Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(4), 541–550

УДК 512.553+512.541

Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел

Егор А. Тимошенко*
Механико-математический факультет,
Томский государственный университет,
Ленина 36, Томск, 634050,
Россия

Получена 25.03.2011, окончательный вариант 25.05.2011, принята к печати 10.07.2011

Доказаны структурные теоремы, дающие полное описание проективных модулей над кольцом псевдорациональных чисел. Для таких модулей построена полная система инвариантов.

Ключевые слова: проективный модуль, кольцо псевдорациональных чисел, система инвариантов.

Обозначим через $\mathbf{N}$ и P множества всех натуральных и всех простых чисел соответственно. Пусть для всякого $p \in P$ кольцо K_p совпадает с кольцом целых p-адических чисел. Введем обозначения

$$K = \prod_{p \in P} K_p, \qquad T = \bigoplus_{p \in P} K_p \subset K.$$

В кольце K имеется единственное подкольцо R такое, что идеал T содержится в R и что кольцо R/T изоморфно полю $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел. Кольцо R (называемое *кольцом псевдорациональных чисел*) введено в [1, 2] для изучения некоторых классов смешанных абелевых групп. Это кольцо можно также описать как множество всех элементов $(x_p)_{p \in P}$ кольца K таких, что при некотором $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ равенство $bx_p = ae_p$ выполнено почти для всех простых p (через e_p здесь обозначена единица кольца K_p).

Кольцо K_p и его единичный элемент e_p можно естественным образом отождествить с соответствующими идеалом и идемпотентом кольца R. Кроме того, кольцо K_p допускает единственную модульную структуру как над самим собой, так и над кольцом R; поэтому далее мы будем рассматривать K_p как R-модули, не делая дополнительных оговорок. Все модули считаем унитарными.

В кольце R, как отмечено в [1, 2], существуют идемпотенты двух типов:

$$e_X = \sum_{p \in X} e_p; \tag{1}$$

$$1 - e_X = 1 - \sum_{p \in X} e_p, \tag{2}$$

где X — конечное (возможно, пустое) подмножество множества P. В дальнейшем, используя обозначение e_X, мы будем автоматически полагать, что X конечно. Для идемпотентов типа (1) будем использовать также обозначения ε и δ (с различными индексами или без таковых). Далее, для всякого идемпотента $e \in R$ введем понятие *носителя* $\operatorname{supp} e$, полагая $\operatorname{supp} e_X = X$ и $\operatorname{supp}(1 - e_X) = P \setminus X$. Если $\operatorname{supp} e \subset \operatorname{supp} e'$, то идеал eR содержится в $e'R$ как прямое слагаемое (при этом дополнительное слагаемое определено однозначно).

*tea471@mail.tsu.ru

В статьях [2, 3] показано, что идеал J кольца R обязательно относится к одному из следующих двух типов:

$$J = \bigoplus_{p\in P} J_p; \tag{3}$$

$$J = (1-e_X)R \oplus \Big(\bigoplus_{p\in X} J_p\Big), \tag{4}$$

где J_p — произвольные идеалы соответствующих колец K_p.

Для всякого R-модуля M фактор-модуль M/MT представляет собой $\mathbf{Q}$-пространство. Размерность этого пространства называется *псевдорациональным рангом* модуля M [3, 4]; будем обозначать ее через $r(M)$. Очевидно, что псевдорациональный ранг прямой суммы некоторого семейства R-модулей равен сумме псевдорациональных рангов этих модулей. Идеалы вида (3) и (4) имеют псевдорациональные ранги 0 и 1 соответственно.

Первые попытки описания проективных R-модулей предпринимались в [3], но не были завершены из-за ошибки в конце доказательства теоремы 3. Как показано в статьях [2, 3], кольцо R наследственно, т.е. всякий его идеал является проективным R-модулем. Отсюда следует [5], что произвольный проективный R-модуль изоморфен прямой сумме некоторого семейства идеалов кольца R. Всякий ненулевой идеал $J_p \subset K_p$ как R-модуль изоморфен K_p, поэтому мы можем считать, что в каждом прямом слагаемом вида (3) или (4) идеал J_p равен либо K_p, либо 0. Собирая вместе прямые слагаемые вида K_p, получаем, что для всякого проективного R-модуля M имеет место изоморфизм

$$M \cong \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in P} F_p\Big); \tag{5}$$

здесь F_p — свободные K_p-модули, а все M_i — это некоторые идеалы кольца R вида

$$J = (1-\delta)R, \tag{6}$$

где δ, вообще говоря, зависит от индекса i (разложение (5) взято нами из работы [3]).

Для любых $i \in I$ и $p \in P$ идеал $M_i e_p$ либо совпадает с K_p, либо равен 0. Это значит, что при любом $p \in P$ модуль Me_p является свободным K_p-модулем. Ранг этого свободного модуля (определяемый однозначно) обозначим через $r_p(M)$. Таким образом, всякому проективному R-модулю M можно сопоставить кардиналы $r(M)$ и $\{r_p(M)\}_{p\in P}$. Полученный набор кардинальных чисел мы назовем *системой инвариантов* проективного модуля M. Ясно, что для любых проективных R-модулей M и A из существования вложения $A \to M$ следует $r(A) \leqslant r(M)$ и $r_p(A) \leqslant r_p(M)$. В частности, если проективные модули изоморфны, то они имеют одинаковые системы инвариантов.

Заметим, что проективный R-модуль псевдорационального ранга 0 имеет вид

$$F = \bigoplus_{p\in P} F_p \tag{7}$$

и однозначно определяется рангами $r_p(F) = r_p(F_p)$ свободных K_p-модулей F_p.

Теорема 1. *Два проективных R-модуля являются изоморфными тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые системы инвариантов.*

Доказательство теоремы 1 составляет основное содержание статьи; это доказательство будет разбито на несколько случаев. Перед тем как приступить к нему, выясним, какие условия должны быть наложены на набор кардинальных чисел, чтобы он служил системой инвариантов некоторого проективного R-модуля.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\{\mathfrak{M}_p\}_{p\in P}$ — произвольные кардинальные числа, и пусть*

$$L = \{p \in P \mid \mathfrak{M}_p < \mathfrak{M}\}.$$

Проективный R-модуль M, одновременно удовлетворяющий всем равенствам $r(M) = \mathfrak{M}$ и $r_p(M) = \mathfrak{M}_p$, существует в том и только в том случае, когда

(a) *множество L конечно*

или

(b) *выполнены следующие три условия:*

(b1) *множество L счетно;*

(b2) $\{\mathfrak{M}_p \mid p \in L\} = \{\mathfrak{N}_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, *где*

$$\mathfrak{N}_1 < \mathfrak{N}_2 < \ldots < \mathfrak{N}_n < \ldots , \tag{8}$$

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \mathfrak{M}; \tag{9}$$

(b3) *для любого $n \in \mathbf{N}$ множество $\{p \in P \mid \mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_n\}$ конечно.*

Доказательство. Сначала мы убедимся, что каждое из условий (a) и (b) обеспечивает существование подходящего проективного R-модуля.

Пусть выполнено (a). Тогда проективный модуль $M = \Big(\bigoplus\limits_{\mathfrak{M}}(1 - e_L)R\Big) \oplus \Big(\bigoplus\limits_{p\in P} F_p\Big)$, где F_p — это свободный K_p-модуль ранга

$$r_p(F_p) = \begin{cases} \mathfrak{M}_p, & \text{если } p \in L; \\ 0, & \text{если } \mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}; \\ \mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}, & \text{если } \mathfrak{M}_p > \mathfrak{M}, \end{cases}$$

обладает требуемой в теореме системой инвариантов.

Пусть теперь выполнено (b). Ясно, что в этом случае $\mathfrak{M}$ — бесконечное кардинальное число конфинальности $\mathrm{cf}(\mathfrak{M}) = \aleph_0$. Введем обозначения

$$\mathfrak{N}_0 = 0, \qquad L_n = \{p \in P \mid \mathfrak{M}_p \leqslant \mathfrak{N}_n\} \text{ (где } n \geqslant 1), \qquad \tau_n = \mathfrak{N}_n - \mathfrak{N}_{n-1}. \tag{10}$$

Из (b3) нам известно, что все множества L_n конечны. Через ε_n обозначим идемпотент с носителем L_n; договоримся, что $\varepsilon_0 = 0$. Рассмотрим проективные модули

$$M' = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \bigoplus_{\tau_n} (1 - \varepsilon_{n-1})R, \tag{11}$$

$$M \cong M' \oplus \Big(\bigoplus_{p\notin L} F_p\Big), \tag{12}$$

где F_p — свободный K_p-модуль, имеющий ранг

$$r_p(F_p) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}; \\ \mathfrak{M}_p, & \text{если } \mathfrak{M}_p > \mathfrak{M}. \end{cases} \tag{13}$$

Имеем $r(M) = \sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \tau_n = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \mathfrak{M}$.

Если $p \in L$, то $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_n$ для некоторого $n \geqslant 1$ и $r_p(M) = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n = \mathfrak{N}_n = \mathfrak{M}_p$; если же выполнено $p \notin L$, то справедливы равенства $r_p(M) = \sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \tau_n + r_p(F_p) = \mathfrak{M} + r_p(F_p) = \mathfrak{M}_p$, что и требовалось. Итак, мы доказали достаточность каждого из условий (a) и (b).

Обратно, пусть теперь M — некоторый проективный R-модуль, обладающий требуемой системой инвариантов, и выполнено (5), где $|I| = \mathfrak{M} = r(M)$ и $M_i = (1-\delta_i)R$. Сначала предположим, что $\mathfrak{M}$ — это бесконечный кардинал несчетной конфинальности. Ясно, что количество различных конечных подмножеств множества P счетно. Поэтому из условия $\mathrm{cf}(\mathfrak{M}) > \aleph_0$ мы получаем, что для некоторого конечного множества $X \subset P$ среди всех M_i найдется ровно $\mathfrak{M}$ идеалов, совпадающих с $(1-e_X)R$. Таким образом, прямая сумма $\mathfrak{M}$ копий идеала $(1-e_X)R$ вкладывается в M. Последнее утверждение справедливо также в ситуации $\mathfrak{M} < \aleph_0$ (в этом случае X можно задать как объединение всех множеств $\operatorname{supp}\delta_i$). Тогда для всякого простого $p \notin X$ имеем $\mathfrak{M}_p = r_p(M) \geqslant \mathfrak{M}$, т.е. выполнено (a).

Остается доказать необходимость одного из условий (a) и (b) в ситуации, когда $\mathfrak{M}$ — бесконечное кардинальное число счетной конфинальности. Предположим, что условие (a) не выполнено, т.е. множество L является счетным.

Пусть Y — произвольное счетное подмножество из P. Тогда

$$\sum_{p\in Y}\mathfrak{M}_p = \sum_{p\in Y} r_p(M) \geqslant \sum_{i\in I}\sum_{p\in Y} r_p(M_i) = \sum_{i\in I}\aleph_0 = |I| = \mathfrak{M}. \tag{14}$$

Зафиксируем произвольный кардинал $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\mathfrak{N} \geqslant \aleph_0$. Если множество $Y = \{p \in P \mid \mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}\}$ счетно, то из (14) получаем $\aleph_0 \cdot \mathfrak{N} \geqslant \mathfrak{M}$, что невозможно. Следовательно, Y конечно.

2) Пусть $\mathfrak{N}$ — конечное кардинальное число. Используя те же рассуждения, что и для случая $\mathfrak{M} < \aleph_0$, мы получаем, что для любого $m \in \mathbf{N}$ можно найти конечное $X \subset P$ такое, что M содержит подмодуль, изоморфный $(1-e_X)R^m$. Тогда для всякого $p \notin X$ выполнено $r_p(M) \geqslant m$. Следовательно, равенство $r_p(M) = \mathfrak{N}$ имеет место лишь для конечного числа простых p.

Мы показали, что среди кардинальных чисел $\mathfrak{M}_p$ всякое $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$ может встретиться лишь конечное число раз. Тогда из счетности множества L следует счетность множества $C = \{\mathfrak{M}_p \mid p \in L\}$. Обозначим через $\mathfrak{N}_1$ наименьший элемент множества C; далее, пусть $\mathfrak{N}_{n+1}$ есть наименьший элемент множества $C \setminus \{\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_n\}$.

Получили возрастающую последовательность вида (8). Пусть Y — это некоторое подмножество множества P такое, что для всякого $p \in Y$ среди кардиналов $\mathfrak{M}_p$ ровно один раз встречается каждый член этой последовательности (и не встречается никакое другое кардинальное число). Применяя (14) к счетному множеству Y, получаем $\mathfrak{M} \geqslant \sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\mathfrak{N}_n = \sum\limits_{n\in\mathbf{N}}\mathfrak{N}_n = \sum\limits_{p\in Y}\mathfrak{M}_p \geqslant \mathfrak{M}$, т.е. справедливы равенства (9). Если C содержит кардинал $\mathfrak{N}$, отличный от входящих в последовательность (8), то $\mathfrak{N} \geqslant \sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\mathfrak{N}_n = \mathfrak{M}$ — противоречие.

Итак, элементы множества C — это в точности элементы последовательности (8). Тем самым доказано, что выполнено условие (b). □

Доказательство теоремы 1 *для случая* $r(M) < \aleph_0$. Пусть проективные R-модули M и A имеют одинаковые системы инвариантов, причем $r(M) = r(A) = m$ — конечное число. Представим M и A в виде

$$M \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{m}(1-\delta_i)R\right) \oplus M', \qquad A \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{m}(1-\delta_i')R\right) \oplus A',$$

где M', A' — проективные модули псевдорационального ранга 0. Пусть X есть объединение всех $\operatorname{supp}\delta_i$ и $\operatorname{supp}\delta_i'$, и пусть $B = (1-e_X)R^m$; тогда $M \cong B \oplus M''$ и $A \cong B \oplus A''$, где M'' и A'' — это проективные модули псевдорационального ранга 0. Кардинал $r_p(B)$ конечен при любом $p \in P$, так что $r_p(M'') = r_p(M) - r_p(B) = r_p(A) - r_p(B) = r_p(A'')$. Поэтому имеем $M'' \cong A''$ и, значит, $M \cong A$. □

Сформулируем полезное вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть V и U — проективные R-модули, причем $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$, $U = \bigoplus_{p\in Y} F_p$, где $|I| \geqslant \aleph_0$ и при любых $i \in I$ и $p \in Y$ справедливо равенство $r_p(V_i) = 1$, а F_p — это свободные K_p-модули. Тогда $V \oplus U \cong V \oplus U'$, где $U' = \bigoplus_{p\in Z} F_p$, $Z = \{p \in Y \mid r_p(U) = r_p(F_p) > |I|\}$.*

Доказательство. Обозначим $X = Y \setminus Z$. Если $Z = Y$, то утверждение леммы очевидно; в противном случае $|X| \cdot |I| = |I|$, что дает возможность разбить I на непересекающиеся подмножества $\{I_p\}_{p\in X}$ так, что при каждом $p \in X$ будет выполнено $|I_p| = |I|$. Для всякого $p \in X$ имеем $|I| = |I| + r_p(F_p)$ и, далее,

$$\bigoplus_{i\in I_p} V_i \cong \Big(\bigoplus_{i\in I_p} V_i(1-e_p)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I_p} V_i e_p\Big) \cong \Big(\bigoplus_{i\in I_p} V_i(1-e_p)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{|I|} K_p\Big) \cong$$
$$\cong \Big(\bigoplus_{i\in I_p} V_i(1-e_p)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{|I|} K_p\Big) \oplus F_p \cong \Big(\bigoplus_{i\in I_p} V_i\Big) \oplus F_p.$$

Отсюда получаем изоморфизмы

$$V \oplus U \cong \Big(\bigoplus_{p\in X}\bigoplus_{i\in I_p} V_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in X} F_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in Z} F_p\Big) \cong \Big(\bigoplus_{p\in X}\bigoplus_{i\in I_p} V_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in Z} F_p\Big) \cong V \oplus U',$$

завершающие доказательство леммы. □

Доказательство теоремы 1 *для случая* $\mathrm{cf}(r(M)) > \aleph_0$. Пусть проективные R-модули M и A имеют одинаковые системы инвариантов, и пусть $r(M) = r(A) = \mathfrak{M}$ есть бесконечный кардинал конфинальности $\mathrm{cf}(\mathfrak{M}) > \aleph_0$. Модули M и A можно представить в виде

$$M \cong M' \oplus M'', \qquad \text{где } M' = \bigoplus_{i\in I}(1-\delta_i)R; \tag{15}$$

$$A \cong A' \oplus A'', \qquad \text{где } A' = \bigoplus_{i\in I}(1-\delta_i')R; \tag{16}$$

здесь $|I| = \mathfrak{M}$, а M'' и A'' — проективные модули псевдорационального ранга 0.

Из доказательства теоремы 2 мы знаем, что для подходящего идемпотента δ вида (1) рассматриваемое разложение модуля M' содержит ровно $\mathfrak{M}$ слагаемых, равных $(1-\delta)R$. Кроме того, существует идемпотент δ', обладающий аналогичным свойством относительно приведенного выше разложения модуля A'; обозначим $X = \mathrm{supp}\,\delta \cup \mathrm{supp}\,\delta'$.

Рассмотрим теперь прямое разложение $M \cong M'(1-e_X) \oplus (M'e_X \oplus M'')$ и аналогичное разложение модуля A. Заменяя ими исходные разложения (15) и (16), приходим к записям того же вида, но с дополнительным условием: $X \subset \mathrm{supp}\,\delta_i \cap \mathrm{supp}\,\delta_i'$ для всех $i \in I$ (далее мы считаем это условие выполненным). При этом, как нетрудно видеть, "новые" прямые разложения "новых" модулей M' и A' будут содержать $\mathfrak{M}$ слагаемых, равных $(1-e_X)R$. Для произвольного $i \in I$ и множества $Y = \mathrm{supp}\,\delta_i \setminus X$ имеем изоморфизмы

$$\Big(\bigoplus_{\aleph_0}(1-e_X)R\Big) \oplus (1-\delta_i)R \cong \Big(\bigoplus_{\aleph_0} e_Y R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\aleph_0}(1-\delta_i)R\Big) \oplus (1-\delta_i)R \cong$$
$$\cong \Big(\bigoplus_{\aleph_0} e_Y R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\aleph_0}(1-\delta_i)R\Big) \cong \bigoplus_{\aleph_0}(1-e_X)R.$$

Используя теперь равенства $|I| = \mathfrak{M} = \mathfrak{M} + \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cdot \aleph_0$, получаем

$$M' \cong \Big(\bigoplus_{\mathfrak{M}}(1-e_X)R\Big) \oplus M' \cong \bigoplus_{i\in I}\bigg(\Big(\bigoplus_{\aleph_0}(1-e_X)R\Big) \oplus (1-\delta_i)R\bigg) \cong$$
$$\cong \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{\aleph_0}(1-e_X)R \cong \bigoplus_{\mathfrak{M}}(1-e_X)R;$$

аналогичный изоморфизм справедлив и для модуля A'.

Пусть дополнительное слагаемое M'' из разложения (15) имеет вид (7). В силу леммы 3 (примененной к $V = M'$) можно считать, что для любого $p \notin X$ кардинал $r_p(F_p)$ или строго больше $\mathfrak{M}$, или равен 0; аналогичное предположение применимо к модулю A''. При любом простом p выполнено $r_p(M) = r_p(M') + r_p(F_p)$. Для $p \in X$ отсюда сразу следует равенство $r_p(F_p) = r_p(M)$; для $p \notin X$ (с учетом наших дополнительных предположений) — $F_p = 0$ либо $r_p(F_p) = r_p(M)$ соответственно для случаев $r_p(M) = \mathfrak{M}$ и $r_p(M) > \mathfrak{M}$. Итак, ранги $r_p(F_p)$ однозначно определены системой инвариантов модуля M (совпадающей с системой инвариантов модуля A). Отсюда имеем $M'' \cong A''$ и, далее, $M \cong A$. □

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ — бесконечный кардинал конфинальности $\aleph_0$ и*

$$M = \bigoplus_{i\in I} M_i, \qquad \text{где } M_i = (1-\delta_i)R; \tag{17}$$

здесь $|I| = \mathfrak{M}$. Если $L = \{p \in P \mid r_p(M) < \mathfrak{M}\}$ и $\operatorname{supp}\delta_i' = \operatorname{supp}\delta_i \cap L$, то имеет место изоморфизм $M \cong \bigoplus\limits_{i\in I}(1-\delta_i')R$.

Доказательство. 1) Допустим сначала, что $X = P \setminus L$ конечно. Тогда имеем

$$M = M(1-e_X) \oplus Me_X \cong \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i(1-e_X)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in X}\bigoplus_{\mathfrak{M}} e_pR\Big) \cong$$
$$\cong \Big(\bigoplus_{i\in I}(1-e_X)(1-\delta_i)R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\mathfrak{M}} e_XR\Big) \cong \bigoplus_{i\in I}(1-\delta_i')R.$$

2) Предположим теперь, что множество X счетно; зафиксируем биекцию $\pi\colon \mathbf{N} \to X$. Пусть B_i обозначает идеал кольца R такой, что $M_i \oplus B_i = (1-\delta_i')R$. Нетрудно видеть, что имеет место прямое разложение $\bigoplus\limits_{i\in I} B_i = \bigoplus\limits_{k\in\mathbf{N}} F_k$, где F_k — это свободный модуль над кольцом $K_{\pi(k)}$ (при этом $r_{\pi(k)}(F_k) \leqslant |I| = \mathfrak{M}$).

Если $\mathfrak{M} = \aleph_0$, то положим $\mathfrak{N}_n = 1$ при всех $n \in \mathbf{N}$; в противном случае зафиксируем последовательность бесконечных кардиналов вида (8), для которой выполнено условие (9). Разобьем множество I на непересекающиеся подмножества $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ так, чтобы $|I_n| = \mathfrak{N}_n$; пусть A_n есть прямая сумма идеалов M_i по всем $i \in I_n$.

Введем на $\mathbf{N}^2$ отношение порядка $\prec$ так, чтобы упорядоченные множества $\langle\mathbf{N}^2, \prec\rangle$ и $\langle\mathbf{N}, <\rangle$ были изоморфны. Построим по индукции инъективное отображение $h\colon \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$. Пусть значения $h(k',l')$ уже определены для всех пар $(k',l') \prec (k,l)$; введем обозначение $H = \{h(k',l') \mid (k',l') \prec (k,l)\}$. Для наибольшего числа s из множества $H \cup \{1\}$ выполнены неравенства

$$\sum_{n\in H} r_{\pi(k)}(A_n) \leqslant \sum_{n\in H} |I_n| \leqslant |H| \cdot \mathfrak{N}_s \leqslant \max(|H|, \mathfrak{N}_s) < \mathfrak{M},$$

поэтому из $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} r_{\pi(k)}(A_n) = r_{\pi(k)}(M) = \mathfrak{M}$ следует $\sum\limits_{n\notin H} r_{\pi(k)}(A_n) = \mathfrak{M}$.

Из последнего равенства нетрудно вывести, что для некоторого числа $n \notin H$ выполнено $r_{\pi(k)}(A_n) \geqslant \mathfrak{N}_l$. Положим $h(k,l)$ равным наименьшему из чисел $n \in \mathbf{N} \setminus H$, обладающих указанным свойством. Итак, инъективное отображение h построено.

Для каждого $k \in \mathbf{N}$ мы обозначим через D_k объединение всех множеств $I_{h(k,l)}$, где l пробегает $\mathbf{N}$; пусть индексы $i \in I$, не вошедшие ни в одно из таких множеств D_k, образуют множество D_0. Через S_k обозначим прямую сумму всех идеалов M_i, где $i \in D_k$. Мы знаем, что при любых $k, l \in \mathbf{N}$ справедливо $r_{\pi(k)}(A_{h(k,l)}) \geqslant \mathfrak{N}_l$. Для каждого $k \in \mathbf{N}$ модуль S_k

изоморфен прямой сумме модулей $A_{h(k,l)}$ по всем $l \in \mathbf{N}$ и, следовательно,

$$\mathfrak{M} = |I| \geqslant |D_k| \geqslant r_{\pi(k)}(S_k) \geqslant \sum_{l \in \mathbf{N}} \mathfrak{N}_l = \mathfrak{M},$$

откуда $r_{\pi(k)}(S_k) = \mathfrak{M}$. Это означает, что множество $D = \{i \in D_k \mid r_{\pi(k)}(M_i) = 1\}$ имеет мощность $\mathfrak{M}$. Через M' обозначим прямую сумму идеалов M_i по всем $i \in D_k \setminus D$. Применяя теперь лемму 3 к модулям $V = \bigoplus\limits_{i \in D} M_i$ и $U = F_k$, получаем

$$S_k \oplus F_k \cong M' \oplus \Big(\bigoplus_{i \in D} M_i\Big) \oplus F_k \cong M' \oplus \Big(\bigoplus_{i \in D} M_i\Big) \cong S_k,$$

$$\bigoplus_{i \in I}(1 - \delta_i')R \cong M \oplus \Big(\bigoplus_{i \in I} B_i\Big) \cong S_0 \oplus \Big(\bigoplus_{k \in \mathbf{N}} S_k\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{k \in \mathbf{N}} F_k\Big) \cong S_0 \oplus \Big(\bigoplus_{k \in \mathbf{N}} S_k\Big) \cong M.$$

□

Суть доказанного утверждения можно сформулировать следующим образом: если дано разложение вида (17), то можно считать, что для соответствующего множества L имеет место свойство

$$\text{при любых } p \notin L \text{ и } i \in I \text{ выполнено } r_p(M_i) = 1. \tag{18}$$

Предложение 5. *Пусть обозначения $\mathfrak{M}$, M и L имеют тот же самый смысл, что и в предложении* 4, *причем множество L счетно и справедливо условие* (18). *Пусть, кроме того, $\mathfrak{M}_p = r_p(M)$, а обозначения $\mathfrak{N}_n$ имеют тот же смысл, что и в теореме* 2. *Тогда модуль M изоморфен модулю M', задаваемому условиями* (10) *и* (11).

Доказательство. Для $n \geqslant 1$ введем обозначение $P_n = \{p \in P \mid \mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_n\}$. Рассмотрим теперь два случая.

1) Пусть $\mathfrak{M} = |I| > \aleph_0$. Предположим сначала, что выполнено либо $\mathfrak{N}_1 = 0$ и $\mathfrak{N}_2 \geqslant \aleph_0$, либо $\mathfrak{N}_1 \geqslant \aleph_0$. Обозначим

$$D_n = \{i \in I \mid r_p(M_i) = 1 \text{ для некоторого } p \in L_n\}.$$

Поскольку P_n непусто, то хотя бы для одного $p \in L_n$ справедливо $r_p(M) = \mathfrak{N}_n$. Поэтому

$$\mathfrak{N}_n \leqslant |D_n| \leqslant |P_1| \cdot \mathfrak{N}_1 + |P_2| \cdot \mathfrak{N}_2 + ... + |P_n| \cdot \mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + ... + \mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_n,$$

так что $|D_n| = \mathfrak{N}_n$ (договоримся также, что D_0 — это пустое множество). Из счетности множества L получаем, что объединение возрастающей последовательности множеств D_n совпадает с I. Обозначим $I_n = D_n \setminus D_{n-1}$, тогда $\{I_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ есть разбиение множества I на непересекающиеся подмножества; при этом $|I_n| = |D_n| - |D_{n-1}| = \mathfrak{N}_n$.

Для всякого $n \in \mathbf{N}$ и всякого индекса $i \in I_n$ обозначим через B_i идеал кольца R такой, что $M_i \oplus B_i = (1 - \varepsilon_{n-1})R$. В этом случае для любых $j > n$, $p \in L_n$ и $i \in I_j$ выполнено $r_p(M_i \oplus B_i) = 0$. Следовательно, для $p \in P_n$ имеем

$$\sum_{i \in I} r_p(B_i) = \sum_{j \leqslant n} \sum_{i \in I_j} r_p(B_i) = \sum_{i \in D_n} r_p(B_i) \leqslant |D_n| = \mathfrak{N}_n.$$

Далее, в силу условия (18) для любых $p \notin L$ и $i \in I$ справедливо $r_p(B_i) = 0$. Поскольку все идеалы B_i имеют псевдорациональный ранг 0, можно записать

$$\bigoplus_{i \in I} B_i = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \bigoplus_{p \in P_n} F_p,$$

где для всякого $p \in P_n$ модуль F_p есть свободный K_p-модуль ранга $r_p(F_p) \leqslant \mathfrak{N}_n$.

Через A_n мы обозначим прямую сумму идеалов M_i по всем $i \in I_n$, тогда $A_n\varepsilon_{n-1} = 0$. Пусть δ есть идемпотент с носителем P_n; для $p \in P_n$ из $r_p(A_n) \leqslant |I_n| = \mathfrak{N}_n$ и

$$\mathfrak{N}_n = r_p(M) = \sum_{i\in I} r_p(M_i) = \sum_{i\in D_n} r_p(M_i) \leqslant \sum_{i\in I_n} r_p(M_i) + |D_{n-1}| = r_p(A_n) + \mathfrak{N}_{n-1}$$

мы получаем $r_p(A_n) = \mathfrak{N}_n$, т.е. $A_n\delta \cong \bigoplus\limits_{\mathfrak{N}_n} \bigoplus\limits_{p\in P_n} K_p$. Применим к модулю $V = A_n\delta$ лемму 3:

$$A_n \oplus \Big(\bigoplus_{p\in P_n} F_p\Big) \cong A_n(1-\delta) \oplus \Big(A_n\delta \oplus \Big(\bigoplus_{p\in P_n} F_p\Big)\Big) \cong A_n(1-\delta) \oplus A_n\delta = A_n$$

(эти изоморфизмы остаются справедливыми, если $n = 1$ и $\mathfrak{N}_1 = 0$). Отсюда уже следует

$$\bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\bigoplus_{\mathfrak{N}_n}(1-\varepsilon_{n-1})R \cong \bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\bigoplus_{i\in I_n}(M_i\oplus B_i) \cong \Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\bigoplus_{i\in I_n} M_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I} B_i\Big) =$$
$$= \Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{N}} A_n\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\bigoplus_{p\in P_n} F_p\Big) \cong \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} A_n \cong \bigoplus_{i\in I} M_i = M.$$

Предположим теперь, что (8) есть произвольная возрастающая последовательность со свойством (9), и пусть $s \geqslant 0$ — наибольшее целое число, для которого кардинал $\mathfrak{N}_s$ конечен. Применяя к модулю $M(1-\varepsilon_s)$ рассуждения, приведенные выше, приходим к изоморфизму

$$M(1-\varepsilon_s) \cong \bigoplus_{n>s}\bigoplus_{\mathfrak{N}_n}(1-\varepsilon_{n-1})R. \tag{19}$$

Далее, группируя слагаемые вида K_p в прямом разложении модуля $M\varepsilon_s$, получаем

$$M\varepsilon_s \cong \bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\mathfrak{N}_n}\bigoplus_{p\in P_n} K_p \cong \bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\tau_n}(1-\varepsilon_{n-1})R\varepsilon_s.$$

Из равенств $\tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_s + \mathfrak{N}_{s+1} = \mathfrak{N}_s + \mathfrak{N}_{s+1} = \mathfrak{N}_{s+1}$ и условия (19) следует

$$M(1-\varepsilon_s) \cong M(1-\varepsilon_s) \oplus \Big(\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\tau_n}(1-\varepsilon_s)R\Big),$$

так что справедливы изоморфизмы

$$M = M(1-\varepsilon_s)\oplus M\varepsilon_s \cong M(1-\varepsilon_s) \oplus \Big(\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\tau_n}(1-\varepsilon_s)R\Big) \oplus M\varepsilon_s \cong$$
$$\cong \Big(\bigoplus_{n>s}\bigoplus_{\mathfrak{N}_n}(1-\varepsilon_{n-1})R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\tau_n}(1-\varepsilon_s)R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\tau_n}(1-\varepsilon_{n-1})R\varepsilon_s\Big) \cong$$
$$\cong \Big(\bigoplus_{n>s}\bigoplus_{\tau_n}(1-\varepsilon_{n-1})R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\tau_n}(1-\varepsilon_{n-1})R\Big) \cong \bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\bigoplus_{\tau_n}(1-\varepsilon_{n-1})R = M'.$$

2) Пусть $\mathfrak{M} = |I| = \aleph_0$. Полагая $M'_i = (1-\varepsilon_{n-1})R$, занумеруем с помощью множества индексов I все идеалы кольца R, входящие в прямое разложение (11) модуля M':

$$M' = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\bigoplus_{\tau_n}(1-\varepsilon_{n-1})R \cong \bigoplus_{i\in I} M'_i.$$

Как мы знаем из доказательства теоремы 2, модуль M' имеет ту же систему инвариантов, что и M (поскольку при любом простом $p \notin L$ выполнено $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}$).

Идеал $M_i \cap M_i'$ имеет вид $(1-\delta_i')R$, при этом в силу условия (18) выполнено включение $\operatorname{supp}\delta_i' \subset L$. Далее, существуют идеалы A_i и A_i' кольца R такие, что $M_i = (1-\delta_i')R \oplus A_i$ и $M_i' = (1-\delta_i')R \oplus A_i'$. Через A и A' мы обозначим прямую сумму идеалов A_i (соответственно идеалов A_i') по всем $i \in I$. Тогда

$$M \cong \Big(\bigoplus_{i\in I}(1-\delta_i')R\Big) \oplus A, \qquad M' \cong \Big(\bigoplus_{i\in I}(1-\delta_i')R\Big) \oplus A';$$

очевидно, что A и A' — это проективные модули псевдорационального ранга 0 такие, что $r_p(A) = r_p(A') = 0$ при любом простом $p \notin L$.

Для всякого $p \in L$ кардинальное число $r_p(M) = r_p(M')$ конечно и, следовательно,

$$r_p(A) = r_p(M) - \sum_{i\in I} r_p\big((1-\delta_i')R\big) = r_p(M') - \sum_{i\in I} r_p\big((1-\delta_i')R\big) = r_p(A').$$

Отсюда $A \cong A'$, а значит, $M \cong M'$. $\square$

Доказательство теоремы 1. С учетом рассмотренных нами ранее случаев достаточно ограничиться ситуацией, когда $r(M) = \mathfrak{M}$ есть бесконечное кардинальное число счетной конфинальности.

Пусть проективный модуль M задан условием (5), где $|I| = \mathfrak{M}$, и пусть $r_p(M) = \mathfrak{M}_p$. Будем последовательно "улучшать" свойства разложения (5). Введем обозначения

$$\mathfrak{M}_p' = \sum_{i\in I} r_p(M_i), \qquad X = \{p \in P \mid \mathfrak{M}_p' < \mathfrak{M}\}, \qquad L = \{p \in P \mid \mathfrak{M}_p < \mathfrak{M}\};$$

тогда по предложению 4 можно считать, что при любых $p \notin X$ и $i \in I$ выполнено условие $r_p(M_i) = 1$. Ясно, что $L = \{p \in X \mid r_p(F_p) < \mathfrak{M}\}$; обозначим $Y = X \setminus L$.

Зададим идемпотенты δ_i условием $\operatorname{supp}\delta_i = \{p \in Y \mid r_p(M_i) = 0\}$. Так как для всякого $p \in X$ (и, в частности, для $p \in Y$) выполнено $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_p' = \mathfrak{M}$, имеем

$$\bigoplus_{i\in I} \delta_i R \cong \bigoplus_{p\in Y}\bigoplus_{\mathfrak{M}} K_p.$$

Заметим, что для любых $p \notin L$ и $i \in I$ справедливо равенство $r_p(M_i \oplus \delta_i R) = 1$. Учитывая, что при всех $p \in Y$ выполнено $r_p(F_p) \geqslant \mathfrak{M}$, получаем изоморфизм

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in Y} F_p\Big) \cong \Big(\bigoplus_{i\in I}\Big(M_i \oplus \delta_i R\Big)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in Y} F_p\Big).$$

Таким образом, в разложении (5) можно заменить идеалы M_i идеалами $M_i \oplus \delta_i R$. Поэтому далее можно считать, что справедливо свойство (18).

Для $p \in L$ множество индексов $I_p = \{i \in I \mid r_p(M_i) = 0\}$ имеет мощность $\mathfrak{M}$ (если бы выполнялось неравенство $|I_p| < \mathfrak{M}$, то из условия $\mathfrak{M} - |I_p| = \mathfrak{M}$ следовало бы $r_p(M) \geqslant \mathfrak{M}$, а это невозможно). Итак, при любом $p \in L$ имеем $|I_p| = \mathfrak{M} > \mathfrak{M}_p \geqslant r_p(F_p)$. Отсюда можно вывести, что существует прямое разложение вида

$$\bigoplus_{p\in L} F_p \cong \bigoplus_{i\in I} \delta_i' R$$

такое, что для всякого $i \in I$ выполнено $M_i \cap \delta'_i R = 0$. Это позволяет перейти от исходного разложения (5) к аналогичному разложению

$$M \cong \Big(\bigoplus_{i\in I}\big(M_i \oplus \delta'_i R\big)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\notin L} F_p\Big).$$

Идеалы $M_i \oplus \delta'_i R$ вновь имеют вид (6), т.е. далее мы можем считать, что разложение (5) дополнительно обладает тем свойством, что при любом $p \in L$ выполнено $F_p = 0$.

Наконец, в силу леммы 3 можно считать, что в разложении (5) при любом $p \notin L$ либо $r_p(F_p) > \mathfrak{M}$, либо $F_p = 0$. Рассмотрим теперь два случая.

1) Предположим, что множество L конечно. Имеем

$$M \cong \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\notin L} F_p\Big) \cong \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i e_L\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i(1-e_L)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\notin L} F_p\Big) \cong$$
$$\cong \Big(\bigoplus_{p\in L}\bigoplus_{\mathfrak{M}_p} K_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\mathfrak{M}}(1-e_L)R\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\notin L} F_p\Big).$$

Для любого простого $p \notin L$ выполнено $\mathfrak{M}_p = r_p(M) = \mathfrak{M} + r_p(F_p)$. Отсюда с учетом наших дополнительных предположений получаем $F_p = 0$ либо $r_p(F_p) = \mathfrak{M}_p$ соответственно для случаев $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_p > \mathfrak{M}$. Следовательно, вид проективного R-модуля M однозначно определяется его системой инвариантов, что и требовалось.

2) Пусть множество L является счетным. Применяя к прямой сумме всех идеалов M_i предложение 5 и повторяя приведенные выше рассуждения о рангах $r_p(F_p)$, получаем, что рассматриваемый модуль M задается условиями (10)–(13), т.е. определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Ясно, что полученные результаты останутся верными, если при построении K, T и R под P понимать не множество всех простых чисел, а произвольное бесконечное подмножество этого множества.

Список литературы

[1] A.A.Fomin, Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers, In: Abelian Groups and Modules, Basel et al., Birkhäuser, 1999, 87–100.

[2] П.А.Крылов, Е.Г.Пахомова, Е.И.Подберезина, Об одном классе смешанных абелевых групп, *Вестн. Томского ун-та*, **269**(2000), 47–51.

[3] А.В.Царев, Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел, *Мат. заметки*, **80**(2006), №3, 437–448.

[4] A.A.Fomin, Quotient divisible mixed groups, In: Abelian Groups, Rings and Modules, *Contemp. Math.*, **273**(2001), 117–128.

[5] А.Картан, С.Эйленберг, Гомологическая алгебра, М., Изд-во иностр. лит., 1960.

Projective Modules over the Ring of Pseudorational Numbers

Egor A. Timoshenko

We prove the structure theorems which give a full description of projective modules over the ring of pseudorational numbers. We construct a complete system of invariants for such modules.

Keywords: projective module, ring of pseudorational numbers, system of invariants.