного движения жидкости при разных значениях $\bar{q}^s$ и $Ra=100$

Список использованных источников

1. Andreev V.K., Gaponenko Y.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical Models of Convection*. Berlin/Boston, Walter De Gruyter, 2012, 419 p.
2. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000. – 176 с