УДК 512.54

Уравнения Эйнштейна на четырехмерном многообразии конформной связности без кручения

Леонид Н. Кривоносов
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Минина, 24, Н.Новгород, 603950
Россия

Вячеслав А. Лукьянов*
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Павловского, 1а, Нижегородская область, Заволжье, 606520
Россия

Получена 25.09.2011, окончательный вариант 29.01.2012, принята к печати 29.03.2012

Устранен главный дефект уравнений Эйнштейна — негеометричность их правой части. Доказана их конформная инвариантность. Введено ключевое понятие равнодуального тензора, оказавшееся в тесной связи как с уравнениями Эйнштейна, так и с уравнениями Янга-Миллса. Получен критерий равнодуальности основного аффинора многообразия конформной связности без кручения. Найдено разложение основного аффинора на сумму равнодуальных, конформно инвариантных и неприводимых слагаемых. Обобщена алгебраическая классификация А.З.Петрова. Дано новое вариационное обоснование уравнений Эйнштейна, и выяснена их геометрическая природа. Указан геометрический смысл калибровочных преобразований нормализации и перенормировки.

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна, уравнения Янга-Миллса, уравнения Максвелла, многообразие конформной связности с кручением и без кручения, оператор Ходжа.

Введение

Как известно, А.Эйнштейн считал существенным недостатком своих уравнений

$$R_{ij} - \frac{1}{2}R\eta_{ij} = T_{ij} \tag{1}$$

тот факт, что левая часть имеет четкое геометрическое происхождение, а правая часть введена из физических соображений (см., например, [1, с. 14]). В [2] уравнения Эйнштейна были получены на 4-мерном многообразии конформной связности без кручения в форме

$$R_{ij} - \frac{1}{6}R\eta_{ij} = b_{(ij)} \tag{2}$$

как составная часть системы уравнений Янга-Миллса. Здесь b_{ij} — коэффициенты разложения пфаффовых форм ω_i по базисным пфаффовым формам ω^i

$$\omega_i = b_{ij}\omega^j, \tag{3}$$

η_{ij} — стандартный тензор Минковского сигнатуры $(- + + +)$, $b_{(ij)} = b_{ij} + b_{ji}$. Чтобы из (2) получить стандартный вид (1) уравнений Эйнштейна, следует положить

$$T_{ij} = b_{(ij)} - 2b\eta_{ij}, \tag{4}$$

*oxyzt@ya.ru

где $b = \eta^{ij} b_{ij}$, а $R = 6b$. Индексы i, j во всех формулах пробегают значения от 1 до 4. Пфаффовы формы ω^i, ω_i являются элементами матрицы конформной связности

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & 0 \\ \omega^1 & 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & \omega_1^4 & \omega_1 \\ \omega^2 & \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^3 & -\omega_2^4 & -\omega_2 \\ \omega^3 & \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 & -\omega_3^4 & -\omega_3 \\ \omega^4 & \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & 0 & -\omega_4 \\ 0 & \omega^1 & -\omega^2 & -\omega^3 & -\omega^4 & -\omega_0^0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

которая, будучи заданной на каждой карте некоторого атласа, определяет структуру многообразия конформной связности. R_{ij} есть тензор Риччи квадратичной формы угловой метрики

$$\psi = \eta_{ij} \omega^i \omega^j. \tag{6}$$

Таким образом, обе части уравнений Эйнштейна в форме (2) вычисляются через матрицу связности Ω и потому имеют геометрическую природу.

Четырехмерные многообразия конформной связности без кручения, на которых для каждой карты некоторого атласа выполняются равенство $\omega_0^0 = 0$ и уравнения Эйнштейна в форме (2), будем называть *конформными многообразиями Эйнштейна.* В статье [3] применяется сходный термин "конформное пространство Эйнштейна", но он означает совсем другое, а именно: псевдориманово многообразие, в котором метрика конформна метрике Эйнштейна. Обычные пространства Эйнштейна, в которых выполняются равенства

$$R_{ij} = \varkappa \eta_{ij}, \tag{7}$$

являются псевдоримановыми многообразиями.

На любом четырехмерном многообразии конформной связности определен оператор Ходжа $*$, который действует на внешние 2-формы по правилу

$$\theta = \frac{1}{2} a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j \longrightarrow *\theta = \frac{1}{4} \varepsilon_{ij}^{kl} a_{kl} \omega^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} a_{ij}^* \omega^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} a_{ij} * \left(\omega^i \wedge \omega^j\right),$$

где

$$\varepsilon_{ij}^{kl} = \delta_{1234}^{klmn} \eta_{mi} \eta_{nj}, \tag{8}$$

δ_{1234}^{klmn} — четырехместный символ Кронекера. Иначе говоря,

$$a_{ij}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{kl} a_{kl}. \tag{9}$$

Этой формулой задано действие оператора Ходжа на дважды ковариантный кососимметрический тензор a_{kl} (или на кососимметрическую тензорную плотность веса $\left(-\frac{1}{2}\right)$, каковую на самом деле образуют коэффициенты конформно инвариантной внешней 2-формы. Эта же формула определяет действие оператора Ходжа на ковариантную двухвалентную кососимметрическую плотность любого другого веса. Поскольку свойства оператора Ходжа от веса тензорной плотности не зависят, а нам нужны только тензорные плотности веса $\left(-\frac{1}{2}\right)$, то мы для краткости будем говорить о действии оператора Ходжа на тензор.) Если у кососимметрического тензора a_{ij} поднять один индекс с помощью η^{ij}

$$a_j^k = \eta^{ki} a_{ij},$$

то получим кососимметрический *аффинор* ($\eta_{ik} a_j^k = -\eta_{jk} a_i^k$). Тогда действие (9) оператора Ходжа заменится его действием на кососимметрический аффинор по формуле

$$\left(a_j^k\right)^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{jn}^{km} a_m^n. \tag{10}$$

Легко проверить, что формулы (9) и (10) дают одно и то же. Формулы (8) задают оператор Ходжа в неголономном ортонормированном базисе. В голономном базисе квадратичная форма угловой метрики (6) записывается в виде $\psi = g_{ij}dx^i dx^j$, а оператор Ходжа в виде $\varepsilon_{ij}^{kl} = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\delta_{1234}^{klmn} g_{mi} g_{nj}$, где $g = \det(g_{ij})$. Величины ε_{ij}^{kl} образуют полноправный четырехвалентный тензор, который инвариантен относительно преобразования перенормировки угловой метрики. Но формулы (8) намного проще и удобнее, поэтому мы предпочитаем работать в неголономном базисе.

Пусть тензор a_{ijmn} кососимметричен как по первой паре индексов ij, так и по второй mn. Тогда преобразование Ходжа (9) можно производить как по первой паре индексов, так и по второй. Результат обозначим соответственно ${}^*a_{ijmn} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^{kl} a_{klmn}, \qquad a_{ijmn}^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{mn}^{kl} a_{ijkl}$.

Если выполняется равенство

$$ {}^*a_{ijmn} = a_{ijmn}^*, \tag{11} $$

тогда тензор a_{ijmn} будем называть *равнодуальным.* Тензор ${}^*a_{ijmn}^*$ называем *дважды дуальным* к тензору a_{ijmn}. Так как $*^2 = -id$, то условие равнодуальности (11) равносильно

$$ {}^*a_{ijmn}^* = -a_{ijmn}. \tag{12} $$

Если компонентами кососимметрического аффинора a_i^j (т.е. $\eta_{ki} a_j^i = -\eta_{ji} a_k^i$) являются внешние 2-формы, то формулу (10) следует рассматривать как действие оператора Ходжа на левую пару индексов тензора a_{ijmn}, коэффициентов формы $a_i^j = \frac{1}{2} a_{imn}^j \omega^m \wedge \omega^n$. Поэтому условие равнодуальности (11) запишется в виде

$$ *a_i^j = \frac{1}{2}\varepsilon_{il}^{jk} a_k^l. \tag{13} $$

В первом разделе данной статьи описывается техника работы с оператором Ходжа; приводится удобная форма условия равнодуальности и формула для дважды дуального тензора; вычисляется дважды дуальный тензор для произведения Кулкарни-Номидзу $\eta_{ij} \circ a_{mn}$ в случаях кососимметрического и симметрического тензора a_{mn}; вычисляется дважды дуальный тензор для тензора Римана и основного аффинора Φ_i^j многообразия конформной связности без кручения, доказывается критерий равнодуальности этих тензоров; определяется обобщенное конформное многообразие Эйнштейна.

Во втором разделе вычисляются разложения основного аффинора Φ_i^j на равнодуальные неприводимые слагаемые как в случае конформного многообразия Эйнштейна, так и в случае обобщенного конформного многообразия Эйнштейна.

В третьем разделе алгебраическая классификация А.З. Петрова пространств Эйнштейна обобщается на случай конформных многообразий Эйнштейна и обобщенных конформных многообразий Эйнштейна.

В четвертом разделе уравнения Эйнштейна (2) выводятся из вариационного принципа; устанавливается, что, по аналогии с электромагнитным полем, в основе которого лежит 1-параметрическая группа калибровочных преобразований перенормировки угловой метрики, в основе гравитационного поля (и уравнений Эйнштейна) лежит 4-параметрическая калибровочная группа преобразований нормализации. Выяснена также роль уравнений Эйнштейна с космологической константой.

В пятом разделе дается геометрическое истолкование преобразований перенормировки и нормализации.

1. Равнодуальные и дважды дуальные тензоры

С оператором Ходжа удобнее всего работать, используя собирательные индексы

$$\begin{array}{lll} 12 \longrightarrow 1, & 13 \longrightarrow 2, & 14 \longrightarrow 3, \\ 34 \longrightarrow 4, & 42 \longrightarrow 5, & 23 \longrightarrow 6. \end{array}$$

Тогда тензор a_{ijmn}, кососимметричный как по первой паре индексов, так и по второй, запишется в виде квадратной матрицы A шестого порядка. Например, $a_{1223} \longrightarrow \alpha_{16} \in A$. Эту матрицу целесообразно разбить на 4 квадратных блока из матриц 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix}$. Так как, согласно (8), $\begin{array}{lll} \varepsilon^{34}_{12} = -1, & \varepsilon^{24}_{13} = 1, & \varepsilon^{23}_{14} = -1, \\ \varepsilon^{14}_{23} = 1, & \varepsilon^{13}_{24} = -1, & \varepsilon^{12}_{34} = 1, \end{array}$ сам оператор Ходжа в собирательных индексах задается матрицей вида $[*] = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица 3-го порядка, 0 — нулевая матрица 3-го порядка. Действие оператора Ходжа на правую пару индексов тензора a_{ijmn} сводится к умножению матрицы A слева на матрицу $[*]$:

$$a^*_{ijmn} \longrightarrow A\,[*] = \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & -X \\ V & -U \end{pmatrix}.$$

Действие оператора Ходжа на левую пару индексов тензора a_{ijmn} сводится к умножению транспонированной матрицы $[*]^T$ слева на матрицу A:

$${}^*a_{ijmn} \longrightarrow [*]^T A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & V \\ -X & -Y \end{pmatrix}.$$

Условие равнодуальности тензора a_{ijmn} равносильно равенству

$$\begin{pmatrix} Y & -X \\ V & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & V \\ -X & -Y \end{pmatrix}.$$

Итак, **равнодуальность тензора a_{ijmn} равносильна тому, что его матрица имеет вид**

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Дважды дуальный тензор ${}^*a^*_{ijmn}$ имеет следующую матрицу:

$$[*]^T A\,[*] = \begin{pmatrix} V & -U \\ -Y & X \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Пусть a_{ij} и c_{ij} — любые два двухвалентных тензора. *Произведением Кулкарни-Номидзу* этих тензоров называется 4-валентный тензор вида $a_{ij} \circ c_{mn} = a_{im}c_{jn} + a_{jn}c_{im} - a_{in}c_{jm} - a_{jm}c_{in}$.

Тензор $a_{ij} \circ c_{mn}$ кососимметричен как по паре индексов ij, так и по паре mn.

Нам понадобятся только тензоры вида $\eta_{ij} \circ a_{mn}$. Матрица такого тензора в собирательных индексах имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} & 0 & a_{14} & -a_{13} \\ -a_{32} & a_{11} - a_{33} & -a_{34} & -a_{14} & 0 & a_{12} \\ -a_{42} & -a_{43} & a_{11} - a_{44} & a_{13} & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{41} & a_{31} & a_{33} + a_{44} & -a_{32} & -a_{42} \\ a_{41} & 0 & -a_{21} & -a_{23} & a_{22} + a_{44} & -a_{43} \\ -a_{31} & a_{21} & 0 & -a_{24} & -a_{34} & a_{22} + a_{33} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Отсюда следует

Предложение 1. $\eta_{ij} \circ a_{mn} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $a_{mn} = 0$.

Из (16) также видно, что в случае кососимметричности тензора a_{mn} выполняются равенства (14). Получили

Предложение 2. *Если тензор* a_{mn} *кососимметричен, то тензор* $\eta_{ij} \circ a_{mn}$ *равнодуален.*

Чтобы произвести вычисления в случае симметрического тензора a_{ij}, введем еще один оператор, действующий на множестве симметрических двухвалентных ковариантных тензоров $\widehat{a}_{ij} \overset{def}{=} a_{ij} - \dfrac{1}{2} a\eta_{ij}$, где $a = \eta^{ij} a_{ij}$. Очевидно, что

$$\widehat{\widehat{a}}_{ij} = a_{ij}, \ \widehat{\eta}_{ij} = -\eta_{ij}. \tag{17}$$

Матрица тензора $\eta_{ij} \circ \widehat{a}_{mn}$ в собирательных индексах имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{33}+a_{44} & -a_{23} & -a_{24} & 0 & a_{14} & -a_{13} \\ -a_{32} & a_{22}+a_{44} & -a_{34} & -a_{14} & 0 & a_{12} \\ -a_{42} & -a_{43} & a_{22}+a_{33} & a_{13} & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{41} & a_{31} & a_{11}-a_{22} & -a_{32} & -a_{42} \\ a_{41} & 0 & -a_{21} & -a_{23} & a_{11}-a_{33} & -a_{43} \\ -a_{31} & a_{21} & 0 & -a_{24} & -a_{34} & a_{11}-a_{44} \end{pmatrix}$$

Сравнивая эту матрицу с матрицей (16), получим с помощью (15)

Предложение 3. *Если тензор* a_{mn} *симметричен, то тензором, дважды дуальным к тензору* $\eta_{ij} \circ a_{mn}$, *будет тензор* $\eta_{ij} \circ \widehat{a}_{mn}$, т.е.

$${}^{*}\left(\eta_{ij} \circ a_{mn}\right)^{*} = \eta_{ij} \circ \widehat{a}_{mn}. \tag{18}$$

Применим эти предложения для вычисления тензора, дважды дуального к тензору Римана R_{ijmn}. Как известно, тензор Вейля конформной кривизны имеет следующее выражение:

$$C_{ijmn} = R_{ijmn} + \frac{R}{6}\left(\eta_{in}\eta_{jm} - \eta_{im}\eta_{jn}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta_{im}R_{jn} - \eta_{in}R_{jm} + \eta_{jn}R_{im} - \eta_{jm}R_{in}\right).$$

С помощью произведения Кулкарни-Номидзу это выражение запишется в виде

$$C_{ijmn} = R_{ijmn} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ R_{mn} - \frac{R}{12}\eta_{ij} \circ \eta_{mn}. \tag{19}$$

Как известно из алгебраической классификации А.З. Петрова, тензор Вейля имеет матрицу вида (14), и потому он равнодуален. Применяя к обеим парам индексов равенства (19) оператор Ходжа и формулы (12), (18) и (17), получим $-C_{ijmn} ={}^{*} R^{*}_{ijmn} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ \widehat{R}_{mn} + \frac{R}{12}\eta_{ij} \circ \eta_{mn}$.

Складывая два последних равенства, получим

$${}^{*}R^{*}_{ijmn} = -R_{ijmn} - \eta_{ij} \circ B_{mn}, \tag{20}$$

где $B_{ij} = R_{ij} - \dfrac{1}{4}R\eta_{ij}$. Формула (20) имеется в [1, с. 203].

Внешние 2-формы

$$\Phi^{i}_{j} = d\omega^{i}_{j} + \omega^{i}_{k} \wedge \omega^{k}_{j} + \omega^{i} \wedge \omega_{j} + \eta^{im}\eta_{jn}\omega_{m} \wedge \omega^{n}, \tag{21}$$

составляющие часть матрицы

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0^0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & 0 \\ \Phi^1 & 0 & \Phi_1^2 & \Phi_1^3 & \Phi_1^4 & \Phi_1 \\ \Phi^2 & \Phi_1^2 & 0 & -\Phi_2^3 & -\Phi_2^4 & -\Phi_2 \\ \Phi^3 & \Phi_1^3 & \Phi_2^3 & 0 & -\Phi_3^4 & -\Phi_3 \\ \Phi^4 & \Phi_1^4 & \Phi_2^4 & \Phi_3^4 & 0 & -\Phi_4 \\ 0 & \Phi^1 & -\Phi^2 & -\Phi^3 & -\Phi^4 & -\Phi_0^0 \end{pmatrix}$$

кривизны многообразия конформной связности, удовлетворяют условию кососимметричности $\eta_{ki}\Phi^i_j = -\eta_{ji}\Phi^i_k$, но при наличии кручения ($\Phi^i \neq 0$) не образуют геометрического объекта. При отсутствии кручения они образуют аффинор, который будем называть *основным аффинором*, а его компоненты Φ^i_{jmn} — *основным тензором.* Равенство (21) можно записать в виде

$$\Phi_{ijmn} = R_{ijmn} + S_{ijmn}, \tag{22}$$

где R_{ijmn} — компоненты тензора римановой кривизны угловой метрики (6), иначе говоря, коэффициенты внешней 2-формы $\eta_{ik}\left(d\omega^k_j + \omega^k_l \wedge \omega^l_j\right) = \frac{1}{2}R_{ijmn}\omega^m \wedge \omega^n$, а S_{ijmn} — коэффициенты внешней 2-формы $\eta_{ik}\left(\omega^k \wedge \omega_j + \eta^{km}\eta_{jn}\omega_m \wedge \omega^n\right) = \frac{1}{2}S_{ijmn}\omega^m \wedge \omega^n$. Учитывая (3),

$$S_{ijmn} = \eta_{im}b_{jn} - \eta_{in}b_{jm} + \eta_{jn}b_{im} - \eta_{jm}b_{in} = \eta_{ij} \circ b_{mn}. \tag{23}$$

Выделяя у тензора b_{mn} симметрическую и кососимметрическую части, запишем (23) в виде

$$S_{ijmn} = \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{(mn)} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[mn]}. \tag{24}$$

В силу предложения 2 второе слагаемое справа является равнодуальным тензором, т.е. ${}^*\left(\eta_{ij} \circ b_{[mn]}\right)^* = -\eta_{ij} \circ b_{[mn]}$.

Для первого слагаемого (24) в силу предложения 3 мы умеем вычислять дважды дуальный тензор. Итак, из (20) и (22) ${}^*\Phi^*_{ijmn} = -R_{ijmn} - \eta_{ij} \circ B_{mn} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ \widehat{b}_{(mn)} - \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[mn]}$.

Исключим R_{ijmn} с помощью (22) и (24):

$${}^*\Phi^*_{ijmn} = -\Phi_{ijmn} + \eta_{ij} \circ \left(b_{(mn)} - \frac{1}{2}b\eta_{mn} - R_{mn} + \frac{1}{4}R\eta_{mn}\right). \tag{25}$$

В [2, с. 439] была доказана основная формула

$$*\Phi^j_k = \frac{1}{2}\varepsilon^{jp}_{kq}\Phi^q_p, \tag{26}$$

на которой базировались все результаты этой статьи. В силу (13) это означает, что аффинор Φ^j_k равнодуален. Формула (26) была доказана с использованием уравнений Янга-Миллса. Однако уравнения Янга-Миллса использовались не в полном объеме. Как показано в [2], уравнения Янга-Миллса на четырехмерном многообразии конформной связности без кручения распадаются на 3 группы: уравнения Эйнштейна, уравнения Максвелла и уравнения движения вещества. Для доказательства (26) использовались только уравнения Эйнштейна (2). Следовательно, аффинор Φ^j_k является равнодуальным в любом конформном многообразии Эйнштейна. Но условие (26) может выполняться и в более общем случае. Из формул (12), (25) и предложения 1 следует

Теорема 1. *Для того чтобы основной аффинор Φ^j_k четырехмерного многообразия конформной связности без кручения был равнодуален, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись обобщенные уравнения Эйнштейна*

$$R_{ij} - \frac{1}{4}R\eta_{ij} = b_{(ij)} - \frac{1}{2}b\eta_{ij}. \tag{27}$$

Так как из (23) имеем $\eta^{in}(\eta_{ij}\circ b_{mn}) = \eta^{in}S_{ijmn} = -2b_{jm} - b\eta_{jm}$, то, свертывая (22) с η^{in}, получим

$$\Phi_{jm} \overset{def}{=} \eta^{in}\Phi_{ijmn} = R_{jm} - 2b_{jm} - b\eta_{jm}. \tag{28}$$

Еще раз свертывая с η^{jm}, найдем

$$F \overset{def}{=} \eta^{jm}\Phi_{jm} = R - 6b. \tag{29}$$

Подставляя R_{jm} из (28) в (27) и используя (29), придем к

$$\Phi_{jm} + b_{[jm]} = \frac{1}{4}F\eta_{jm}. \tag{30}$$

Это другая форма записи уравнений (27).

Аналогично, уравнения (2) записываются в виде

$$\Phi_{jm} + b_{[jm]} = 0. \tag{31}$$

Свертывая последнее равенство с η^{jm}, получим $F = 0$, и потому из (31) вытекает (30), но не наоборот.

Так как и 2-форма $\Phi^0_0 = \dfrac{1}{2}b_{[ij]}\omega^j \wedge \omega^i$, и аффинор Φ^j_k инвариантны и относительно преобразований нормализации, и относительно преобразований перенормировки [2, с. 445], то и уравнения Эйнштейна (31), и обобщенные уравнения Эйнштейна (30) конформно инвариантны.

Заметим, что обобщенные уравнения Эйнштейна (27) — это не что иное, как уравнения Эйнштейна с космологическим членом, т.к. (27) можно записать в виде

$$R_{ij} - \frac{1}{2}R\eta_{ij} + \Lambda\eta_{ij} = b_{(ij)} - 2b\eta_{ij}, \tag{32}$$

где $\Lambda = \dfrac{1}{4}F$. Так как справа стоит тензор энергии импульса (см. формулу (4)), то это стандартная форма уравнений Эйнштейна с космологическим членом. Но Λ в нашем случае не константа, поэтому сохраняющейся величиной является не тензор $b_{(ij)} - 2b\eta_{ij}$, а тензор $b_{(ij)} - 2b\eta_{ij} - \Lambda\eta_{ij}$. Величина Λ — это не скаляр, а скалярная плотность веса $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. Поэтому в некоторой окрестности данной точки многообразия ее можно подходящей заменой координат привести к 1 или -1, следовательно, локально уравнения (27) в точности становятся уравнениями Эйнштейна с космологической постоянной.

Если на каждой карте некоторого атласа четырехмерного многообразия конформной связности без кручения выполняется равенство $\omega^0_0 = 0$ и уравнения (27), мы будем называть такое многообразие *обобщенным конформным многообразием Эйнштейна.* Различие между конформным многообразием Эйнштейна и обобщенным конформным многообразием Эйнштейна состоит лишь в том, что на первом скалярная плотность $F = 0$, а на втором $F \neq 0$.

Из формул (20) и предложения 1 очевидно вытекает

Теорема 2. *Тензор Римана R_{ijmn} псевдориманова многообразия равнодуален тогда и только тогда, когда выполняются уравнения*

$$R_{ij} - \frac{1}{4}R\eta_{ij} = 0. \tag{33}$$

Эта теорема хорошо известна (см., например, [4, с. 136], утверждение 3.20). Она приведена только для контраста с утверждением Теоремы 1: в то время как уравнения (2) и (27) не эквивалентны, уравнения (7) и (33) означают одно и то же, а именно, что псевдориманово многообразие эйнштейново.

2. Разложение тензора Φ_{ijmn} на неприводимые слагаемые

2.1. Конформное многообразие Эйнштейна

Подставим выражение для R_{ij} из уравнений Эйнштейна (2) $R_{ij} = b_{(ij)} + \frac{1}{6}R\eta_{ij}$ в формулу (19): $C_{ijmn} = R_{ijmn} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{(mn)}$.

Теперь выразим отсюда R_{ijmn} и подставим его в (22), а вместо S_{ijmn} подставим его выражение по формуле (24). В итоге получим

$$\Phi_{ijmn} = C_{ijmn} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[mn]}. \tag{34}$$

Оба слагаемых в правой части равнодуальны, конформно инвариантны и неприводимы в том смысле, что их уже нельзя разбить на равнодуальные слагаемые, им не коллинеарные.

Пусть матрицы тензоров, входящих в разложение (34), имеют, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} U & V \\ V & -U \end{pmatrix}.$$

Уравнение (34) равносильно двум матричным равенствам:

$$M = X + U, \qquad N = Y + V. \tag{35}$$

Так как тензор Вейля обладает, как известно, свойствами $C_{ijmn} = C_{mnij}$, $\eta^{in}C_{ijmn} = 0$, $C_{ijmn} + C_{imnj} + C_{injm} = 0$, то это приводит к тому, что блоки X и Y являются симметрическими матрицами с нулевыми следами.

Обозначим 2-е слагаемое в правой части равенства (34) за Q_{ijmn}. В подробной записи оно имеет вид

$$Q_{ijmn} = \frac{1}{2}\left(\eta_{im}b_{[jn]} + \eta_{jn}b_{[im]} - \eta_{in}b_{[jm]} - \eta_{jm}b_{[in]}\right). \tag{36}$$

Из этой формулы легко усмотреть, что $Q_{ijmn} = -Q_{mnij}$. Это равносильно кососимметричности блоков U и V. Для этих блоков легко указать их явный вид (см. формулу (16)):

$$\begin{gathered} U = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}b_{[23]} & \frac{1}{2}b_{[42]} \\ \frac{1}{2}b_{[23]} & 0 & -\frac{1}{2}b_{[34]} \\ -\frac{1}{2}b_{[42]} & \frac{1}{2}b_{[34]} & 0 \end{pmatrix}, \\ V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}b_{[14]} & -\frac{1}{2}b_{[13]} \\ -\frac{1}{2}b_{[14]} & 0 & \frac{1}{2}b_{[12]} \\ \frac{1}{2}b_{[13]} & -\frac{1}{2}b_{[12]} & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{37}$$

Так как все матрицы, стоящие в правой части равенств (35), имеют нулевые следы, то матрицы M и N тоже имеют нулевые следы. Итак, равенства (35) представляют собой разложение левых частей на симметрическую и кососимметрическую составляющие, а матрицы $\begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} U & V \\ V & -U \end{pmatrix}$ являются симметрической и кососимметрической частями матрицы $\begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}$.

2.2. Обобщенное конформное многообразие Эйнштейна

Перейдем теперь к отысканию разложения тензора Φ_{ijmn} на равнодуальные неприводимые слагаемые в обобщенном конформном многообразии Эйнштейна. Для этого в формулу (19) подставим вместо R_{mn} его выражение из обобщенных уравнений Эйнштейна (27) $R_{mn} = b_{(mn)} + \frac{1}{4}R\eta_{mn} - \frac{1}{2}b\eta_{mn}$.

Получим $C_{ijmn} = R_{ijmn} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{(mn)} + \frac{1}{24}(R - 6b)\,\eta_{ij} \circ \eta_{mn}$. Теперь отсюда выражаем R_{ijmn}, а для S_{ijmn} берем выражение (24) и подставляем это в (22). В итоге получим

$$\Phi_{ijmn} = C_{ijmn} + Q_{ijmn} - \frac{1}{24}(R - 6b)\,\eta_{ij} \circ \eta_{mn}. \tag{38}$$

Здесь все три слагаемых равнодуальны, конформно инвариантны и неприводимы.

2.3. Многообразие конформной связности без кручения

Из формул (24), (22) и (19) получается формула разложения основного тензора Φ_{ijmn} многообразия конформной связности без кручения на неприводимые инвариантные слагаемые

$$\begin{gathered}\Phi_{ijmn} = C_{ijmn} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ \left(b_{(mn)} - \frac{1}{2}b\eta_{mn} - R_{mn} + \frac{1}{4}R\eta_{mn}\right) + \\ + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[mn]} - \frac{1}{24}(R - 6b)\,\eta_{ij} \circ \eta_{mn}.\end{gathered} \tag{39}$$

В этом разложении только 2-е слагаемое не является равнодуальным. Учитывая формулу $\eta^{in}(\eta_{ij} \circ a_{mn}) = -2a_{jm} - a\eta_{jm},\ a = \eta^{in}a_{in}$, и то, что $\eta^{in}C_{ijmn} = 0$, путем свертки (39) с η^{in} получим другое инвариантное неприводимое разложение

$$\Phi_{jm} = \left(-b_{(jm)} + R_{jm} + \frac{1}{2}b\eta_{jm} - \frac{1}{4}R\eta_{jm}\right) - b_{[jm]} + \frac{1}{4}(R - 6b)\,\eta_{jm}.$$

Здесь первое слагаемое есть бесследовая симметрическая часть тензора Φ_{jm}, второе слагаемое — его кососимметрическая часть, третье слагаемое — скалярная часть.

3. Обобщение алгебраической классификации А.З.Петрова на конформные и обобщенные конформные многообразия Эйнштейна

В векторном пространстве внешних 2-форм четырехмерного многообразия конформной связности имеется метрический тензор

$$\eta_{ijmn} = \eta_{im}\eta_{jn} - \eta_{in}\eta_{jm} = \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ \eta_{mn}, \tag{40}$$

матрица которого в собирательных индексах имеет блочный вид $\begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица 3-го порядка. Если на этом многообразии имеется равнодуальный тензор a_{ijmn}, то для его матрицы, записанной, согласно (14), в собирательных индексах $\begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}$, можно составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} M + \lambda E & N \\ N & -M - \lambda E \end{vmatrix} = 0.$$

Теми же элементарными преобразованиями, как в [5, с. 112], приведем это уравнение к виду

$$\begin{vmatrix} M+iN+\lambda E & 0 \\ 0 & M-iN+\lambda E \end{vmatrix} = 0,$$

где i — мнимая единица. Не играет роли, что в [5] матрицы M и N были симметричными, а в нашем случае нет. Поскольку матричные блоки $M+iN+\lambda E$ и $M-iN+\lambda E$ комплексно сопряжены, достаточно исследовать лишь канонические виды одного блока. Как известно, λ-матрица $M+iN+\lambda E$ 3-го порядка может иметь 6 канонических видов, которым присвоены обозначения I, D, O, II, N, III. Первые три вида образуют тип T_1, характеризующийся наличием трех линейно независимых комплексных собственных векторов у матрицы $M+iN$. У подтипа I все три собственных числа различны, у подтипа D одно из собственных чисел имеет кратность 2, у подтипа O есть только одно собственное число кратности 3. Следующие два вида II и N образуют тип T_2, характеризующийся наличием двух линейно независимых собственных векторов. У подтипа II одно из двух собственных чисел имеет кратность 2, у подтипа N имеется лишь одно собственное число кратности 3. Третий тип T_3 состоит лишь из одного собственного вектора и одного собственного числа кратности 3. Подробно об этом см. [1, с. 167–168]. Каждое собственное число является инвариантом. Поэтому максимально возможное число вещественных инвариантов, которое может дать равнодуальный тензор, равно 6. Если след матрицы $M+iN$ равен нулю, то число комплексных инвариантов будет 2 для подтипа I, 1 — для подтипов D и II, 0 — для подтипов O, N, III.

В случае конформного многообразия Эйнштейна, как показано выше, имеются три равнодуальных тензора Φ_{ijmn}, C_{ijmn} и $Q_{ijmn} = \dfrac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[mn]}$, связанные соотношением (34). (На самом деле это тензорные плотности веса $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, а их собственные числа являются скалярными плотностями веса $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, но мы для краткости называем их тензорами, а алгебраические комбинации их собственных чисел — инвариантами.) Конформные многообразия Эйнштейна можно классифицировать по подтипам каждого из этих равнодуальных тензоров. Каждый из первых двух тензоров может иметь любой из указанных 6 подтипов, причем подтипы этих тензоров могут быть неодинаковыми.

Для третьего тензора Q_{ijmn}, отвечающая ему в собирательных индексах матрица $U+iV$ кососимметрична, поэтому λ-матрица $U+iV+\lambda E$ может иметь только два подтипа: I и III (см. [1, с. 191]).

Для подтипа I имеется один комплексный инвариант J, который легко вычисляется из вида (37) матриц U и V $J = \dfrac{1}{4}\left(\left(b_{[12]}\right)^2 + \left(b_{[13]}\right)^2 + \left(b_{[14]}\right)^2 - \left(b_{[23]}\right)^2 - \left(b_{[42]}\right)^2 - \left(b_{[34]}\right)^2\right) + \dfrac{i}{2}\left(b_{[12]}b_{[34]} + b_{[13]}b_{[42]} + b_{[14]}b_{[23]}\right) \overset{def}{=} J_1 + 2iJ_2$, а характеристическое уравнение для нее $|U+iV+\lambda E| = 0$ имеет вид $\lambda\left(\lambda^2 - J\right) = 0$. Подтип III получается при $J=0$.

Формула (36) показывает, что тензор Q_{ijmn} зависит только от $b_{[ij]}$, поэтому последняя классификация фактически основывается на тензоре $b_{[ij]}$. Более детальная классификация возникает, если вместо λ-матрицы $U+iV+\lambda E$ проклассифицировать вещественную λ-матрицу $\left(\dfrac{1}{2}b_{[ij]} - \lambda\eta_{ij}\right)$. Ее канонические формы указаны в [1, с. 207]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 - J_1\lambda^2 - (J_2)^2 \end{pmatrix} \text{ при } J_2 \neq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\left(\lambda^2 - J\right) \end{pmatrix} \text{ при } J_2 = 0.$$

При $J_1 \neq 0$ обе формы характеризуются наличием четырех линейно независимых комплексных собственных векторов, а при $J_1 = J_2 = 0$ первая форма невозможна, а вторая характеризуется наличием двух линейно независимых собственных векторов. Итак, классификация λ-матрицы $U + iV + \lambda E$ дает лишь две возможности, а классификация матрицы $\left(\frac{1}{2} b_{[ij]} - \lambda \eta_{ij}\right)$ — три, при этом вещественные инварианты одни и те же: J_1 и J_2. Однако это различие кажущееся. Достаточно для λ-матрицы $U+iV+\lambda E$ считать за различные два подтипа типа I, в первом из которых ненулевые собственные числа комплексные, а во втором — вещественные. Этим будет достигнуто полное соответствие между тремя возможностями обеих классификаций.

Итак, при $b_{[ij]} \neq 0$ число возможных видов конформных многообразий Эйнштейна велико, но не более $6 \times 6 \times 3 = 108$. Число вещественных инвариантов тоже значительно больше, чем в псевдоримановом многообразии Эйнштейна, а именно, максимальное число скалярных плотностей равно $4 + 4 + 2 = 10$, следовательно, инвариантов 9. (В псевдоримановом многообразии Эйнштейна число инвариантов $\leqslant 4$.)

В случае $b_{[ij]} = 0$ (т.е. при $\Phi_0^0 = 0$) многообразие конформной связности без кручения названо Картаном *нормальным* [6, с. 175]. При выполнении на каждой карте некоторого атласа уравнений Эйнштейна (2) будем называть его *нормальным многообразием Эйнштейна.* В статье [7] применяется термин "нормальная конформная связность Картана". Наш термин "нормальное многообразие Эйнштейна" эквивалентен понятию конформного многообразия с нормальной конформной связностью Картана.

Классификация нормальных многообразий Эйнштейна упрощается и сводится лишь к шести подтипам λ-матрицы $X + iY + \lambda E$, отвечающей в собирательных индексах тензору Вейля C_{ijmn}. Геометрия нормальных многообразий Эйнштейна полностью определяется заданием на каждой карте некоторого атласа квадратичной формы угловой метрики (6). При этом в точках пересечения двух карт квадратичные формы этих карт будут отличаться множителем. Для двух пересекающихся карт этот множитель можно свести к единице путем комбинированного калибровочного преобразования перенормировки и преобразования нормализации, но для трех попарно пересекающихся локальных карт этого сделать уже нельзя. Единого метрического тензора на всем нормальном многообразии Эйнштейна в общем случае не существует. Обсуждаемая в данном пункте классификация многообразий конформной связности по подтипам равнодуального тензора имеет локальный характер, так как в разных областях нормального многообразия Эйнштейна тензор Вейля может иметь разные подтипы.

Что касается обобщенных конформных многообразий Эйнштейна, то последний член в правой части равенства (38) можно в силу (40) и (29) записать в виде $-\frac{1}{12} F \eta_{ijmn}$, т.е. он лишь множителем отличается от метрического тензора η_{ijmn}. Если к матрице линейного оператора прибавить скалярную матрицу, то новая матрица имеет ту же каноническую структуру, что и старая. Поэтому классификации, основанные на разложениях (38) и (34), одинаковы.

Аналогична ситуация в псевдоримановых многообразиях. Так как при выполнении уравнений (7) в римановом многообразии тензоры римановой кривизны и конформной кривизны связаны соотношением $C_{ijmn} = R_{ijmn} + \frac{1}{12} R \eta_{ijmn}$, то каноническая структура тензоров C_{ijmn} и R_{ijmn} в этом случае одинакова. Следовательно, можно обойтись лишь классификацией Петрова общих псевдоримановых многообразий по 6 подтипам тензора Вейля C_{ijmn}, т.е. в случае выполнения условия (7) нет необходимости привлекать для этой цели тензор Римана R_{ijmn}.

Если в обобщенном конформном многообразии Эйнштейна на каждой карте некоторого атласа выполняется условие $b_{[ij]}=0$, то такое многообразие мы будем называть *обобщенным нормальным многообразием Эйнштейна.* В этом случае формула (38) примет вид $\Phi_{ijmn} = C_{ijmn} - \dfrac{1}{12} F \eta_{ijmn}$.

Отсюда тензоры Φ_{ijmn} и C_{ijmn} имеют одну и ту же каноническую структуру, поэтому вся классификация исчерпывается шестью подтипами Петрова тензора Вейля C_{ijmn}. Но для задания обобщенного нормального многообразия Эйнштейна нужно на каждой карте некоторого атласа кроме квадратичной формы угловой метрики задать еще скалярную плотность F веса $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Вариационное обоснование уравнений Эйнштейна и Максвелла в пространстве конформной связности без кручения

Уравнения (27) возникли у нас естественным путем как условия равнодуальности для тензора Φ_{ijmn}. Но как быть с уравнениями (2)? Пока они появились у нас как часть уравнений Янга-Миллса. Уравнения Янга-Миллса на многообразии конформной связности **с кручением** тоже естественны, т.к. они являются уравнениями экстремалей единственно возможного функционала действия — функционала Янга-Миллса

$$I = \int tr \ \ (*\Phi \wedge \Phi) \tag{41}$$

(см. [6]). Но на многообразии конформной связности **без кручения** имеется большой выбор возможностей для функционала действия, т.к. из конформной инвариантности внешней 2-формы Φ^0_0 и основного аффинора Φ^i_j вытекает конформная инвариантность следующих внешних 4-форм: $\Phi^0_0 \wedge \Phi^0_0, \qquad *\Phi^0_0 \wedge \Phi^0_0, \qquad \Phi^i_j \wedge \Phi^j_i, \qquad *\Phi^i_j \wedge \Phi^j_i, tr \ \ (*\Phi \wedge \Phi) = 2 * \Phi^0_0 \wedge \Phi^0_0 + *\Phi^i_j \wedge \Phi^j_i$.

Кроме того, инвариантное разложение (39) дает еще несколько инвариантных 4-форм.

Но мы все же примем за функционал действия функционал Янга-Миллса (41). В [8] вычислена его вариация

$$\delta I = 2 \int tr \ \ (\delta\Omega \wedge D * \Phi)\,, \tag{42}$$

где $D * \Phi = d * \Phi + \Omega \wedge *\Phi - *\Phi \wedge \Omega$.

Допустим, что вариации подвергаются не все компоненты матрицы связности (5), а только пфаффовы формы ω_i. Тогда формула (42) примет вид

$$\delta I = 4 \int \left(\delta\omega_i \wedge D * \Phi^i\right).$$

Поэтому равенство $\delta I = 0$ равносильно $D * \Phi^i = 0$. Но на многообразии конформной связности без кручения имеют место равенства $D * \Phi^i = *\Phi^0_0 \wedge \omega^i - *\Phi^i_j \wedge \omega^j$, следовательно, $*\Phi^0_0 \wedge \omega^i - *\Phi^i_j \wedge \omega^j = 0$.

Как показано в [2], последние уравнения равносильны уравнениям $\Phi_{jm} + b_{[jm]} = 0$, которые, в свою очередь, как показано в разделе 1 данной статьи, представляют собой другую форму записи уравнений Эйнштейна (2). Вариации пфаффовых форм ω_i, совместимые с алгебраической структурой матрицы связности (5), могут быть описаны в конечном виде через 4 параметра λ_i:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\omega_0^0} = \omega_0^0 - \lambda_k\omega^k,\\
&\widetilde{\omega^i} = \omega^i,\\
&\widetilde{\omega_i^j} = \omega_i^j + \lambda_i\omega^j - \eta^{mj}\lambda_m\eta_{ik}\omega^k,\\
&\widetilde{\omega_i} = \omega_i + d\lambda_i - \lambda_k\omega_i^k + \lambda_i\omega_0^0 - \lambda_i\lambda_k\omega^k + \frac{1}{2}\eta^{mn}\lambda_m\lambda_n\eta_{ik}\omega^k.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Эти преобразования мы назвали в [2] *преобразованиями нормализации.* Обоснование этого термина будет дано в следующем разделе. В данной точке многообразия выполняются равенства $\omega^i = 0$. Поэтому эти формулы примут вид $\delta\omega_0^0 = 0,\ \delta\omega^i = 0, \delta\omega_i^j = 0,\ \delta\omega_i = d\lambda_i$.

Итак, преобразование нормализации в данной точке многообразия действительно дает лишь вариации пфаффовых форм ω_i, оставляя остальные компоненты матрицы связности неизменными. **Таким образом, природа уравнений Эйнштейна (2) связана с наличием калибровочной группы преобразований нормализации.**

Если из всех компонент матрицы связности Ω подвергнуть вариации только одну пфаффову форму ω_0^0, то формула (42) примет вид

$$\delta I = 4\int\left(\delta\omega_0^0 \wedge D * \Phi_0^0\right).$$

Поэтому равенство $\delta I = 0$ равносильно равенству $D * \Phi_0^0 = 0$. Записывая это уравнение и тождество Бианки $D\Phi_0^0 = 0$ через обычный дифференциал вместо ковариантного, приходим к системе уравнений Максвелла

$$
\begin{aligned}
d\Phi_0^0 - \Phi_i \wedge \omega^i = 0,\\
d * \Phi_0^0 - *\Phi_i \wedge \omega^i = 0
\end{aligned}
\tag{44}
$$

в форме, которая нужна была Дираку в его работе о магнитном монополе [9, с. 255-283]. (Для существования монополя необходимо, чтобы было $d\Phi_0^0 \neq 0$, а в обычных уравнениях Максвелла $d\Phi_0^0 = 0$.) Вариации пфаффовой формы ω_0^0, совместимые с алгебраической структурой матрицы связности (5), могут быть заданы в конечном виде с помощью одного параметра λ:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\omega_0^0} = \omega_0^0 + \frac{d\lambda}{\lambda}, \qquad \widetilde{\omega^i} = \lambda\omega^i,\\
&\widetilde{\omega_i} = \frac{1}{\lambda}\omega_i, \qquad \widetilde{\omega_i^j} = \omega_i^j.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Такое преобразование мы называем *преобразованием перенормировки.* В данной точке многообразия $\omega^i = 0$, и потому $\delta\omega_0^0 = \dfrac{d\lambda}{\lambda},\ \delta\omega^i = \delta\omega_i^j = \delta\omega_i = 0$, т.е. преобразование перенормировки в данной точке многообразия действительно приводит лишь к вариации одной пфаффовой формы ω_0^0, оставляя остальные элементы матрицы связности Ω неизменными. **Таким образом, природа обобщенных уравнений Максвелла (44) связана с существованием калибровочной группы преобразований перенормировки.**

Пусть теперь из всех компонент матрицы связности вариации подвергаются только пфаффовы формы ω_i^j. Тогда формула (42) принимает вид

$$\delta I = 2\int\left(\delta\omega_j^i \wedge D * \Phi_i^j\right).$$

Поэтому равенство $\delta I = 0$ равносильно равенствам

$$D * \Phi_j^i = \nabla * \Phi_j^i + \omega^i \wedge *\Phi_j - \eta_{jn}\eta^{im} * \Phi_m \wedge \omega^n = 0. \tag{46}$$

Вариации пфаффовых форм ω_i^j, совместимые с алгебраической структурой матрицы связности, могут быть заданы в конечном виде:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\omega_0^0}=\omega_0^0, \qquad \widetilde{\omega^i}=\lambda_k^i\omega^k, \qquad \widetilde{\omega_i}=\overline{\lambda_i^k}\omega_k,\\ &\widetilde{\omega_i^j}=\overline{\lambda_i^k}d\lambda_k^j+\overline{\lambda_i^k}\omega_k^m\lambda_m^j,\end{aligned} \tag{47}$$

где λ_k^i — компоненты матрицы лоренцевых преобразований, $\overline{\lambda_i^k}$ — компоненты обратной матрицы (см. [6]). Преобразования (43), (45) и (47) образуют общую калибровочную группу, т.е. группу стационарности многообразия конформной связности. Экстремали общей калибровочной группы удовлетворяют одновременно уравнениям (2), (44) и (46). Но, как показано в [2], эта система уравнений равносильна системе уравнений Эйнштейна (2) и обычным уравнениям Максвелла $d\Phi_0^0=0$, $d*\Phi_0^0=0$.

А что будет, если мы к уравнениям (44) и (46) вместо уравнений Эйнштейна (2) присоединим обобщенные уравнения Эйнштейна (27)? В этом случае возьмем от обеих частей (27) ковариантную производную по k: $R_{ij|k}-\dfrac{1}{4}R_{|k}\eta_{ij}=b_{(ij)|k}-\dfrac{1}{2}b_{|k}\eta_{ij}$.

Свертывая это равенство с η^{ik} и пользуясь известным тождеством $\eta^{ik}R_{ij|k}=\dfrac{1}{2}R_{|j}$, получим

$$\eta^{ik}b_{(ij)|k}=\frac{1}{4}R_{|j}+\frac{1}{2}b_{|j}. \tag{48}$$

Как показано в [2], из уравнений (44) и (46) вытекает $d\Phi_0^0=0$, $d*\Phi_0^0=0$, поэтому второе уравнение (44) сводится к $*\Phi_i\wedge\omega^i=0$.

Записывая это уравнение в компонентах, получим (см. [2], формула 47)

$$\left(b_{|j}-\frac{1}{2}\eta^{ik}b_{(ij)|k}\right)-\frac{1}{2}\eta^{ik}b_{[ij]|k}=0.$$

Но последнее слагаемое — это утроенные компоненты внешней 2-формы $d*\Phi_0^0$, поэтому они равны нулю. Выражение в скобках в силу (48) имеет вид $\left(-\dfrac{1}{8}F_{|j}\right)$, поэтому $F_{|j}=0$, т.е. $F=const$.

Итак, система уравнений (27), (44) и (46) сводится к системе из обычных уравнений Максвелла $d\Phi_0^0=0$, $d*\Phi_0^0=0$ и обобщенному уравнению Эйнштейна в форме (32), где Λ — уже настоящая глобальная космологическая константа. В случае $\Lambda\neq 0$ уравнения Янга-Миллса выполняться не могут.

5. Геометрический смысл преобразований нормализации и перенормировки

Задание матрицы связности (5) на каждой карте некоторого атласа определяет всю структуру многообразия конформной связности M, и любой результат может быть выражен через эту матрицу и вычисляемую из нее матрицу кривизны Φ. Поэтому нет никакой логической необходимости в применении каких-либо дополнительных конструкций. Однако развитию нашей интуиции значительно больше благоприятствует представление многообразия конформной связности размерности n в виде базы расслоенного пространства, если взять в качестве слоя $(n+1)$-мерное проективное пространство с фиксированной в нем квадрикой (как это делал Картан в [6]). В нашем случае, когда $n=4$ и мы желаем, чтобы угловая метрика (6) имела сигнатуру $(-+++)$, эта квадрика в проективных координатах должна записываться в виде

$$(X,X)=-(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2+(x_4)^2+2x_0x_5=0. \tag{49}$$

Здесь $X = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ — точка 5-мерного проективного пространства, а символом (X, Y) обозначено скалярное произведение, порождаемое билинейной формой, полярной квадрике (49):

$$(X, Y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_0y_5 + x_5y_0.$$

Данную точку многообразия M мы считаем совпадающей с точкой $X_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ квадрики (49). Кроме того, проективную касательную плоскость к квадрике (49) в точке X_0 мы считаем за касательную плоскость многообразия M. Выберем в каждой точке квадрики (49) проективный репер $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ и потребуем, чтобы он удовлетворял условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} (X_0, X_0) = (X_5, X_5) = 0, \qquad (X_0, X_5) = 1, \\ (X_0, X_i) = (X_5, X_i) = 0, \qquad (X_i, X_j) = \eta_{ij}, \end{aligned} \tag{50}$$

$i, j = 1, 2, 3, 4$. Уравнения инфинитезимальных перемещений этого репера в проективном пространстве имеют вид

$$\begin{aligned} dX_0 &= X_0\sigma_0^0 + X_i\sigma^i + X_5\sigma_0^5, \\ dX_i &= X_0\sigma_i + X_k\sigma_i^k + X_5\sigma_i^5, \\ dX_5 &= X_0\sigma_5^0 + X_i\sigma_5^i + X_5\sigma_5^5. \end{aligned} \tag{51}$$

Условия ортогональности (50) приводят к следующим соотношениям между инфинитезимальными коэффициентами: $\sigma_0^0 + \sigma_5^5 = 0$, $\sigma_5^0 = \sigma_0^5 = 0$, $\sigma_i^5 + \eta_{ij}\sigma^j = 0$, $\sigma_5^j\eta_{ij} + \sigma_i = 0$, $\sigma_i^j\eta_{jk} + \sigma_k^j\eta_{ij} = 0$. Это как раз те алгебраические соотношения, которые имеют место в матрице связности (5).

Система уравнений (51) в проективных координатах вполне интегрируема, но если мы подставим вместо инфинитезимальных коэффициентов элементы матрицы связности (5), то полученная система уравнений

$$\begin{aligned} dX_0 &= X_0\omega_0^0 + X_i\omega^i, \\ dX_i &= X_0\omega_i + X_k\omega_i^k - X_5\eta_{ij}\omega^j, \\ dX_5 &= -X_i\eta^{ij}\omega_j - X_5\omega_0^0 \end{aligned} \tag{52}$$

уже не будет вполне интегрируемой. Она будет описывать инфинитезимальный закон перемещения сопутствующего репера из проективного слоя вдоль многообразия M.

Касательная проективная четырехмерная плоскость, задаваемая точками X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, одна и та же и для квадрики (49), и для многообразия M. 3-мерная проективная плоскость, определяемая точками X_1, X_2, X_3, X_4, лежащая в касательной плоскости и не содержащая точку X_0, называется, согласно А.П.Нордену, *нормалью 2-го рода*, а прямая X_0X_5 — *нормалью 1-го рода*. Поверхность проективного пространства называется *нормализованной*, если в каждой точке выбраны нормали 1-го и 2-го рода [10, с. 198]. Для квадрики (49) нормализация достигается лишь выбором нормали 2-го рода, т.к. из условий ортогональности (50) выбор точки X_5 однозначно определен выбором нормали 2-го рода.

Если плоскость $\widetilde{X_1}\widetilde{X_2}\widetilde{X_3}\widetilde{X_4}$ является другой нормалью 2-го рода, то точки $\widetilde{X_i}$ на этой плоскости можно задать в виде

$$\widetilde{X_i} = X_i + \lambda_i X_0. \tag{53}$$

Но при этом из условий ортогональности однозначно определится и точка $\widetilde{X_5}$:

$$\widetilde{X_5} = X_5 - \eta^{ij}\lambda_j X_i - \frac{1}{2}\eta^{ij}\lambda_i\lambda_j X_0. \tag{54}$$

Формулы перехода (53) и (54) от нормализации, определяемой точками X_i, к нормализации, определяемой точками $\widetilde{X_i}$, мы называем *преобразованием нормализации*. Из уравнений инфинитезимальных перемещений (52) легко увидеть, что формулы (53) и (54) равносильны формулам (43).

Точка в проективном пространстве определяется своими проективными координатами с точностью до множителя. Если мы сделаем замену

$$\widetilde{X_0} = \lambda X_0, \tag{55}$$

то точки X_0 и $\widetilde{X_0}$ есть одно и то же. Но для сохранения условия ортогональности $(X_0, X_5) = 1$ необходимо положить

$$\widetilde{X_5} = \frac{1}{\lambda} X_5. \tag{56}$$

Формулы (55) и (56) мы называем *преобразованием перенормировки.* Из уравнений (52) легко проверить, что эти формулы эквивалентны формулам (45).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 09-01-00717).

Список литературы

[1] Ю.С.Владимиров, Геометрофизика, М., БИНОМ, 2010.

[2] Л.Н.Кривоносов, В.А.Лукьянов, Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла, *Журнал СФУ. Математика и физика*, **2**(2009), № 4, 432–448.

[3] C.N.Kozameh, E.T.Newman, K.P.Tod, Conformal Einstein Spaces, *Gen. Rel. Grav.*, **17**(1985), 343.

[4] А.Бессе, Многообразия Эйнштейна, т. I, М., Мир, 1990.

[5] А.З.Петров, Новые методы в общей теории относительности, М., Наука, 1966.

[6] Э.Картан, Пространства аффинной, проективной и конформной связности, Издательство Казанского университета, 1962.

[7] M.Korzynski, J.Lewandowski, The Normal Conformal Cartan Connection and the Bach Tensor, *Class. Quant. Grav.*, **20**(2003), 3745-3764.

[8] В.А.Лукьянов, Уравнения Янга–Миллса на 4-мерных многообразиях конформной связности, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, №3, 67–72.

[9] П.А.М.Дирак, К созданию квантовой теории поля, М., Наука, 1990.

[10] А.П.Норден, Пространства аффинной связности, М.-Л., 1950.

Einstein's Equations on a 4-manifold of Conformal Torsion-Free Connection.

Leonid N. Krivonosov
Vyacheslav A. Luk'yanov

The main defect of Einstein equations — non geometrical right part — is eliminated. The key concept of equidual tensor is introduced. It appeared to be in a close relation both with Einstein's equations, and with Yang-Mills equations. The criterion of equidual basic affinor of conformal connection manifold without torsion is received. Decomposition of the basic affinor into a sum of equidual, conformally invariant and irreducible summands is found. A.Z.Petrov's algebraic classification is generalized. Einstein equations are given a new variational foundation and their geometrical nature is found. Geometric sense of acceleration and dilatation gauge transformations is specified.

Keywords: Einstein equations, Yang-Mills equations, Hodge operator, Maxwell's equations, manifold of conformal connection with torsion and without torsion.