Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(4), 519–526

УДК 517.994

Решение стационарной сопряженной задачи теплообмена в конечных цилиндрах

Евгений П. Магденко*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.05.2011, окончательный вариант 25.06.2011, принята к печати 10.07.2011

Решена задача о стационарном распределении тепла для двух контактирующих цилиндров, когда температура на всей границе цилиндров известна. На поверхности раздела заданы условия сопряжения: равенство температур и потоков тепла. Найдено стационарное распределение температур в виде рядов Фурье. Доказана их сходимость в функциональных пространствах и единственность решения.

Ключевые слова: сопряженная краевая задача, уравнение Лапласа, поверхность раздела, априорная оценка.

1. Постановка задачи. Формальное решение в виде рядов

При хранении жидких сред в больших сосудах цилиндрической формы часто возникает ситуация расслоения этих сред. В результате в сосуде образуется поверхность раздела (контакта) двух и более различных фракций. Система может находиться в равновесии даже при наличии теплообмена между фракциями.

Пусть имеются два тела цилиндрической формы ($\Omega_1 = (0,a) \times (0,2\pi) \times (-h_1, 0)\,,\ \Omega_2 = (0,a) \times (0,2\pi) \times (0,h_2)$), которые контактируют друг с другом. Обозначим через $\Theta_j\,(r,z)$ — стационарное распределение температур в $\Omega_j,\ j = 1,2$. Внутренние источники тепла отсутствуют. Тогда уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Theta_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Граничные условия таковы ($k_1,\ k_2$ — коэффициенты теплопроводности сред):

$$\begin{gathered} \Theta_j(a,z) = \bar{\Theta}_j(z), \qquad \Theta_1(r,-h_1) = \tilde{\Theta}_1(r), \qquad \Theta_2(r,h_2) = \tilde{\Theta}_2(r), \\ \Theta_1(r,0) = \Theta_1(r,0), \qquad k_1\frac{\partial \Theta_1}{\partial z}(r,0) = k_2\frac{\partial \Theta_2}{\partial z}(r,0). \end{gathered} \tag{2}$$

Первые три из них означают, что на всей поверхности цилиндра задана температура, а третье и четвертое — равенство температур и потоков тепла на поверхности контакта (раздела двух сред) $z = 0$. Заметим, что для непрерывности температур должны быть выполнены условия согласования

$$\bar{\Theta}_1\,(-h_1) = \tilde{\Theta}_1\,(a)\,, \qquad \bar{\Theta}_2\,(h_2) = \tilde{\Theta}_2\,(a)\,, \qquad k_1\frac{\partial \bar{\Theta}_1}{\partial z}\,(0) = k_2\frac{\partial \bar{\Theta}_2}{\partial z}\,(0)\,. \tag{3}$$

*mag_djin@mail.ru

Поскольку поставленная задача является линейной, будем сначала искать её решение при $\bar{\Theta}_j(z) \equiv 0$ методом разделения переменных. Найдем частные решения уравнений (1) вида

$$\Theta_j = R_j(r)\, Z_j(z). \tag{4}$$

Подстановка (4) в (1) дает

$$\frac{1}{R_j}\left(R_{jrr} + \frac{1}{r}R_{jr}\right) = -\frac{Z_{jzz}}{Z_j} = -\lambda_j,$$

откуда для $R_j(r)$ получим краевую задачу

$$\begin{gathered} R_{jrr} + \frac{1}{r}R_{jr} + \lambda_j R_j = 0,\ 0 < r < a \\ R_j(a) = 0, \\ |R_j(0)| < \infty \text{ при } 0 < r < a. \end{gathered} \tag{5}$$

Пусть $\sqrt{\lambda_j}a = \mu_m$, где μ_m — нули $J_0(\mu_m) = 0$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_m = (\mu_m/a)^2 > 0$ — счетное множество собственных значений, которым соответствуют собственные функции $(m = 1, 2, ...)$. Ограниченные при $r = 0$ решения задачи (5) с точностью до мультипликативной постоянной есть

$$R_j(r) = J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right). \tag{6}$$

Общее решение уравнения $Z_j'' - \lambda_m Z_j = 0$ таково

$$Z_{jm} = C_{jm} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_m} z + D_{jm} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_m} z. \tag{7}$$

Таким образом, получено счетное число решений вида (4)

$$\Theta_{jm}(r,z) = \left(C_{jm} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_m} z + D_{jm} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_m} z\right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right). \tag{8}$$

Составим формальный ряд

$$\Theta_j(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_{jm} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_m} z + D_{jm} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_m} z\right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right). \tag{9}$$

По построению $\Theta_j(r,z)$ удовлетворяет уравненям (1) и условиям на боковой поверхности $\Theta_j(a,z) = 0$. Четыре постоянные C_{jm}, D_{jm} находятся из оставшихся условий (2). Из равенства температур при $z = 0$ имеем

$$D_{1m} = D_{2m}. \tag{10}$$

Обозначим $k = k_1/k_2$, тогда из равенств потоков тепла

$$kC_{1m} = C_{2m}. \tag{11}$$

Задание на верхнем и нижнем основании дают с учетом (10), (11) равенства

$$\begin{gathered} \sum_{m=1}^{\infty} \left(-C_{1m} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_m} h_1 + D_{1m} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_m} h_1\right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) = \tilde{\Theta}_1(r), \\ \sum_{m=1}^{\infty} \left(kC_{1m} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_m} h_2 + D_{1m} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_m} h_2\right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) = \tilde{\Theta}_2(r). \end{gathered}$$

Положим для краткости

$$\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}h_1 = a_m, \qquad \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}h_2 = c_m, \qquad \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_m}h_1 = b_m, \qquad \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_m}h_2 = d_m,$$

причем $a_m,\ b_m,\ c_m,\ d_m$ строго положительны. Тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty}\left(-C_{1m}a_m + D_{1m}b_m\right)J_0\left(\mu_m\frac{r}{a}\right) = \tilde{\Theta}_1(r),\\ &\sum_{m=1}^{\infty}\left(kC_{1m}c_m + D_{1m}d_m\right)J_0\left(\mu_m\frac{r}{a}\right) = \tilde{\Theta}_2(r). \end{aligned} \tag{12}$$

Левые части (12) — это ряды Фурье известных функций $\tilde{\Theta}_j\,(r) \in L_2\,(r;0;a)$ по полной системе $J_0\,(\mu_m r/a)$, а в этом пространстве норма порождена скалярным произведением $(f,g) = \int_0^a r f\,(r)\,g\,(r)\,dr$ и [1]

$$\left\|J_0\left(\mu_m\frac{r}{a}\right)\right\|^2 = \int\limits_0^a rJ_0^2\left(\mu_m\frac{r}{a}\right)dr = \frac{a^2}{2}J_1^2\left(\mu_m\right). \tag{13}$$

Поэтому из (12) получим

$$\begin{aligned} D_{1m} = D_{2m} &= \frac{2}{kb_mc_m + a_md_m}\left(\frac{kc_m\left(\tilde{\Theta}_1, J_0\left(\mu_m\frac{r}{a}\right)\right) + a_m\left(\tilde{\Theta}_2, J_0\left(\mu_m\frac{r}{a}\right)\right)}{a^2J_1^2\left(\mu_m\right)}\right),\\ C_{1m} = \frac{1}{k}C_{2m} &= \frac{2}{kb_mc_m + a_md_m}\left(\frac{b_m\left(\tilde{\Theta}_2, J_0\left(\mu_m\frac{r}{a}\right)\right) - d_m\left(\tilde{\Theta}_1, J_0\left(\mu_m\frac{r}{a}\right)\right)}{a^2J_1^2\left(\mu_m\right)}\right) \end{aligned}$$

и ряды для $\Theta_j\,(r,z)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Theta_1\,(r,z) = \frac{2}{a^2}\sum_{m=1}^{\infty}&\frac{1}{\left(kb_mc_m + a_md_m\right)J_1^2\left(\mu_m\right)}\left(\left(\tilde{\Theta}_2, J_0\right)\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}\left(h_1+z\right) + \right.\\ &\left. + \left(\tilde{\Theta}_1, J_0\right)\left(k\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}h_2\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_m}z - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_m}h_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}z\right)\right)J_0\left(\mu_m\frac{r}{a}\right),\\ \Theta_2\,(r,z) = \frac{2}{a^2}\sum_{m=1}^{\infty}&\frac{1}{\left(kb_mc_m + a_md_m\right)J_1^2\left(\mu_m\right)}\left(\left(b_m\left(\tilde{\Theta}_2, J_0\right) - d_m\left(\tilde{\Theta}_1, J_0\right)\right)k\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}z + \right.\\ &\left. + \left(kc_m\left(\tilde{\Theta}_1, J_0\right) + a_m\left(\tilde{\Theta}_2, J_0\right)\right)\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_m}z\right)J_0\left(\mu_m\frac{r}{a}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Теперь пусть $\bar{\Theta}_j\,(z) \neq 0,\ \tilde{\Theta}_j\,(r) = 0$. Воспользуемся в этом случае решением уравнений (1) для конечных цилиндров [2]:

1) в области Ω_1:

$$\Theta_1\,(r,z) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_0\left(\frac{\pi mr}{h_1}\right)}{I_0\left(\frac{\pi ma}{h_1}\right)}A_{1m}\sin\frac{\pi mz}{h_1} + \sum_{m=1}^{\infty}J_0\left(\frac{\mu_m r}{a}\right)B_{1m}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_m(h_1+z)}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_m h_1}{a}\right)}; \tag{15}$$

2) в области Ω_2:

$$\Theta_2\,(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_0\left(\frac{\pi mr}{h_2}\right)}{I_0\left(\frac{\pi ma}{h_2}\right)}A_{2m}\sin\frac{\pi mz}{h_2} + \sum_{m=1}^{\infty}J_0\left(\frac{\mu_m r}{a}\right)B_{2m}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_m(h_2-z)}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_m h_2}{a}\right)} \tag{16}$$

с неизвестными постоянными A_{jm}, B_{jm}, которые находятся из граничных условий (2). Из задания температур на боковых поверхностях при $r = a$ имеем

$$\bar{\Theta}_1(z) = -\sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} \sin\frac{\pi m z}{h_1}, \qquad \bar{\Theta}_2(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m} \sin\frac{\pi m z}{h_2},$$

откуда

$$A_{1m} = -\frac{2}{h_1}\int_{-h_1}^{0} \bar{\Theta}_1(z) \sin\frac{\pi m z}{h_1}\, dz, \qquad A_{2m} = \frac{2}{h_2}\int_{0}^{h_2} \bar{\Theta}_2(z) \sin\frac{\pi m z}{h_2}\, dz. \tag{17}$$

Из равенства температур при $z = 0$ имеем $B_{1m} = B_{2m}$. Из равенства потоков тепла

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{1m}\frac{\mu_m}{a}\left(k \operatorname{cth}\left(\frac{\mu_m h_1}{a}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\mu_m h_2}{a}\right)\right) J_0\left(\frac{\mu_m r}{a}\right) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k\pi n A_{1n}}{h_1 I_0\left(\frac{\pi n a}{h_1}\right)} I_0\left(\frac{\pi n r}{h_1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n A_{2n}}{h_2 I_0\left(\frac{\pi n a}{h_2}\right)} I_0\left(\frac{\pi n r}{h_2}\right). \tag{18}$$

Разложим в ряд

$$I_0\left(\frac{\pi n r}{h_j}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{jm} J_0\left(\frac{\mu_m r}{a}\right),$$

где в [3] $q_{jm} = \frac{2}{a^2 J_1^2(\mu_m)}\int_0^a r J_0\left(\frac{\mu_m r}{a}\right) I_0\left(\frac{\pi n r}{h_j}\right) dr = \frac{2h_j^2 \mu_m}{\left(h_j^2\mu_m^2 + \pi^2 n^2 a^2\right) J_1(\mu_m)} I_0\left(\frac{\pi n a}{h_j}\right)$.

Теперь равенство (18) примет вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{1m}\frac{\mu_m}{a}\left(kcth\left(\frac{\mu_m h_1}{a}\right) + cth\left(\frac{\mu_m h_2}{a}\right)\right) J_0\left(\frac{\mu_m r}{a}\right) = \\ = 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m}{J_1(\mu_m)}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{k h_1 A_{1n}}{h_1^2\mu_m^2 + \pi^2 n^2 a^2} + \frac{h_2 A_{2n}}{h_2^2\mu_m^2 + \pi^2 n^2 a^2}\right)\right] J_0\left(\frac{\mu_m r}{a}\right).$$

Положим

$$H_{jm} = \frac{\mu_m}{J_1(\mu_m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n A_{jn}}{h_j^2\mu_m^2 + \pi^2 n^2 a^2}, \tag{19}$$

тогда

$$B_{1m} = B_{2m} = \frac{2\pi a}{\mu_m\left(k \operatorname{cth}\left(\frac{\mu_m h_1}{a}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\mu_m h_2}{a}\right)\right)}\left(k h_1 H_{1m} + h_2 H_{2m}\right). \tag{20}$$

Получили формальное решение при $\bar{\Theta}_j(z) \neq 0$, $\tilde{\Theta}_j(r) = 0$ в виде рядов (15), (16) с коэффициентами (17), (19), (20).

2. Априорные оценки

Теперь докажем, что ряды (14) — (16) сходятся в пространстве $L_2[r;(0,a)\times(-h_1,0)]$, $L_2[r;(0,a)\times(0,h_2)]$. Рассмотрим ряд для $\Theta_j(r,z)$ из (14). Пусть $\tilde{\Theta}_j(r) \in L_2[r;(0,a)] : \tilde{\Theta}_j =$

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_{jm} J_0 \left(\mu_m r/a\right)$. Тогда

$$\Theta_1 (r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{kc_m b_m + a_m d_m} \left[(f_{2m} b_m - f_{1m} d_m) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_m} z + \right. \\ \left. + (k f_{1m} c_m + f_{2m} a_m) \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_m} z \right] J_0 \left(\frac{\mu_m r}{a} \right),$$

$$\Theta_2 (r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{kc_m b_m + a_m d_m} \left[k (f_{2m} b_m - f_{1m} d_m) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_m} z + \right. \\ \left. + (k f_{1m} c_m + f_{2m} a_m) \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_m} z \right] J_0 \left(\frac{\mu_m r}{a} \right).$$

Имеем для первого ряда

$$\|\Theta_1 (r,z)\|^2_{L_2[(0,a)\times(-h_1,0)]} = \int\limits_0^a \int\limits_{-h_1}^0 \int\limits_0^{2\pi} r \Theta_1^2 d\varphi dz dr =$$

$$= \pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\mu_m)}{(kc_m b_m + a_m d_m)^2} \left(\frac{h_1}{2} \left(K_m^2 - B_m^2\right) + \frac{a_m}{2\sqrt{\lambda_m}} \left[b_m \left(K_m^2 + B_m^2\right) - 2 a_m B_m K_m \right] \right),$$

где $B_m = f_{2m} b_m - f_{1m} d_m, \ K_m = k f_{1m} c_m + f_{2m} a_m$. Поскольку

$$K_m^2 - B_m^2 = f_{2m}^2 + f_{1m}^2 \left(k^2 c_m^2 - d_m^2\right) + 2 f_{1m}^2 f_{2m}^2 (k c_m a_m + b_m d_m);$$

$$b_m \left(K_m^2 + B_m^2\right) - 2 a_m B_m K_m = b_m f_{2m}^2 + f_{1m}^2 \left[b_m \left(d_m^2 + k^2 c_m^2\right) + 2 k c_m d_m a_m \right] - 2 f_{1m} f_{2m} d_m,$$

то квадрат нормы имеет представление

$$\|\Theta_1 (r,z)\|^2_{L_2[(0,a)\times(-h_1,0)]} = \frac{\pi a^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\mu_m)}{(kc_m b_m + a_m d_m)^2} \left(h_1 \left[f_{2m}^2 + f_{1m}^2 \left(k^2 c_m^2 - d_m^2\right) + \right.\right. \\ \left. + 2 f_{1m}^2 f_{2m}^2 (k c_m a_m + b_m d_m) \right] + \frac{a_m}{\sqrt{\lambda_m}} \left[b_m f_{2m}^2 + \right. \\ \left.\left. + f_{1m}^2 \left(b_m \left(d_m^2 + k^2 c_m^2\right) + 2 k c_m d_m a_m \right) - 2 f_{1m} f_{2m} d_m \right] \right). \tag{21}$$

По условию $\left\|\tilde{\Theta}_j\right\|^2 = a^2/2 \sum\limits_{m=1}^{\infty} f_{jm}^2 J_1^2(\mu_m) < \infty$. Таким образом, ряд (21) заведомо сходится, так как $\mu_m \sim m\pi$ при $m >> 1$ знаменатель имеет порядок $exp\left[(h_1 + h_2) m\pi/a\right]$; такой же максимальный порядок имеет и второе слагаемое во второй квадратной скобке (21) при f_{1m}^2, откуда $\|\Theta_1\| \leqslant C_1 \left(\left\|\tilde{\Theta}_1\right\| + \left\|\tilde{\Theta}_2\right\| \right)^{1/2}$. Аналогично доказывается, что и $\|\Theta_2\| \leqslant C_2 \left(\left\|\tilde{\Theta}_1\right\| + \left\|\tilde{\Theta}_2\right\| \right)^{1/2}$, где $C_1, \ C_2$ - положительные постоянные.

Более того, сходятся и ряды для Θ_{jz}, Θ_{jr}. При дифференцировании по z имеем для Θ_1:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_m}}{kc_m b_m + a_m d_m} \left(B_m \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_m} z + K_m \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_m} z \right) J_0 \left(\frac{\mu_m r}{a} \right).$$

Ясно, что $\partial\Theta_1/\partial z \in L_2\left[(0,a)\times(-h_1,0)\right]$, когда сходятся ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 f_{jm}^2 J_1^2(\mu_m). \tag{22}$$

Что касается производной $\partial\Theta_1/\partial r$, то

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial r} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_m}}{kc_m b_m + a_m d_m} \left(B_m \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_m} z + K_m \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_m} z \right) J_1 \left(\frac{\mu_m r}{a} \right),$$

значит, $\partial\Theta_1/\partial r \in L_2\left[(0,a)\times(-h_1,0)\right]$, когда сходятся ряды $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\mu_m^2 f_{jm}^2\left[J_1'\left(\mu_m\right)\right]^2$, но $J_1'\left(\mu_m\right)=J_0\left(\mu_m\right)-J_1\left(\mu_m\right)/\mu_m=-J_1\left(\mu_m\right)/\mu_m$, так как $J_0\left(\mu_m\right)=0$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_{jm}^2 J_1^2\left(\mu_m\right)$ сходится в силу (22). Отсюда следует, что $\nabla\Theta_1\in L_2\left[(0,a)\times(-h_1,0)\right]$, если выполняется (22), то есть $\tilde{\Theta}_j\in H^1\left[(0,a)\times(-h_1,0)\right]$. Значит, $\Theta_j\left(r,z\right)$ — обобщенное решение нашей задачи.

Теперь докажем сходимость рядов (15), (16) в $L_2\left[r;(0,a)\times(-h_1,0)\right]$, $L_2\left[r;(0,a)\times(0,h_2)\right]$ для случая, когда $\bar{\Theta}_j\left(z\right)\neq 0$, $\tilde{\Theta}_j\left(r\right)=0$. Имеем, например для $\Theta_2\left(r,z\right)$:

$$\left\|\Theta_2\left(r,z\right)\right\|^2_{L_2[r;(0,a)\times(0,h_2)]}\leqslant$$
$$\leqslant\pi\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{2m}^2h_2}{2}\frac{I_1^2\left(\frac{\pi ma}{h_2}\right)}{I_0^2\left(\frac{\pi ma}{h_2}\right)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}^2a^2}{2\mu_m}J_1^2\left(\mu_m\right)\frac{a\,\mathrm{sh}\left(\frac{2\mu_m h_2}{a}\right)-2\mu_m h_2}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{\mu_m h_2}{a}\right)}\right).$$

Пусть функции $\bar{\Theta}_1\in L_2\left(-h_1,0\right)$, $\bar{\Theta}_2\in L_2\left(0,h_2\right)$, тогда из [4] имеем $\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_{jm}^2<\infty$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}H_{jm}\leqslant m^{1/2}/\pi h_j a\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{jn}$, где A_{jm}, H_{jm} определяются соответственно формулами (17) и (19). Далее

$$\mathrm{sh}\left(\frac{2\mu_m h_2}{a}\right)\sim e^{2\pi m h_2/a},\ J_1\left(\mu_m\right)\sim\frac{(-1)^{m+1}}{\pi\sqrt{m}},\ m>>1;$$
$$I_\nu\left(x\right)\approx\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}},\ x>>1,\ \nu\geqslant 0.$$

Подставляя эти выражения в $\left\|\Theta_2\left(r,z\right)\right\|^2_{L_2[r;(0,a)\times(0,h_2)]}$, получим оценку

$$\left\|\Theta_2\left(r,z\right)\right\|^2_{L_2[r;(0,a)\times(0,h_2)]}<\frac{4}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\left(k\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}\right)^2+\frac{\pi h_2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}A_{2m}^2<\infty,$$

таким образом, ряд $\Theta_2\left(r,z\right)$ сходится в пространстве $L_2\left[r;(0,a)\times(0,h_2)\right]$. Аналогично доказывается сходимость для ряда $\Theta_1\left(r,z\right)$ в пространстве $L_2\left[r;(0,a)\times(-h_1,0)\right]$.

При дифференцировании по z имеем для Θ_2:

$$\frac{\partial\Theta_2}{\partial z}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\pi m A_{2m}}{h_2}\frac{I_0\left(\frac{\pi mr}{h_2}\right)}{I_0\left(\frac{\pi ma}{h_2}\right)}\cos\frac{\pi mz}{h_2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_m B_{2m}J_0\left(\frac{\mu_m r}{a}\right)}{a}\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\mu_m(h_2-z)}{a}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_m h_2}{a}\right)}.$$

Тогда

$$\left\|\frac{\partial\Theta_2}{\partial z}\right\|^2_{L_2[r;(0,a)\times(0,h_2)]}\leqslant\pi\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{2m}^2\pi^2m^2}{2h_2}\frac{I_1^2\left(\frac{\pi mr}{h_2}\right)}{I_0^2\left(\frac{\pi ma}{h_2}\right)}+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}^2\mu_m^2}{2\mu_m}J_1^2\left(\mu_m\right)\frac{a\,\mathrm{sh}\left(\frac{2\mu_m h_2}{a}\right)+2\mu_m h_2}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{\mu_m h_2}{a}\right)}\right).$$

Ясно, что при $\bar{\Theta}_2\left(z\right)\in H^1\left(\Omega_2\right)$

$$\left\|\frac{\partial\Theta_2}{\partial z}\right\|^2_{L_2[r;(0,a)\times(0,h_2)]}<\sum_{m=1}^{\infty}m^2A_{2m}^2+\sum_{m=1}^{\infty}B_{2m}^2<\infty,$$

таким образом, ряд для $\partial\Theta_2/\partial z$ сходится в пространстве $L_2\left[r;(0,a)\times(0,h_2)\right]$. Что касается производной $\partial\Theta_2/\partial r$, то

$$\frac{\partial\Theta_2}{\partial r}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\pi m A_{2m}}{h_2}\frac{I_1\left(\frac{\pi m r}{h_2}\right)}{I_0\left(\frac{\pi m a}{h_2}\right)}\sin\frac{\pi m z}{h_2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_m B_{2m}J_1\left(\frac{\mu_m r}{a}\right)}{a}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_m(h_2-z)}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_m h_2}{a}\right)}.$$

Тогда

$$\left\|\frac{\partial\Theta_2}{\partial r}\right\|^2_{L_2[r;(0,a)\times(0,h_2)]}\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{2m}^2\pi^2m^2}{2h_1^3I_0^2\left(\frac{\pi m a}{h_1}\right)}\left(\left(\frac{h_1}{\pi m a}I_1\left(\frac{\pi m a}{h_1}\right)+I_2\left(\frac{\pi m a}{h_1}\right)\right)^2+\right.$$

$$\left.+I_1^2\left(\frac{\pi m a}{h_1}\right)\left(1-\frac{h_1^2}{\pi m^2a^2}\right)\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_m^2B_{2m}^2}{2a^2\mu_m}\left(\left(\frac{1}{\mu_m}J_1\left(\mu_m\right)-J_2\left(\mu_m\right)\right)^2+\right.$$

$$\left.+J_1^2\left(\mu_m\right)\left(1-\frac{1}{\mu_m^2}\right)\right)\frac{a\operatorname{sh}\left(\frac{2\mu_m h_2}{a}\right)-2\mu_m h_2}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{\mu_m h_2}{a}\right)}.$$

Применяя те же рассуждения, что и для ряда $\partial\Theta_2/\partial z\,(r,z)$, получаем, что

$$\|\partial\Theta_2/\partial r\|^2_{L_2[r;(0,a)\times(0,h_2)]}<\infty,$$

то есть ряд $\partial\Theta_2/\partial r\,(r,z)$ сходится в пространстве $L_2\left[r;(0,a)\times(0,h_2)\right]$.

Отсюда следует, что ряд для $\Theta_2\,(r,z)$ сходится в пространстве $H^1\left(\Omega_2\right)$. Аналогично доказывается сходимость ряда $\Theta_1\,(r,z)$ в пространстве $H^1\left(\Omega_1\right)$. Таким образом, доказано, что ряды (14) – (16) представляют обобщенное решение исходной задачи.

3. Единственность решения

Рассмотрим стационарную задачу

$$k_j\Delta\Theta_j=0, \tag{23}$$

$$\Theta_1\left(r,0\right)=\Theta_2\left(r,0\right),\ k_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial z}\left(r,0\right)=k_2\frac{\partial\Theta_2}{\partial z}\left(r,0\right), \tag{24}$$

$$\Theta_1\left(r,-h_1\right)=\tilde{\Theta}_1\left(r\right),\ \Theta_2\left(r,h_2\right)=\tilde{\Theta}_2\left(r\right),\ \Theta_j\left(a,z\right)=\bar{\Theta}_j\left(z\right). \tag{25}$$

Докажем, что поставленная начально-краевая задача (23) — (25) имеет единственное решение. Умножим обе части уравнения (23) и проинтегрируем их по области Ω_j:

$$k_j\int\limits_{\Omega_j}\Theta_j\Delta\Theta_j=0.$$

Известно, что $\Delta\Theta_j=\operatorname{div}\left(\nabla\Theta_j\right)$; $\operatorname{div}\left(a\vec{b}\right)=a\operatorname{div}\vec{b}+\left(\nabla a,\vec{b}\right)$. Тогда

$$k_j\int\limits_{\Omega_j}\left(\operatorname{div}\left(\Theta_j,\nabla\Theta_j\right)-\left|\nabla\Theta_j\right|^2\right)d\Omega_j=0.$$

По формуле Остроградского-Гаусса получим

$$-k_j \int\limits_{\Omega_j} |\nabla\Theta_j|^2 \, d\Omega_j + k_j \int\limits_{\Gamma_j} \Theta_j \frac{\partial\Theta_j}{\partial n} d\Gamma_j = 0,$$

где $\vec{n}$ — ориентированная внешняя нормаль к Ω_j; Γ_j — граница в j-ой области. Поскольку нормали к поверхности раздела имеют противоположные знаки для Ω_1 и Ω_2, то складывая предыдущие равенства, найдем

$$k_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Theta_2|^2 \, d\Omega_2 + k_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Theta_1|^2 \, d\Omega_1 = k_2 \int\limits_{\Gamma} \Theta_2 \frac{\partial\Theta_2}{\partial n} d\Gamma + k_1 \int\limits_{\Gamma} \Theta_1 \frac{\partial\Theta_1}{\partial n} d\Gamma. \qquad (26)$$

Так как стенки и основания сосуда либо теплоизолированы, либо на них температура равна нулю, и в силу условий (24), (25) имеем

$$k_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Theta_2|^2 \, d\Omega_2 - k_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Theta_1|^2 \, d\Omega_1 = 0,$$

откуда $\Theta_1 (r, z) \equiv 0$. Таким образом, решение начально-краевой стационарной задачи (23) единственно.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю В. К. Андрееву за постановку задачи и ценные советы.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта СОРАН №116 и гранта РФФИ №111-01-00283.

Список литературы

[1] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Уравнения математической физики, 4-е изд., перераб. и доп., М., Наука, 1972.

[2] А.Д.Полянин, Справочник. Линейные уравнения математической физики, М., ФИЗМАТЛИТ, 2001.

[3] А.П.Прудников, Ю.А.Бычков, О.И.Маричев, Интегралы и ряды. Специальные функции, М., Наука, 1983.

[4] Л.Д.Кудрявцев, Курс математичекого анализа, Том 3, 2-е изд., перераб. и доп., М., Высшая школа, 1989.

Solution of Stationary Conjugation Problem Heat Exchange in the Ultimate Cylinders

Evgeny P. Magdenko

Solved problem of stationary heat distribution for two contacting cylinder when the temperature on the whole boundary of the cylinders is known. On the surface division the conditions of conjugation are given: equal temperature and heat flows. Stationary temperature distribution is found in the form of Fourier's sets. Their convergence is proved in functional space and the uniqueness of solution is proved.

Keywords: conjugation marginal problem, equation Laplasa, interface, a priori estimation.