УДК 517.55

Некоторые множества комплексных прямых минимальной размерности, достаточные для голоморфного продолжения интегрируемых функций

Байрамбай П. Отемуратов*
Каракалпакский государственный университет,
Ч. Абдирова, 1, Нукус, 141700,
Узбекистан

Получена 18.05.2011, окончательный вариант 25.09.2011, принята к печати 10.10.2011

Эта работа содержит некоторые результаты, связанные с голоморфным продолжением функций f, заданных на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в эту область. Речь пойдет об интегрируемых функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых.

Ключевые слова: голоморфное продолжение, интегрируемые функции, интеграл Бохнера-Мартинелли.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны. Поэтому наши результаты существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, был получен М.Л.Аграновским и Р.Е.Вальским в [1], изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Е.Л.Стаутом в [2], использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского была перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено А.М.Кытмановым в [3, 4], применившим интеграл Бохнера–Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера–Мартинелли, Коши–Фантаппье, логарифмического вычета) оказалась полезной при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения (см. обзор [5]).

Вопрос о нахождении различных семейств комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения, был поставлен в [6]. Ясно, что семейство комплексных прямых, проходящих через одну точку, не является достаточным. Как показано в [7], семейство всех комплексных прямых, проходящих через конечное число точек, также, вообще говоря, достаточно. Таким образом, простых аналогов теоремы Гартогса ожидать не следует.

В работе [7] доказано, что семейство комплексных прямых, пересекающее росток порождающего многообразия γ, является достаточным для голоморфного продолжения.

В работе рассмотрены семейства комплекных прямых, проходящих через росток комплексной гиперповерхности, росток порождающего многообразия на комплексной гиперповерхности.

Рассмотрим ограниченную односвязную область $D \subset \mathbb{C}^n$ со связной границей ∂D класса $\mathcal{C}^2$. Точки пространства $\mathbb{C}^n$ будем обозначать через $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ и т.д. Для точек $z, w \in \mathbb{C}^n$ введем соответственно скалярное произведение и модуль

$$\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k w_k, \qquad |z| = \sqrt{\langle z, \bar{z}\rangle}.$$

*bayram_utemuratov@gmail.com

Пусть $\mathit{\Gamma}$ — росток комплексного многообразия размерности $(n-1)$ в $\mathbb{C}^n$, лежащий вне $\overline{D}$. Делая сдвиг и унитарное преобразование, можно считать $0 \in \mathit{\Gamma}$, $0 \notin \overline{D}$, и в некоторой окрестности U точки 0 комплексная гиперповерхность $\mathit{\Gamma}$ имеет вид

$$\mathit{\Gamma} = \{z \in U : \ z_n = \varphi(z'), \ z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})\},$$

где φ — голоморфная функция в окрестности нуля в $\mathbb{C}^{n-1}$ и $\varphi(0) = 0$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_k}(0) = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$.

В дальнейшем будем считать, что существует направление $b^0 \neq 0$ такое, что

$$\langle b^0, \bar{\zeta} \rangle \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \zeta \in \overline{D}. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_{\mathit{\Gamma}}$ множество комплексных прямых вида

$$l = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \ \zeta_j = z_j + b_j t, \ j = 1, \ldots, n, \ t \in \mathbb{C}\}, \tag{2}$$

проходящее через точку $z \in \mathit{\Gamma}$ в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ (направление b определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda \neq 0$).

По теореме Сарда для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и для фиксированного $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ пересечение $l \cap \partial D$ представляет собой набор конечного числа кусочно-гладких кривых (за исключением вырожденного случая, когда $\partial D \cap l = \varnothing$).

Известно, что если $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$, $p \geqslant 1$, то для почти всех $z \in D$ и почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D \cap l)$ (см. [8]).

Будем говорить, что функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых $l \in \mathfrak{L}_{\mathit{\Gamma}}$ вида (2), если для любой прямой l такой, что $\partial D \cap l \neq \varnothing$ и состоит из конечного числа гладких кривых, существует функция f_l со следующими свойствами:

1) $f_l \in \mathcal{H}^p(D \cap l)$ (т.е. f_l принадлежит классу $\mathcal{H}^p$ в каждой связной компоненте множества $(D \cap l)$),

2) нормальные граничные значения функции f_l совпадают с f на множестве $\partial D \cap l$ почти всюду.

Рассмотрим ядро Бохнера-Мартинелли

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} \, d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar{\zeta}[k]$ получается из $d\bar{\zeta}$ выбрасыванием дифференциала $d\bar{\zeta}_k$.

Для функции $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$ определим интеграл Бохнера-Мартинелли следующим образом:

$$F(z) = \int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta) U(\zeta, z), \qquad z \notin \partial D. \tag{3}$$

Функция $F(z)$ является гармонической вне границы области и стремится к нулю при $|z| \to \infty$.

Сформулируем лемму 3 из работы [9].

Лемма 1 ([9]). *Если для точки $z^0 \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и для почти всех комплексных прямых, проходящих через точку z^0, функция $f(z)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения, то $F(z^0) = 0$ и ее производные по z любого порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*

$$\frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}(z^0) = \frac{\partial^{\|\alpha\|} F}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}(z^0) = 0,$$

где $\|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Таким образом, из леммы 1 получаем утверждение.

Предложение 1. *Если функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$, $p \geqslant 1$, обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\Gamma$, то для любого мультииндекса α выполняется*

$$F\Big|_\Gamma = 0, \qquad \frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}\Big|_\Gamma = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим ядро вида

$$U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - w_k}{\Big(\sum\limits_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\Big)^n} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta$$

и интеграл

$$\varPhi(z, w) = \int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta) U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w). \tag{5}$$

Ясно, что функция $\varPhi(z,w)$ является голоморфной в окрестности точки $(0,0) \in \mathbb{C}^{2n}$, поскольку $0 \notin \overline{D}$.

Приведем лемму 2 из [10].

Лемма 2 ([10]). *Пусть область D односвязна и удовлетворяет условию (1), тогда существует неограниченное открытое и связное множество $\varOmega \subset \mathbb{C}^{2n}$, $(0,0) \in \varOmega$, в котором функция $\varPhi(z,w)$ определена и голоморфна, а также существуют $\varepsilon > 0$, $R > 0$ такие, что точки вида (tb, w), $t \in \mathbb{C}$, принадлежат $\varOmega$ при $|w| < \varepsilon$, $|b - b^0| < \varepsilon$ и $|t| > R$.*

Тогда из леммы 2 и вида ядра $U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w)$ следует, что функция $\varPhi(z,w)$ и все ее производные стремятся к нулю при $|z| \to \infty$, $|w| \to \infty$ и $(z,w) \in \Omega$.

Отметим, что $\varPhi(z, \bar{z}) = F(z)$ и $\dfrac{\partial^\alpha \varPhi}{\partial z^\alpha}\Big|_{w=\bar{z}} = \dfrac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}$.

Введем дифференциальный оператор в $\mathbb{C}^{2n}$:

$$\Delta_{\mathbb{C}} = \Delta_{\mathbb{C}}(z,w) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial w_k}.$$

При $w = \bar{z}$ получим оператор Лапласа: $\Delta = \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}$.

Обозначим через $\varGamma_{\mathbb{C}}$ комплексное многообразие в $\mathbb{C}^{2n}$ вида

$$\varGamma_{\mathbb{C}} = \{(z,w) \in U \times U: \; z_n = \varphi(z'), \; w_n = \overline{\varphi(\bar{w}')}\}.$$

Выбирая U достаточно малой, можно считать, что функция $\varPhi(z,w)$ определена и голоморфна в $U \times U$.

При $w = \bar{z}$ получим, что $\varGamma_{\mathbb{C}} = \varGamma$ или $\varGamma_{\mathbb{C}}\Big|_{w=\bar{z}} = \varGamma$.

По предложению 2 и по лемме 3 из ([10]) для всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ справедливы равенства

$$\varPhi\Big|_{\varGamma_{\mathbb{C}}} = 0, \qquad \frac{\partial^\alpha \varPhi}{\partial z^\alpha}\Big|_{\varGamma_{\mathbb{C}}} = 0, \tag{6}$$

и ядро $U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w)$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta_{\mathbb{C}}(z,w) U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w) = 0$$

вне нулей знаменателя этого ядра. Тогда верны следующие утверждения.

Лемма 3. *Функция $\varPhi(z,w)$ в своей области определения удовлетворяет равенству $\Delta_{\mathbb{C}}\varPhi(z,w)=0$.*

Лемма 4. *Для дважды гладких функций h и g в $\mathbb{C}^{2n}$ справедливо соотношение*

$$\Delta_{\mathbb{C}}(h\cdot g)=h\Delta_{\mathbb{C}}g+g\Delta_{\mathbb{C}}h+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial z_k}\frac{\partial g}{\partial w_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial w_k}\frac{\partial g}{\partial z_k}.$$

Сделаем голоморфную замену переменных в окрестности точки $(0,0)\in\mathbb{C}^{2n}$:

$$\begin{cases} z_1=u_1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ z_{n-1}=u_{n-1}\\ z_n=u_n+\varphi(u')\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} w_1=v_1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ w_{n-1}=v_{n-1}\\ w_n=v_n+\overline{\varphi(\bar v')}.\end{cases}$$

Пусть U^* — образ окрестности U при такой замене.

Обратная замена переменных выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} u_1=z_1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ u_{n-1}=z_{n-1}\\ u_n=z_n-\varphi(z')\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} v_1=w_1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ v_{n-1}=w_{n-1}\\ v_n=w_n-\overline{\varphi(\bar w')}.\end{cases}$$

При этой замене $\varGamma_{\mathbb{C}}$ перейдет в часть плоскости

$$\varGamma^*_{\mathbb{C}}=\{(u,v)\in U^*\times U^*:\ u_n=0,\ v_n=0\}.$$

А при $v=\bar u$ плоскость $\varGamma^*_{\mathbb{C}}$ перейдет в часть гиперплоскости

$$\varGamma^*=\{u\in U^*:\ u_n=0\}.$$

Лемма 5. *Пусть $\varPhi^*(u,v)=\varPhi\big(z(u),w(v)\big)$. В условиях предложения 1 выполняются равенства*

$$\varPhi^*\big|_{\varGamma^*_{\mathbb{C}}}=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^\alpha\varPhi^*}{\partial u^\alpha}\Big|_{\varGamma^*_{\mathbb{C}}}=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta'}\varPhi^*}{\partial u^\alpha\partial v^{\beta'}}\Big|_{\varGamma^*_{\mathbb{C}}}=0 \tag{9}$$

для всех мультииндексов α и мультииндексов β' вида $\beta'=(\beta_1,\dots,\beta_{n-1},0)$.

Доказательство. Равенство (7) очевидно. Поскольку производные функции $\varPhi^*$ по переменным u_j, $j=1,\dots,n$, выражаются только через производные функции $\varPhi$ по z_k, $k=1,\dots,n$, то из предложения 1 получаем равенство (8). Из равенств (7), (8) и вида плоскости $\varGamma^*_{\mathbb{C}}$ получаем равенство (9). □

Рассмотрим разложение функции $\varPhi^*(u,v)$ в ряд Тейлора по переменной v_n в точке $v_n=0$

$$\varPhi^*(u,v)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\varPhi^*(u,v',0)}{\partial v_n^k}\,v_n^k. \tag{10}$$

Лемма 6. *Пусть для функции $\varPhi^*(u,v)$ выполнены условия (7)–(9), тогда в ряде (10) коэффициент $\varPhi^*(u,v',0)=0$, и поэтому*

$$\varPhi^*(u,v)=v_n\varPsi(u,v).$$

Доказательство. Разложим функцию $\varPhi^*(u,v)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0,0)$ по переменным u и v:

$$\varPhi^*(u,v)=\sum_{\|\alpha\|\geqslant 0,\ \|\beta\|\geqslant 0} c_{\alpha,\beta}u^\alpha v^\beta,$$

где $u^\alpha=u_1^{\alpha_1}\cdots u_n^{\alpha_n}$, $v^\beta=v_1^{\beta_1}\cdots v_n^{\beta_n}$.

Покажем, что в этом ряде отсутствуют мономы вида $c_{\alpha,\beta'}u^\alpha v^{\beta'}$, где мультииндекс $\beta'=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},0)$. Действительно, если $c_{\alpha,\beta'}\neq 0$, то, применяя к функции $\varPhi^*(u,v)$ дифференциальный оператор $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta'}}{\partial u^\alpha\partial v^{\beta'}}$ и подставляя $u_n=0$, $v_n=0$, получим степенной ряд по переменным u', v' с не равным нулю свободным членом. Это противоречит равенствам (7)–(9). □

Теорема 1. *Пусть функция $\varPhi(z,w)$ удовлетворяет условиям (6), то $\varPhi(z,w)\equiv 0$ в окрестности точки $(0,0)$.*

Доказательство. Перейдем к старым переменным z и w. По лемме 6 получим разложение

$$\varPhi(z,w)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\varPhi^*}{\partial v_n^k}(u,v',0)v_n^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\big(w_n-\overline{\varphi(\bar w')}\big)^k\frac{\partial^k\varPhi}{\partial w_n^k}\big(z,w',\overline{\varphi(\bar w')}\big), \tag{11}$$

поскольку $\dfrac{\partial\varPhi^*}{\partial v_n}=\dfrac{\partial\varPhi}{\partial w_n}$.

Применим к равенству (11) оператор $\Delta_{\mathbb C}$, получим

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\Delta_{\mathbb C}\left[\big(w_n-\overline{\varphi(\bar w')}\big)^k\frac{\partial^k\varPhi}{\partial w_n^k}\big(z,w',\overline{\varphi(\bar w')}\big)\right].$$

После применения оператора $\Delta_{\mathbb C}$ полученный ряд перегруппируем по степеням функций $\big(w_n-\overline{\varphi(\bar w')}\big)^k$. Получим

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}\big(w_n-\overline{\varphi(\bar w')}\big)^k c_k(z,w').$$

В силу единственности разложения в такой ряд все коэффициенты $c_k(z,w')\equiv 0$. Единственность разложения в данный ряд следует из того, что в новых переменных u, v мы получаем степенной ряд по v_n, разложение в который обладает свойством единственности.

Вычислим последовательно $\Delta_{\mathbb C}$ от $\big(w_n-\overline{\varphi(\bar w')}\big)^k\dfrac{\partial^k\varPhi}{\partial w_n^k}$, начиная с $k=1$. Применяя лемму 4, получим

$$\Delta_{\mathbb C}\left[\big(w_n-\overline{\varphi(\bar w')}\big)\cdot\frac{\partial\varPhi}{\partial w_n}\big(z,w',\overline{\varphi(\bar w')}\big)\right]=$$
$$=\big(w_n-\overline{\varphi(\bar w')}\big)\Delta_{\mathbb C}\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial w_n}\right)+\frac{\partial}{\partial z_n}\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial w_n}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial w_k}\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial w_n}\right).$$

Отсюда

$$c_0(z,w')=\left(\frac{\partial}{\partial z_n}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial w_k}\frac{\partial}{\partial z_k}\right)\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial w_n}\right)\equiv 0. \tag{12}$$

Тогда при фиксированном w' производные по направлению

$$s = \left(-\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial w_1}, \ldots, -\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial w_{n-1}}, 1 \right)$$

от функции $\dfrac{\partial\varPhi}{\partial w_n}\big(z, w', \overline{\varphi(\bar{w}')}\big)$ тождественно равны нулю.

Зафиксируем точку $\big(z^0, w'^0, \overline{\varphi(\bar{w}'^0)}\big)$ в области $\varOmega$ из леммы 2 такую, что комплексная прямая

$$\Big\{ z: \ z_j = z_j^0 - \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial w_j} t, \ j = 1, \ldots, n-1, \ z_n = z_n^0 + t, \ t \in \mathbb{C} \Big\}$$

не пересекала $\overline{D}$ при $|w|$, достаточно малом. Этого можно добиться, взяв $|z^0|$ достаточно большим (см. лемму 2).

В силу равенства (12) на комплексной прямой

$$l_{z^0,s} = \Big\{ \big(z, w'^0, \overline{\varphi(\bar{w}'^0)}\big) \in \mathbb{C}^n \times U: \ z_j = z_j^0 - \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial w_j} t, \ j = 1, \ldots, n-1, \ z_n = z_n^0 + t \Big\}$$

производная $\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial\varPhi}{\partial w_n}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\varPhi}{\partial w_n}\right) = 0$ при достаточно малых по модулю t. Область $\varOmega$ была выбрана в лемме 2 так, что функция $\varPhi(z, w)$ была голоморфной в $\varOmega$, т. е. знаменатель ядра $U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w)$ не обращался в 0 для всех $\zeta \in \overline{D}$ и всех $(z, w) \in \varOmega$.

Рассмотрим этот знаменатель на прямой $l_{z^0,s}$. Имеем

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j^0) + (\zeta_n - z_n)(\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\bar{w}'^0)}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} (\zeta_j - z_j^0)(\bar{\zeta}_j - w_j^0) + (\zeta_n - z_n^0)(\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\bar{w}'^0)}) +$$
$$+ t \left(\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\bar{w}'^0)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial w_j} (\bar{\zeta}_j - w_j^0) \right).$$

Выражение

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\zeta_j - z_j^0)(\bar{\zeta}_j - w_j^0) + (\zeta_n - z_n^0)(\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\bar{w}'^0)}) \neq 0$$

для всех $\zeta \in \overline{D}$. Так что значения этого выражения на комплексной плоскости при $\zeta \in \overline{D}$ и w' из некоторой компактной окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$ образуют компактное множество, не содержащее 0. Можно считать (делая сдвиг), что $z^0 = 0$.

При $z^0 = 0$, $w'^0 = 0$ выражение

$$t \left(\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\bar{w}'^0)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial w_j} (\bar{\zeta}_j - w_j^0) \right) = t\bar{\zeta}_n.$$

Так как $\bar{\zeta}_n \neq 0$ на $\overline{D}$, то значения выражения

$$\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\bar{w}'^0)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial w_j} (\bar{\zeta}_j - w_j^0)$$

на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ при $\zeta \in \overline{D}$ и z, w' из некоторой компактной окрестности точки $(0,0)$ также образуют компактное множество, не содержащее 0. Поэтому знаменатель ядра $U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w)$ на прямой $l_{z^0,s}$ может обратиться в 0 лишь для t, лежащих на некотором компакте комплексной плоскости, не содержащем нуля. Таким образом, вне этого компакта знаменатель не равен нулю, и, значит, функция $\Phi(z,w)$ голоморфна на комплексной прямой $l_{z^0,s}$ за исключением некоторого компакта $K_{z^0,s}$, не содержащего нуля. Так как дополнение этого компакта связно, то $(0,0)$ лежит в неограниченной компоненте множества голоморфности $\Phi(z,w',0)$ для всех z и w' из некоторой окрестности точки $(0,0)$.

Следовательно, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial w_n}\right) = 0$ в $\tilde{l}_{z^0,s}\setminus K_{z^0,s}$. Поэтому $\dfrac{\partial\Phi}{\partial w_n}\Big|_{\tilde{l}_{z^0,s}\setminus K_{z^0,s}} = \mathrm{const}$. Из вида (5) функции $\Phi(z,w)$ получим, что $\Phi\big|_{\tilde{l}_{z^0,s}\setminus K_{z^0,s}} \to 0$ и $\dfrac{\partial\Phi}{\partial w_n}\Big|_{\tilde{l}_{z^0,s}\setminus K_{z^0,s}} \to 0$ при $|t|\to\infty$. Поэтому $\dfrac{\partial\Phi}{\partial w_n}\Big|_{\tilde{l}_{z^0,s}\setminus K_{z^0,s}} = 0$, а следовательно, получим, что $\dfrac{\partial\Phi}{\partial w_n}\Big|_{\tilde{l}_{z^0,s}\setminus K_{z^0,s}} \equiv 0$ для всех z^0 и w' из некоторой окрестности точки 0. Из леммы 2 получим, что функция $\dfrac{\partial\Phi}{\partial w_n}(z,w',0) = 0$ в неограниченной компоненте своей области определения.

Поэтому ряд (11) начинается с $k=2$. Применяя такое же рассуждение для выражения $\Delta_{\mathbb{C}}\left[\big(w_n - \varphi(w')\big)^2 \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial w_n^2}\right]$, получим, что $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial w_n^2}\Big|_{\tilde{l}_{z^0,s}\setminus K_{z^0,s}} \equiv 0$ и т. д. $\square$

Следствие 1. *Если функция $F(z)$ удовлетворяет условиям (4), то $F(z)\equiv 0$ в окрестности точки ноль.*

Теорема 2. *Пусть функция $f\in\mathcal{L}^p(\partial D)$, $p\geqslant 2$ и для ее интеграла Бохнера-Мартинелли $F(z)$ выполняются условия (4), тогда f голоморфно продолжается в область D.*

Доказательство вытекает из следствия 1 и следующей теоремы из [8].

Теорема 3 ([8]). *Если для функции $f\in\mathcal{L}^p(\partial D)$, $p\geqslant 2$, интеграл $F(z)=0$ вне замыкания области D, то внутри области $F(z)\in\mathcal{H}^p(D)$ и его нормальные граничные значения совпадают с f на ∂D.*

Теорема 4. *Пусть D односвязна, ограничена и выполнено условие (1). Если функция $f\in\mathcal{L}^p(\partial D)$, $p\geqslant 2$ и обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\Gamma$, тогда функция f голоморфно продолжается в область D.*

Доказательство следует из предложения 1 и теоремы 2.

Если Γ является ростком комплексной гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$, то условие (1) становится лишним. Действительно, пусть $\tilde\Gamma$ — комплексная гиперповерхность (комплексное многообразие размерности $(n-1)$) в $\mathbb{C}^n$ и $\Gamma=\tilde\Gamma\cap U$. Поверхность $\tilde\Gamma$ является связным неограниченным множеством в $\mathbb{C}^n$. По-прежнему Γ не пересекает $\overline{D}$, но $\tilde\Gamma$ может пересекать $\overline{D}$. Тогда $\tilde\Gamma\cap D$ — относительно компактное открытое множество на $\tilde\Gamma$. Пусть $\tilde\Gamma\setminus(\tilde\Gamma\cap\overline{D})$ связно.

Предположим, что функция $f\in\mathcal{L}^p(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых $l\in\mathfrak{L}_\Gamma$, тогда для интеграла Бохнера-Мартинелли F выполнено предложение 1, т.е. равенства (4). Тогда в силу вещественной аналитичности данного интеграла это условие будет выполнено и на всем множестве $\tilde\Gamma\setminus(\tilde\Gamma\cap\overline{D})$. Поскольку оно неограничено, то найдется точка $z^0\in\tilde\Gamma$ и направление b^0, что $\langle b^0, \bar\zeta-\bar z^0\rangle\neq 0$ для всех $\zeta\in\overline{D}$. Таким образом, мы приходим к нашим первоначальным условиям на область D, и росток $\tilde\Gamma$ уже в окрестности точки z^0. Тем самым справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть D — односвязная ограниченная область со связной гладкой границей, $\tilde\Gamma$ — комплексная гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$ с условием, что множество $\tilde\Gamma\setminus(\tilde\Gamma\cap\overline{D})$ связно и $\Gamma=$*

$\tilde{\Gamma}\cap U$ не пересекает $\overline{D}$. Если функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$, $p \geqslant 2$ и обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\Gamma$, тогда функция f голоморфно продолжается в область D.

Пусть $\gamma \subset \Gamma$, $0 \in \gamma$ и γ является порождающим многообразием класса $\mathcal{C}^\infty$ в Γ, т. е. для каждой точки $z \in \Gamma$ комплексная линейная оболочка касательного пространства $T_z(\gamma)$ совпадает с касательным пространством $T_z(\Gamma)$. Отметим, что действительная размерность γ не меньше $(n-1)$. Обозначим через $\mathfrak{L}_\gamma$ множество комплексных прямых, пересекающих γ.

Теорема 6. *Пусть D и Γ удовлетворяют условиям теоремы 3 или теоремы 5. Если функция $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$, $p \geqslant 2$ и обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\gamma$, тогда функция f голоморфно продолжается в область D.*

Доказательство. Пусть $F(z)$ интеграл вида (3), тогда по лемме 1 выполняются равенства

$$F(z) = 0, \qquad \frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}(z) = 0 \tag{13}$$

для всех $z \in \gamma$ и для всех мультииндексов α.

Делая опять замену переменных

$$\begin{cases} z_1 = u_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{n-1} = u_{n-1} \\ z_n = u_n + \varphi(u'), \end{cases}$$

получим, что Γ перейдет в $\Gamma^* = \{u \in \mathbb{C}^n : \ u_n = 0\}$, а γ перейдет в порождающее многообразие $\gamma^* \subset \Gamma^*$. Поскольку производные по u выражаются через производные такого же порядка по z, то из условия (13) получим

$$F^*(u) = 0, \quad \frac{\partial^\alpha F^*}{\partial u^\alpha}(u) = 0, \quad u \in \gamma^*,$$

где $F^* = F(z(u))$.

Применяя лемму 8 из [10] к функциям $F^*(u', 0)$ и $\dfrac{\partial^{\alpha_n} F^*}{\partial u^{\alpha_n}}(u', 0)$, равным нулю на γ^*, получим, что $\dfrac{\partial^\alpha F^*}{\partial u^\alpha}(u) = 0$ на Γ^*. Делая в этих равенствах обратную замену, получим, что для функции F выполняются условия (13) для $z \in \Gamma$.

Для завершения доказательства теоремы 6 остается применить теорему 3 или теорему 5.

При $n = 2$ многообразие γ является обычной гладкой кривой.

Список литературы

[1] М.Л.Аграновский, Р.Е.Вальский, Максимальность инвариантных алгебр функций, *Сиб. матем. журн.*, **12**(1971), №1, 3–12.

[2] E.L.Stout, The boundary values of holomorphic functions of several complex variables, *Duke Math. J.*, **44**(1977), №1, 105–108.

[3] Л.А.Айзенберг, А.П.Южаков, Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, Наука, 1979.

[4] А.М.Кытманов, Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения, Новосибирск, Наука, 1992.

[5] A.M.Kytmanov, S.G.Myslivets, Higher-dimensional boundary analogs of the Morera theorem in problems of analytic continuation of functions, *J. Math. Sci.*, **120**(2004), №6. 1842–1867.

[6] J.Globevnik, E.L.Stout, Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables, *Duke Math. J.*, **64**(1991), №3, 571–615.

[7] А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец, О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения, *Матем. заметки*, **83**(2008), №4, 545–551.

[8] Б.П.Отемуратов, О функциях класса L^p со свойством одномерного голоморфного продолжения, *Вестник КрасГУ. Сер. физ. мат. науки*, Красноярск, (2006), №9, 95–100.

[9] Б.П.Отемуратов, О многомерных теоремах Морера для интегрируемых функций, *Узб. мат. журнал*, Ташкент, (2009), №2, 112–119.

[10] А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец, В.И.Кузоватов, Семейства комплексных прямых минимальной размерности, достаточные для голоморфного продолжения функций, *Сиб. мат. журнал*, **52**(2011), №2, 326–339.

Some Families of Complex Lines of Minimal Dimension which are Sufficient for Holomorphic Continuation of Integrable Functions

Bairambay P. Otemuratov

In this paper we consider continuous integrable functions given on the boundary of a bounded simply connected domain D of $\mathbb{C}^n$,$n > 1$ and having one-dimensional property of holomorphic extension along the families of complex lines.

Keywords: holomorphic continuation, integrable functions, Bochner-Martinelli integral.