Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(1), 75–81

УДК 517.55

Об алгебре операторов, порожденной сингулярным оператором Бохнера-Мартинелли в областях с коническими ребрами

Давлатбой Х. Джумабаев*
Национальный университет Узбекистана,
Вузгородок, Ташкент, 700174,
Узбекистан

Получена 18.05.2011, окончательный вариант 25.09.2011, принята к печати 10.11.2011

Показано, что в областях с коническими ребрами C^*-алгебра, порожденная сингулярным интегральным оператором Бохнера-Мартинелли, его сопряженным и непрерывными функциями, является неприводимой, а ее алгебра Калкина корректно определена.

Ключевые слова: сингулярный интеграл Бохнера-Мартинелли, коническое ребро, C^*-алгебра.

Введение

Хорошо известно граничное поведение интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с гладкой или кусочно-гладкой границей (см., например, [1]). В данной статье мы изучаем его поведение в областях, граница которых содержит конические ребра. Для границ с коническими точками его поведение рассмотрено в [2].

Введем обозначения.

Будем отождествлять $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом: $z_j = x_j + \imath x_{n+j}$ для $j = 1, \ldots, n$. То есть $(z_1, ..., z_n) = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. А $x = (x_1, ..., x_{2n})$, $x^{'} = (x_1, ..., x_{p+1})$, $x^{''} = (x_{p+3}, ..., x_{2n})$, $x = (x^{'}, x_{p+2}, x^{''})$.

Рассмотрим гладкую поверхность Σ в $\mathbb{R}^{p+2} \setminus \{0\}$ с сингулярной точкой в начале координат, заданную так:

$$\Sigma = \{(rx', r) \in \mathbb{R}^{p+2} : \ x' \in X', \, r \in [0, R)\}. \tag{1}$$

Точки $x' = (x_1, \ldots, x_{p+1})$ изменяются на компактной гладкой гиперповерхности $X^{'}$ в $\mathbb{R}^{p+1}$, которая не содержит начала координат. Например, X' может быть p-мерной сферой с центром в нуле.

Будем далее предполагать, что $X' = \{x' \in \mathbb{R}^{p+1} : \ \rho(x') = 1\}$, где ρ есть вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^{p+1} \setminus \{0\}$ класса C^1, удовлетворяющая условиям $\nabla\rho \neq 0$ на X' и $\rho(\lambda x') = \lambda^h \rho(x')$ для всех $\lambda > 0$ с некоторой константой $h > 0$.

Начало координат является особой конической точкой для Σ.

Используя (1), легко найти определяющую функцию гладкой части Σ. Действительно, для $(x', x_{p+2}) \in \Sigma \setminus \{0\}$ получим, что

$$\rho\left(\frac{x'}{x_{p+2}}\right) = 1,$$

а однородность функции ρ дает

$$\Sigma = \{(x', x_{p+2}) \in \mathbb{R}^{p+2} : \ \psi(x', x_{p+2}) = 0, \, x_{p+2} \in [0, R)\},$$

*davlat2112@rambler.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

где
$$\psi(x', x_{p+2}) = \rho(x') - (x_{p+2})^h.$$
Пусть
$$S = \Sigma \times X'', \tag{2}$$
где X'' — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^q$, $p+1+q = 2n-1$. Таким образом, S является гиперповерхностью в $\mathbb{C}^n$ с коническим ребром $F = O' \times X''$ ($O' = (0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{p+2}$).

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Будем считать, что граница D задается в виде
$$\partial D = Y \cup (S_1 \cup \ldots \cup S_N),$$
где Y является гладкой гиперповерхностью, а каждая из S_ν диффеоморфна конической гиперповерхности S (с разными p и q), рассмотренной выше. Таким образом, ∂D — гладкая гиперповерхность с конечным числом конических ребер. Отметим, что в таких областях справедлива формула Стокса (см., например, [3]).

Так как анализ вблизи особых точек является локальным, можно считать без ограничения общности, что $N = 1$, т. е. $\partial D = Y \cup S$, где
$$S = \{z \in \mathbb{C}^n : z = (rx', r, x''),\ x' \in X',\ x'' \in X'',\ r \in [0, R)\}. \tag{3}$$

Напомним определение интеграла Бохнера-Мартинелли. Пусть функция f интегрируема на ∂D ($f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$), т.е. f интегрируема на гладкой части $\partial D \setminus F$. Введем ядро Бохнера-Мартинелли:
$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}}\, d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$
где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar{\zeta}[k] = d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_{k-1} \wedge d\bar{\zeta}_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n$.

Интегралом Бохнера-Мартинелли назовем интеграл вида
$$F(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z)$$
для $z \notin \partial D$.

Если функция f голоморфно продолжается в D, то F совпадает с этим голоморфным продолжением. Для областей с кусочно-гладкой границей это утверждение является классическим интегральным представлением Бохнера-Мартинелли. Для областей с коническими ребрами оно легко получается с помощью аппроксимации D областями с гладкими границами.

Целью работы является изучение алгебры операторов, порожденной сингулярным интегралом Бохнера-Мартинелли, его сопряженными и непрерывными функциями в областях с сингулярными ребрами. Для областей с гладкой границей это исследование было проведено в статье Василевского и Тарханова [4], а для областей с коническими особыми точками — в статье Кытманова и Мысливец [2] (см. также [5]).

1. Известные результаты

Точку $z^0 \in \partial D$ назовем точкой Лебега для функции $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, если
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{2n-1}} \int\limits_{\partial D \cap B(z^0, \varepsilon)} |f(\zeta) - f(z^0)|\, dS = 0,$$

где $B(z^0, \varepsilon)$ — шар с центром в точке z^0 и радиусом ε, а dS — поверхностная мера Лебега на гладкой части ∂D.

Если z^0 — точка гладкости для ∂D, то данное определение есть обычное определение точки Лебега. Для точек, лежащих на коническом ребре, данное определение является новым. Во всяком случае, если функция f непрерывна в точке z^0, то эта точка является точкой Лебега для f.

Теорема 1. *Если z^0 — точка Лебега функции $f \in L^1(\partial D)$, тогда для точек $z \in D$, лежащих на оси конуса, справедливо равенство*

$$\lim_{z \to z^0} \left(\int\limits_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0))U(\zeta, z) - \int\limits_{\partial D \setminus B(z^0, |z - z^0|)} (f(\zeta) - f(z^0))U(\zeta, z^0) \right) = 0.$$

Для данной точки $z \in \partial D$ обозначим $\mathcal{C}_z$ — касательный конус к области D в точке z. Из вида сингулярности границы находим, что его величина равна телесному углу $\tau(z) \in [0, 1]$ для $\mathcal{C}_z$. Если ∂D является гладкой в точке z, то $\tau(z) = \dfrac{1}{2}$. Для точек z, лежащих на коническом ребре, $0 < \tau(z) < 1$.

Для точек $z \in \partial D$ особый интеграл Бохнера-Мартинелли от f равен

$$M_S[f](z) = \text{v.p.} \int\limits_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta, z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D \setminus B(z, \varepsilon)} f(\zeta)U(\zeta, z). \tag{4}$$

Обозначим $m_z(f)(\delta)$ — модуль непрерывности функции f на ∂D в точке $z \in \partial D$, т. е.

$$m_z(f)(\delta) = \sup_{\zeta \in \partial D \cap B(z, \delta)} |f(\zeta) - f(z)|.$$

Функция f на поверхности ∂D удовлетворяет условию Дини в точке $z \in \partial D$, если

$$\int\limits_0^1 m_z(f)(\delta) \, \frac{d\delta}{\delta} < \infty.$$

Теорема 2. *Если $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ удовлетворяет условию Дини в точке $z \in \partial D$, то особый интеграл Бохнера-Мартинелли $F_s(z)$ существует и справедливы формулы Сохоцкого-Племеля*

$$\begin{aligned} F^+(z) &= (1 - \tau(z))f(z) + M_S[f](z), \\ F^-(z) &= -\tau(z)f(z) + M_S[f](z), \end{aligned}$$

где $F^+(z)$ — граничное значение интеграла Бохнера-Мартинелли F изнутри области D, а $F^-(z)$ — граничное значение данного интеграла извне области.

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ и z^0 — точка Лебега для функции f. Тогда справедлива формула*

$$\lim_{z^{\pm} \to z^0} \left(F^+(z^+) - F^-(z^-) \right) = f(z^0)$$

для точек z^+ и z^-, лежащих на оси конуса в D и $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ соответственно, таких, что $|z^+| = |z^-|$.

Теоремы 1–3 приведены и доказаны в [6].

Для функции $f \in C_{\text{comp}}(\partial D \setminus \{0\} \times X'')$ определим норму

$$\|f\|_{L^{2,\gamma}(\partial D)} := \left(\int\limits_{\partial D} |(rx', r)|^{-2\gamma} \, |f|^2 \, dS \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$.

Обозначим $L^{2,\gamma}(\partial D)$ — пополнение $C_{\text{comp}}(\partial D \setminus \{0\} \times X'')$ в соответствии с этой нормой.

Теорема 4. *Особый интеграл (4) определяет ограниченный линейный оператор в $L^{2,\gamma}(X' \times [0, R) \times X'')$, если $-p - 1 < \gamma < 0$.*

Пусть φ — произвольная гладкая функция на ∂D, носитель которой лежит в S, равная 1 в окрестности ребра. Возьмем гладкую функцию ψ с большим компактным носителем в S, которая равна 1 на носителе φ. Такая функция ψ называется покрывающей для φ.

Следствие 1. *Особый интеграл Бохнера-Мартинелли $\varphi M_S \psi$ определяет ограниченный линейный оператор в $L^{2,\gamma}(\partial D)$ при $|\gamma| < \dfrac{p+1}{2}$.*

Теорема 4 и следствие 1 доказаны в [7].

2. Алгебра, порожденная M_S

Обозначим в пространстве линейных ограниченных операторов в $\mathcal{L}^{2,\gamma}(\partial D)$ через $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(C(\partial D), M_S)$) — C^*-алгебру, порожденную оператором Бохнера-Мартинелли M_S, его сопряженным оператором M_S^* и операторами умножения на функции aI, где $a \in \mathcal{C}(\partial D)$, а I — тождественный оператор $\left(|\gamma| < \dfrac{p+1}{2} \right)$.

Теорема 5. *Если D — область со связной границей, то C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ неприводима.*

Доказательство. Для доказательства неприводимости алгебры $\mathfrak{A}$ достаточно показать, что $\mathfrak{A}$ не имеет ненулевых собственных инвариантных подпространств в $\mathcal{L}^2(\partial D)$.

Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{C} = \{aI : a \in \mathcal{C}(\partial D)\}$ в $\mathfrak{A}$, порожденную всеми операторами умножения на функции $a \in \mathcal{C}(\partial D)$. Сначала покажем, что каждое инвариантное подпространство этой подалгебры имеет вид

$$\mathcal{L}^2_\sigma(\partial D) := \{\chi_\sigma f : f \in \mathcal{L}^2(\partial D)\},$$

где χ_σ — характеристическая функция измеримого подмножества $\sigma \subset \partial D$.

Действительно, пусть Σ является инвариантным подпространством подалгебры $\mathfrak{C}$, и пусть $P : \mathcal{L}^2(\partial D) \to \Sigma$ — ортогональная проекция. Нам понадобится следующая лемма (см. [2]).

Лемма 1. *Предположим, что $\mathfrak{A}$ — произвольная C^*-алгебра в алгебре $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ всех непрерывных линейных операторов гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Если Σ — инвариантное подпространство в $\mathfrak{A}$ и $P : \mathcal{H} \to \Sigma$ — ортогональная проекция, тогда P коммутирует со всеми операторами алгебры $\mathfrak{A}$.*

По лемме 1 оператор P коммутирует со всеми операторами подалгебры $\mathcal{C}$. Следовательно, $P\,aI = aI\,P$, и поэтому $P(a) = aP(1)$ для всех $a \in \mathcal{C}(\partial D)$. Так как $\mathcal{C}(\partial D)$ плотно в $\mathcal{L}^2(\partial D)$, то получаем, что $P(f) = P(1)f$ для всех $f \in \mathcal{L}^2(\partial D)$, т. е. P есть оператор умножения на функцию $P(1)$.

Далее
$$P^2\,aI = P(aP(1)) = aP\,P(1) = a(P(1))^2.$$
С другой стороны,
$$P^2\,aI = P\,aI = aP(1).$$
Это показывает, что $(P(1))^2 = P(1)$. Следовательно, функция $P(1)$ имеет только два значения, 0 и 1, поэтому является характеристической функцией измеримого подмножества σ границы области ∂D. Таким образом, P есть оператор умножения на характеристическую функцию χ_σ.

Ясно, что инвариантные подпространства алгебры $\mathfrak{A}$ являются инвариантными подпространствами подалгебры $\mathfrak{C}$.

По лемме 1 получим
$$\chi_\sigma M_S = M_S\,\chi_\sigma I.$$
Комбинируя это равенство с теоремой 2, имеем
$$\chi_\sigma = \chi_\sigma\,1 = \chi_\sigma\Big(\Big(\frac{1}{2}I + M_S\Big)1\Big) = \Big(\Big(\frac{1}{2}I + M_S\Big)\chi_\sigma I\Big)1 = \Big(\frac{1}{2}I + M_S\Big)\chi_\sigma = (M\chi_\sigma)^+$$
на ∂D.

Используя лемму 1 и теорему 3, получаем, что $(M\chi_\sigma)^-$ обращается почти всюду в нуль на границе. Тогда $M\chi_\sigma \equiv 0$ на всем $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, что следует из теоремы единственности решения задачи Дирихле для дополнения области D (так как для области D выполнено условие конуса).

Так как интеграл
$$M\chi_\sigma = \int\limits_{\sigma} U(\zeta, z)$$
является гармонической функцией вне σ, то ясно, что $(M\chi_\sigma)^+ = (M\chi_\sigma)^-$ на $\partial D \setminus \sigma$.

Если $\partial D \setminus \sigma$ имеет меру нуль, тогда Σ есть все пространство $\mathcal{L}^2(\partial D)$. Остается рассмотреть случай, когда множество $\partial D \setminus \sigma$ имеет положительную меру.

В этом случае интеграл $M\chi_\sigma$ равен нулю вне множества σ в $\mathbb{C}^n$. Следовательно, $(M\chi_\sigma)^+ = 0$ почти всюду на границе и поэтому $\chi_\sigma = 0$ почти всюду на ∂D. Отсюда вытекает, что σ имеет меру нуль, т. е. все инвариантные подпространства алгебры $\mathfrak{A}$ тривиальны. $\square$

Рассмотрим алгебру Калкина $\widehat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ для алгебры $\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{K}$ — идеал компактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(\partial D)$. Покажем, что $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K} \neq \varnothing$.

Лемма 2. *Предположим, что a — непрерывная функция на ∂D, удовлетворяющая условию $|a(z)| \leqslant C\,|z|^\delta$ в окрестности конического ребра с некоторым $\delta > 0$. Тогда коммутатор $[aI, M_S] = aM_S - M_S\,aI$ является компактным оператором в $\mathcal{L}^2(\partial D)$.*

Доказательство. Пусть a — гладкая функция, удовлетворяющая условиям
$$\begin{array}{rcl} |a(z)| & \leqslant & C\,|z|^\delta \quad \text{и} \\ |z|\,|\nabla_{x'} a(z)| & \leqslant & C\,|z|^\delta \end{array} \tag{6}$$
в окрестности конического ребра ∂D. Ясно, что aI является ограниченным оператором из $\mathcal{L}^2(\partial D)$ в $\mathcal{L}^{2,\delta/2}(\partial D)$.

Коммутатор
$$[aI, M_S]f\,(z) = a(z)\,M_S f\,(z) - M_S(af)\,(z) = \int\limits_{\partial D} (a(z) - a(\zeta))\,f(\zeta) U(\zeta, z)$$

есть ограниченный оператор из $\mathcal{L}^2(\partial D)$ в $\mathcal{L}^{2,\delta/2}(\partial D)$, поскольку M_S есть ограниченный оператор в $\mathcal{L}^{2,\gamma}(\partial D)$ при $|\gamma| < \dfrac{p+1}{2}$ (см. следствие 1).

Рассмотрим производные коммутатора

$$|z|\,\frac{\partial}{\partial z_j}\int\limits_{\partial D}(a(z)-a(\zeta))\,f(\zeta)U(\zeta,z) = |z|\,\frac{\partial a}{\partial z_j}\,M_S f\,(z) + |z|\int\limits_{\partial D}(a(z)-a(\zeta))\,f(\zeta)\,\frac{\partial}{\partial z_j}U(\zeta,z)$$

для $z,\zeta\in\partial D$. В левой части равенства можно дифференцировать под знаком интеграла, поскольку порядок сингулярности на единицу меньше размерности множества интегрирования. Первый член в правой части является ограниченным оператором из $\mathcal{L}^2(\partial D)$ в $\mathcal{L}^{2,\delta/2}(\partial D)$, что ясно из (6).

Второй член есть сумма интегральных операторов с ядрами вида

$$\frac{(\zeta_i - z_i)(\bar\zeta_j - \bar z_j)(\bar\zeta_k - \bar z_k)}{|\zeta - z|^{2n+2}}$$

или такими, в которых $\zeta_i - z_i$ заменено на их комплексно сопряженные. Поэтому следствие 1, примененное к этим интегралам, показывает, что второй член есть ограниченный оператор из $\mathcal{L}^2(\partial D)$ в $\mathcal{L}^{2,\delta/2}(\partial D)$.

Если a — непрерывная функция на границе, удовлетворяющей условиям леммы, то a является равномерным пределом гладких функций $\{a_\nu\}$, для которых выполнены условия (6). Последовательность операторов $\{a_\nu I\}$ сходится в операторной норме к оператору aI. Поэтому коммутатор $[aI, M_S]$ также будет компактным оператором в $\mathcal{L}^2(\partial D)$. □

Теорема 6. *Алгебра Калкина $\widehat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ корректно определена, т. е. $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Так как алгебра $\mathfrak{A}$ неприводима и $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{K}\neq\varnothing$, то $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{A}$ по теореме 5.39 из [8]. □

Как показано в [4], оператор M_S является существенно самосопряженным в гладких точках границы области, т. е. разность $M_S - M_S^*$ — компактный оператор. Это позволило доказать в [4], что алгебра Калкина тогда является коммутативной и изоморфна алгебре непрерывных функций на спектре оператора M_S.

В нашем случае при $n > 1$ оператор M_S не будет существенно самосопряженным (для областей с коническими сингулярными точками это отмечалось в [2]), т. е. алгебра Калкина не коммутативна и теорема Гельфанда-Наймарка к ней не применима. Тем самым, данная алгебра устроена более сложным образом, чем в гладком случае.

Список литературы

[1] А.М.Кытманов, Интеграл Бохнера-Мартинелли и его приложения, Новосибирск, Наука, 1992.

[2] А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец, Сингулярный интегральный оператор Бохнера-Мартинелли на гиперповерхностях с особыми точками, *Вестник НГУ. Сер. математика, механика, информатика,* 7(2007), №2, 17–32.

[3] Л.Шварц, Анализ, М., Мир, 1972.

[4] N.Tarkhanov, N.Vasilevski, Microlocal Analysis of the Bochner-Martinelli Integral, *Integral Equation Oper. Theory,* (2007), №4, 583–592.

[5] А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец, Интегральные представления и их приложения в многомерном комплексном анализе, Красноярск, СФУ, 2010.

[6] Д.Х.Джумабаев, Формулы Сохоцкого-Племеля для интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с коническими ребрами, *Журнал Сибирского федерального университета. Сер. математика и физика*, **4**(2011), №1, 77–84.

[7] Г.Худайберганов, Д.Х.Джумабаев, Интеграл Бохнера-Мартинелли на сингулярных гиперповерхностях, *Узбекский математический журнал*, (2011), №2, 41–52.

[8] R.G.Douglas Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Springer Verlag, Berlin et al, 1998.

On the Algebra of Operators Generated by Singular Bochner-Martinelli Operator in the Domains with Conical Wedges

Davlatboi Kh. Dzhumabaev

It is shown that in domains with conical wedges the C^*-algebra, generated by singular integral Bochner-Martinelli operator, its conjugates and continuous functions, is nonreducible and its Calkin algebra is correct.

Keywords: The singular Bochner-Martinelli integral, conical wedge, C^*-algebra.