УДК 517.55

О свойствах оператора Бохнера-Мартинелли в полупространстве

Гулмирза Х.Худайбергенов

Национальный университет Узбекистана,
ВУЗгородок, Ташкент, 700174,
Узбекистан

Мастура С.Рустамова*

Государственный университет Карши,
ул. Кучабаг 17, Карши, 730003,
Узбекистан

Получена 1.10.2007, принята 5.12.2007

В работе исследуются собственные функции и собственные числа оператора Бохнера-Мартинелли в полупространстве

Ключевые слова: оператор Бохнера-Мартинелли, собственные функции, собственные числа.

Рассматривается n -мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^{n+1}$ переменных $z = (z', z_{n+1}) = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1})$. Если $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$, то $\langle z, \bar{w} \rangle = z_1 w_1 + \dots + z_n w_n + z_{n+1} w_{n+1}$, $|z| = \sqrt{\langle z, \bar{z} \rangle}$, где $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, \bar{z}_{n+1})$.

Если точка $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, то $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Re} z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\operatorname{Re} z_j = x_j$, а $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n, \operatorname{Im} z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\operatorname{Im} z_j = y_j$, $j = 1, \dots, n, n+1$.

Ориентация $\mathbb{C}^{n+1}$ определяется порядком координат $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1})$, где $x = (x', x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $y = (y', y_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{n+1})$.

Рассмотрим в $\mathbb{C}^{n+1}$ ядро Бохнера-Мартинелли $U(\zeta, z)$ вида

$$U(\zeta, z) = \frac{n!}{(2\pi i)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n+2}} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_{n+1}$, $d\bar{\zeta}[k] = d\bar{\zeta}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_{k-1} \wedge d\bar{\zeta}_{k+1} \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_{n+1}$.

Ядро Бохнера-Мартинелли является замкнутой формой типа $(n+1, n)$ по ζ . Оно служит ядром интегрального представления Бохнера-Мартинелли, играющего важную роль в многомерном комплексном анализе (см., например, [1]).

Рассмотрим (верхнее) полупространство

$$\mathbb{C}_+^{n+1} = \{(z', z_{n+1}) \in \mathbb{C}_+^{n+1} : \operatorname{Im} z_{n+1} > 0\},$$

граница которого

$$\partial\mathbb{C}_+^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+1} = \{(z, z_{n+1}) \in \mathbb{C}_+^{n+1} : \operatorname{Im} z_{n+1} = 0\}.$$

Если функция $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n+1})$, то оператор Бохнера-Мартинелли определим так:

$$M[f](z) = M(z) = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \notin \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Собственные функции и собственные числа оператора Бохнера-Мартинелли для шара рассмотрены в [1, §5]. В данной работе исследуются собственные функции и собственные числа оператора Бохнера-Мартинелли M для полупространства.

*e-mail: rms1967@mail.ru

© Siberian Federal University. All rights reserved

Лемма 1. Сужение ядра $U(\zeta, z)$ на $\mathbb{R}^{2n+1}$ равно

$$\frac{1}{2i} \frac{(\bar{\zeta}_{n+1} - \bar{z}_{n+1})}{y_{n+1}} P(\zeta, z', y_{n+1}) dv, \quad z \notin \mathbb{R}^{2n+1}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{2n+1},$$

где функция

$$P(\zeta', \xi_{n+1}, z) = \frac{n!}{\pi^{n+1}} \frac{y_{n+1}}{\left(|\zeta' - z'|^2 + |\xi_{n+1} - x_{n+1}|^2 + y_{n+1}^2\right)^{n+1}}, \quad z \notin \mathbb{R}^{2n+1}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{2n+1},$$

является ядром Пуассона для полупространства $\mathbb{C}_+^{n+1}$, а $\zeta = (\zeta', \zeta_{n+1}) = (\zeta_1, \dots, \zeta_n, \zeta_{n+1})$, $\zeta_j = \xi_j + \eta_j$, $j = 1, \dots, n+1$, $u dv = d\xi \wedge d\eta' = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_{n+1} \wedge d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы вычислим сужение дифференциальной формы $d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta$ на $\mathbb{R}^{2n+1}$. При $k \neq n+1$ сужение этой формы равно 0, поскольку в ней содержатся два равных дифференциала $d\zeta_{n+1} = d\xi_{n+1} = d\bar{\zeta}_{n+1}$.

Сужение формы $d\bar{\zeta}[n+1] \wedge d\zeta$ (как нетрудно вычислить) равно

$$(-1)^n (2i)^n d\xi \wedge d\eta' = (-1)^n (2i)^n dv.$$

Отсюда получаем, что сужение ядра Бохнера-Мартинелли имеет вид

$$-\frac{n!}{2i\pi_{n+1}} \cdot \frac{\bar{\zeta}_{n+1} - \bar{z}_{n+1}}{|\zeta - z|^{2(n+1)}} dv = \frac{1}{2i} \cdot \frac{\bar{\zeta}_{n+1} - \bar{z}_{n+1}}{y_{n+1}} \cdot P(\zeta', \xi_{n+1}, z) dv.$$

□

Определим класс функций $\mathcal{L}_{n+1}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ следующим образом: функция $f \in \mathcal{L}_{n+1}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, если она измерима на $\mathbb{R}^{2n+1}$, и функция $(1 + |x_{n+1}|)f(z', x_{n+1})$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$. Норму f в $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ обозначим $\|f\|_\infty$. Ясно, что если $f \in \mathcal{L}_{n+1}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, то $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ и $x_{n+1}f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ (и обратно).

Рассмотрим функцию $f \in \mathcal{L}_{n+1}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ ($p > 1$), обозначим через f^* ее интеграл Пуассона:

$$f^*(z) = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} (f(\zeta', \xi_{n+1})P(\zeta', \xi_{n+1}, z) dv.$$

Как известно (см. [2, гл.2, §2]), функция f^* гармонична в $\mathbb{C}_+^{n+1}$, ее граничные значения почти всюду совпадают с f на $\mathbb{R}^{2n+1}$ и при фиксированном $y_{n+1} > 0$

$$\|f^*(\cdot, y_{n+1})\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

для всех $y_{n+1} > 0$. И обратно, если нормы $\|f^*(\cdot, y_{n+1})\|_\infty$ некоторой гармонической в $\mathbb{C}_+^{n+1}$ функции f^* равномерно ограничены, то существуют почти всюду ее граничные значения на $\mathbb{R}^{2n+1}$ и f^* является интегралом Пуассона от своих граничных значений.

Определим функцию

$$f_1(z) = \int_1^{y_{n+1}} \frac{\partial f^*}{\partial x_{n+1}}(z', x_{n+1}, \eta_{n+1}) d\eta_{n+1} + \varphi(z', x_{n+1}),$$

где $\varphi(z', x_{n+1})$ есть некоторое решение уравнения Пуассона в $\mathbb{R}^{2n+1}$:

$$\tilde{\Delta}\varphi = -\frac{\partial^2 f^*}{\partial y_{n+1} \partial x_{n+1}}$$

(при условии существования граничных значений данной функции на $\mathbb{R}^{2n+1}$), где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{C}^{n+1}$, а $\tilde{\Delta}$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{2n+1}$:

$$\Delta = \sum_j^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_j^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}, \quad \tilde{\Delta} = \sum_j^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_j^n \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}.$$

Тогда функция f_1 гармонична в $\mathbb{C}^{n+1}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= \tilde{\Delta} \int_1^{y_{n+1}} \frac{\partial f^*}{\partial x_{n+1}}(z', x_{n+1}, \eta_{n+1}) d\eta_{n+1} + \frac{\partial^2}{\partial y_{n+1}^2} \int_1^{y_{n+1}} \frac{\partial f^*}{\partial x_{n+1}}(z', x_{n+1}, \eta_{n+1}) d\eta_{n+1} + \tilde{\Delta} \varphi = \\ &= \int_1^{y_{n+1}} \tilde{\Delta} \frac{\partial f^*}{\partial x_{n+1}}(z', x_{n+1}, \eta_{n+1}) d\eta_{n+1} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_{n+1} \partial y_{n+1}}(z) - \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_{n+1} \partial y_{n+1}}(z', x_{n+1}, 1) = \\ &= - \int_1^{y_{n+1}} \frac{\partial^3 f^*}{\partial^2 \eta_{n+1} \partial x_{n+1}} d\eta_{n+1} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_{n+1} \partial y_{n+1}}(z) - \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_{n+1} \partial y_{n+1}}(z', x_{n+1}, 1) = 0 \end{aligned}$$

в силу гармоничности функции f^* .

Теорема 1. Если функция $f \in \mathcal{L}_{n+1}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ и нормы функций

$$f^*(\cdot, y_{n+1}) \cdot x_{n+1} - y_{n+1} f_1(\cdot, y_{n+1}) \tag{1}$$

равномерно ограничены в $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ при $y_{n+1} > 0$, то интеграл Бохнера-Мартинелли от функции f сходится и выполнено равенство

$$M[f] = \frac{1}{2} f^* + \frac{i}{2} f_1.$$

Доказательство. Существование интеграла Бохнера-Мартинелли следует из леммы 1 и из свойств интеграла Пуассона

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(\zeta) U(\zeta, z) = \frac{1}{2iy_{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(\zeta) (\bar{\zeta}_{n+1} - \bar{z}_{n+1}) P(\zeta, z', y_{n+1}) dv,$$

поскольку f и $x_{n+1} f$ принадлежат $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$.

Так как f^* гармоническая функция, то

$$\Delta(f^* x_{n+1}) = 2 \frac{\partial f^*}{\partial x_{n+1}} \quad \text{и} \quad \Delta^2(f^* x_{n+1}) = 0.$$

Рассмотрим функцию $f_0 = f^* x_{n+1} - y_{n+1} f_1$. Она гармонична в $\mathbb{C}_+^{n+1}$, поскольку

$$\Delta f_0 = 2 \frac{\partial f^*}{\partial x_{n+1}} - 2 \frac{\partial f_1}{\partial y_{n+1}} = 0 \tag{2}$$

в силу определения функции f_1 .

По условию теоремы эта функция имеет равномерно ограниченные нормы в $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ при фиксированном y_{n+1} . Поэтому f_0 представляется по своим граничным значениям интегралом Пуассона (см. [2, гл.2, §2]), а ее граничные значения совпадают с $f x_{n+1}$:

$$\begin{aligned} f_0(z) &= (f^* x_{n+1} - y_{n+1} f_1)(z) = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} (f^* \xi_{n+1} - y_{n+1} f_1)(\zeta', \xi_{n+1}, 0) P(\zeta', \xi_{n+1}, z) dv = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} (f \xi_{n+1})(\zeta', \xi_{n+1}, 0) P(\zeta', \xi_{n+1}, z) dv, \quad z \in \mathbb{C}_+^{n+1}. \end{aligned}$$

Тогда из леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} M[f](z) &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(\zeta)U(\zeta, z) = \frac{1}{2i} \int_{\partial\mathbb{R}^{2n+1}} f(\zeta) \frac{\bar{\zeta}_{n+1} - \bar{z}_{n+1}}{y_{n+1}} P(\zeta', \xi_{n+1}, z) dv = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{y_{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(\zeta) \xi_{n+1} P(\zeta', \xi_{n+1}, z) dv - \frac{1}{y_{n+1}} \bar{z}_{n+1} f^*(z) \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{y_{n+1}} (f^*(z)x_{n+1} - y_{n+1}f_1(z)) - \frac{1}{y_{n+1}} (x_{n+1} - iy_{n+1})f^*(z) \right) = \\ &= \frac{1}{2} f^*(z) + \frac{i}{2} f_1(z). \end{aligned}$$

□

Пусть теперь для некоторой функции $f \in \mathcal{L}_{n+1}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ и некоторой константы α справедливо равенство

$$M[f](z) = \alpha f^*(z), \quad z \in \mathbb{C}_+^{n+1}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} f^*(z) + \frac{i}{2} f_1(z) = \alpha f^*(z)$$

или

$$(1 - 2\alpha) f^*(z) + i \cdot f_1(z) = 0.$$

Дифференцируя его по y_{n+1} и используя (2), получим

$$(2\alpha - 1) \frac{\partial f^*(z)}{\partial y_{n+1}} = i \frac{\partial f_1(z)}{\partial y_{n+1}} = i \frac{\partial f^*(z)}{\partial x_{n+1}}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f^*(z)}{\partial x_{n+1}} = \beta \frac{\partial f^*(z)}{\partial y_{n+1}}, \tag{3}$$

где $\beta = i(1 - 2\alpha)$.

Это условие показывает, что в качестве функции f_1 нужно взять функцию βf^* и условие (1) можно заменить на более простое условие равномерной ограниченности норм функции $f^*(z)(x_{n+1} - \beta y_{n+1})$. В дальнейшем будем исследовать условие (3).

Пусть сначала $n = 0$, тогда интеграл Бохнера-Мартинелли превращается в интеграл Коши, а из (3) получаем

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial x_1^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial y_1^2}.$$

Поскольку f^* — гармоническая функция в верхней полуплоскости, то

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial y_1^2} = 0,$$

таким образом имеем

$$(1 + \beta^2) \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_1^2} = 0.$$

При $\beta^2 \neq -1$ функция f^* становится линейной, а линейная функция ограничена на $\mathbb{C}_+^1$, только когда она является постоянной. Поскольку мы еще требуем ограниченность функции $x_{n+1}f$, то эта константа равна нулю.

При $\beta^2 = -1$ получаем, что $\beta = \pm i$. Тогда из (3) очевидно получаем, что f^* либо голоморфна (при этом $\alpha = 1$), либо антиголоморфна (при этом $\alpha = 0$). Так что собственными функциями среди функций из $\mathcal{L}_1^\infty(\mathbb{R}^1)$ служат голоморфные или антиголоморфные функции.

Пусть $n > 0$. Так же, как и в одномерном случае получаем, что

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial x_{n+1}^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial y_{n+1}^2}.$$

При $\beta^2 = -1$, как и выше, получаем, что f^* голоморфна или антиголоморфна по последнему переменному z_{n+1} , в этих случаях $\alpha = 1$ или $\alpha = 0$. Кроме того, при фиксированном z_{n+1} эта функция гармонична по переменным z' . Так как для почти всех z_n она ограничена, то f^* по теореме Лиувилля постоянна по z' , т.е. от z' не зависит.

При $\beta^2 \neq 1$ получаем из условия гармоничности функции f^* , что

$$\tilde{\Delta} f^* + (1 + \beta^2) \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_{n+1}^2}.$$

С другой стороны условие (3) влечет, что f зависит от $x_{n+1} - \beta y_{n+1} = t$.

Тогда функция $f_2(z', t_{n+1}) = f^*(z', x_{n+1} + i y_{n+1})$ (такая замена правомерна, поскольку f^* вещественно аналитическая) удовлетворяет условию

$$\tilde{\Delta} f_2 + (1 + \beta^2) \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = 0,$$

т.е. функция $f^2(z', t/\sqrt{1 + \beta^2})$ гармонична в $\mathbb{R}^{2n+1}$. По условию она ограничена на $\mathbb{R}^{2n+1}$, что возможно лишь для постоянной функции. Следовательно, функция f^* постоянна в $\mathbb{C}_+^{n+1}$, поскольку функция $x_{n+1} f$ также ограничена, то эта постоянная равна нулю.

Теорема 2. Пусть функция $f \in \mathcal{L}_{n+1}^\infty$ и $\|f^*(\cdot, y_{n+1})\|_\infty = O(1/y_{n+1})$ при $y_{n+1} \rightarrow +\infty$. Собственными функциями оператора Бохнера-Мартинелли из этого класса являются функции одного переменного z_{n+1} , голоморфные по z_{n+1} с собственным числом, равным 1, и, соответственно, функции антиголоморфны по z_{n+1} с собственным числом, равным 0, и только они.

Если $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, то интеграл Бохнера-Мартинелли может от такой функции расходиться, например, $f = 1$. Его нужно тогда рассматривать в смысле главного значения по Коши:

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(\zeta) U(\zeta, z) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \notin \mathbb{R}^{2n+1},$$

где B_R — шар с центром в нуле радиуса R в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Предложение 1. Справедливо равенство

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} U(\zeta, z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y_{n+1} > 0, \\ -\frac{1}{2}, & y_{n+1} < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $n = 0$, тогда интеграл Бохнера-Мартинелли превращается в интеграл Коши. Поэтому

$$\int_{-R}^R \frac{d\xi_1}{\xi_1 - z_1} = \int_{-R}^R \frac{\xi_1 - \bar{z}_1}{(\xi_1 - x_1)^2 + y_1^2} d\xi_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{(R - x_1)^2 + y_1^2}{(R + x_1)^2 + y_1^2} + i \operatorname{arctg} \frac{R - x_1}{y_1} + i \operatorname{arctg} \frac{R + x_1}{y_1}.$$

Устремляя в этом равенстве $R \rightarrow +\infty$, получаем требуемое.

Если $n > 0$, то рассмотрим $z = 0$ и вычислим главное значение особого интеграла Бохнера-Мартинелли в нуле и в бесконечности. Для этого рассмотрим область D в $\mathbb{C}_+^{n+1}$, ограниченную полусферами с центром в нуле, радиусами r и R и частью плоскости $\mathbb{R}^{2n+1}$. Тогда

$$\int_{\partial D} U(\zeta, 0) = 0.$$

Расписывая ∂D на интегралы по полусферам и на интеграл по части плоскости, нетрудно понять, что интегралы по полусферам противоположны по знаку и равны по модулю, поэтому их сумма равна 0. Отсюда получаем, что

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} U(\zeta, 0) = 0.$$

Такое же рассуждение справедливо для любой точки $z \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Поэтому главное значение особого интеграла Бохнера-Мартинелли от 1 равно нулю. Для доказательства предложения остается воспользоваться формулами Сохоцкого-Племеля для интеграла Бохнера-Мартинелли (см., например, [1, §2]). $\square$

Список литературы

- [1] А.М.Кытманов, Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения, Новосибирск, Наука, 1992.
- [2] И.Стейн, Г.Вейс, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., Мир, 1974.

On the Properties of the Bochner-Martinelli Operator in Half-Space

Gulmirza X.Xudayberganov
Mastura C.Rustamova

In the paper the eigen functions and the eigen values of the Bochner-Martinelli operator in half-space are investigated.

Key words: Bochner-Martinelli operator, eigen functions, eigen values.