Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(4), 458–469

УДК 512.64

Квазиортогональные по столбцам матрицы над дистрибутивными решетками

Анна В. Жуклина*
Красноярский государственный аграрный университет,
Мира, 90, Красноярск, 660049,
Россия

Получена 29.01.2011, окончательный вариант 04.04.2011, принята к печати 04.06.2011

В работе рассматриваются квазиортогональные по столбцам матрицы над дистрибутивными решетками. Устанавливаются критерии разрешимости матричных уравнений, содержащих такие матрицы. Доказываются критерии идемпотентности указанных матриц. Рассматриваются факторизационные свойства квазиортогональных по столбцам $(\tilde{0},\tilde{1})$-матриц.

Ключевые слова: решеточные матрицы, булевы матрицы, элементарные матрицы, идемпотентные матрицы.

1. Обозначения и терминология

Пусть $(P,\leqslant)$ — решетка. Будем обозначать через $\tilde{0}(\tilde{1})$ наименьший (наибольший) элемент в $(P,\leqslant)$ (если он существует); через $\vee$ и $\wedge$ будем обозначать операции объединения и пересечения соответственно.

Решеточными называются матрицы, элементы которых принадлежат множеству P. Обозначим через $P^{m\times n}$ множество всех решеточных матриц размера $m\times n$ $(m,n\geqslant 1)$ с элементами из P. Элементы матриц будем обозначать соответствующими малыми буквами: $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ и т.д. Матрица размера $m\times n$, все элементы которой равны $\tilde{0}$, называется нулевой и обозначается $0_{m\times n}$.

На множестве $P^{m\times n}$ определим частичный порядок: для любых матриц $A,B\in P^{m\times n}$ отношение $A\leqslant B$ равносильно тому, что $a_{ij}\leqslant b_{ij}$ для всех $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$.

В решетке с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ определены

— единичная $(n\times n)$-матрица E, на главной диагонали которой расположены $\tilde{1}$, а на остальных местах — $\tilde{0}$;

— квадратная $(\tilde{0},\tilde{1})$-матрица E_{ij} с единственным ненулевым элементом $\tilde{1}$, расположенным в i-й строке и j-м столбце.

Операции сложения и умножения решеточных матриц над решеткой $(P,\leqslant)$ определяются как обычно: вместо операции сложения используется операция объединения $\vee$, а вместо операции умножения — операция пересечения $\wedge$.

Пусть $(P,\leqslant)$ — решетка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A\in P^{n\times n}$. Матрица A называется обратимой слева(справа), если существует матрица $B\in P^{n\times n}$, такая что $BA=E$ $(AB=E)$. Матрица A называется обратимой, если $AB=BA=E$ для некоторой матрицы $B\in P^{n\times n}$.

Решетка $(P,\leqslant)$ называется дистрибутивной, если для любых $a,b,c\in P$ выполняется равенство: $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$.

Если решетка $(P,\leqslant)$ дистрибутивна, то для любых $A\in P^{m\times k}$, $B\in P^{k\times l}$, $C\in P^{l\times n}$ $A(BC)=(AB)C$.

Матрицу, полученную из матрицы A транспонированием, будем обозначать через A^T. Если $A\in P^{m\times k}$, $B\in P^{k\times n}$, то $(AB)^T=B^TA^T$.

*a_zhuklina@mail.ru

Для любой матрицы $A \in P^{m\times n}$ будем обозначать через $A_{(i)} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ и $A^{(j)} = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T$ соответственно ее i-ю вектор-строку и j-й вектор-столбец. Объединения элементов этих векторов $a_{i1} \vee \dots \vee a_{in}$ и $a_{1j} \vee \dots \vee a_{mj}$ будем называть соответственно i-й строчечной и j-й столбцовой суммами матрицы A.

Пусть $(P, \leqslant)$ — решетка, $A \in P^{n\times n}$. Множество $\{a_{ij} | i, j = 1, \dots, n\}$ конечно и порождает конечную подрешетку $(P(A), \leqslant)$ решетки $(P, \leqslant)$ с $\tilde{0} = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \bigwedge\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ и $\tilde{1} = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \bigvee\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$.

Элемент a решетки $(P, \leqslant)$ называется $\vee$-неприводимым, если для любых $x, y \in P$ из равенства $a = x \vee y$ следует, что $a = x$ или $a = y$. Множество всех $\vee$-неприводимых элементов решетки $(P, \leqslant)$ обозначается через $\mathrm{join}(P, \leqslant)$.

Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка. Матрица $A \in P^{n\times n}$ называется регулярной, если существует матрица $B \in P^{n\times n}$, такая что $ABA = A$. Если в этом определении к тому же выполняется равенство $BAB = B$, то A называется рефлексивно обратимой.

Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A \in P^{n\times n}$. Матрица A называется простой над $(P, \leqslant)$, если она не является обратимой и из равенства $A = BC$, где $B, C \in P^{n\times n}$, следует, что B или C — обратимая матрица. Необратимая матрица A называется факторизуемой, если $A = BC$, где матрицы $B, C \in P^{n\times n}$ необратимые. Множество матриц $P^{n\times n}$ разбито на три подмножества: множество обратимых матриц, множество простых матриц, множество факторизуемых матриц.

Элементарная матрица $\mathrm{El}_n(k, \lambda)$ первого типа — это матрица, полученная из единичной матрицы $E = E_{n\times n}$ заменой столбца $E^{(k)}$ на столбец $\lambda \wedge E^{(k)}$.

Элементарная матрица $\mathrm{El}_n(k, l, \lambda)$ второго типа — это матрица, полученная из единичной матрицы E заменой столбца $E^{(k)}$ на столбец $E^{(k)} \vee (\lambda \wedge E^{(l)})$, где $k \neq l$.

В тех случаях, когда это будет удобно, будем обозначать элементарную матрицу первого типа через El^{I}, элементарную матрицу второго типа — через $\mathrm{El}^{\mathrm{II}}$.

Квадратная $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрица называется подстановочной матрицей, если каждый столбец и каждая строка матрицы содержит только одну единицу $\tilde{1}$. Подстановочные матрицы будем обозначать $M(\pi)$, $M(\sigma)$, $M(\tau)$ и т.д.

Пусть $(P, \leqslant)$ — решетка, $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$.

В полугруппе $P^{n\times n}$ обратимы только подстановочные матрицы.

Матрицы $A, B \in P^{n\times n}$ называются перестановочно эквивалентными, если матрица $B = M(\pi)AM(\sigma)$ для некоторых подстановочных матриц $M(\pi)$ и $M(\sigma)$.

Если матрица A записана в виде произведения $A = B_1 B_2 \dots B_k$, состоящего из простых матриц и матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам (в произведениях могут отсутствовать как простые матрицы, так и матрицы, перестановочно эквивалентные элементарным матрицам), то это произведение называется стандартной факторизацией матрицы A.

2. Квазиортогональные по столбцам матрицы над дистрибутивными решетками

Пусть $(P, \leqslant)$ — решетка с $\tilde{0}$, $A \in P^{m\times n}$. Матрица A называется квазиортогональной по столбцам (по строкам) над $(P, \leqslant)$, если $a_{ij} \wedge a_{kj} = \tilde{0}$ $(a_{ji} \wedge a_{jk} = \tilde{0})$ для каждого j и для любых $i \neq k$.

Матрица $A \in P^{m\times n}$ квазиортогональна по столбцам тогда и только тогда, когда матрица A^T квазиортогональна по строкам.

Теорема 1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с $\tilde{0}$, $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{n\times s}$, A, B — квазиортогональные по столбцам матрицы, тогда произведение $C = AB$ является квазиортогональной по столбцам матрицей.*

Доказательство. Для всех j и всех $i \neq k$ имеем:

$$c_{ij} \wedge c_{kj} = \left(\bigvee_{r=1}^{n}(a_{ir} \wedge b_{rj})\right) \wedge \left(\bigvee_{r=1}^{n}(a_{kr} \wedge b_{rj})\right) =$$
$$= \bigvee_{r=1}^{n}(a_{ir} \wedge b_{rj} \wedge a_{kr}) \vee \bigvee_{r=1}^{n}\bigvee_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{n}(a_{ir} \wedge b_{rj} \wedge a_{ks} \wedge b_{sj}) = \tilde{0} \vee \tilde{0} = \tilde{0}.$$

□

Следствие 1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, тогда множество всех квазиортогональных по столбцам $(n \times n)$ - матриц над решеткой $(P, \leqslant)$ является полугруппой относительно матричного умножения.*

Теорема 2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с $\tilde{0}$, $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{m\times s}$, A — квазиортогональная по столбцам матрица. Если матричное уравнение $AX = B$ разрешимо, то матрица $R = A^T B$ является его решением.*

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для случая $s = 1$. Справедливость теоремы в общем случае вытекает из того, что матричное уравнение $AX = B$, где $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{m\times s}$, равносильно системе линейных уравнений

$$\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij} \wedge x_{jq}) = b_{iq}, i = 1, \ldots, m, q = 1, \ldots, s.$$

Итак, пусть система линейных уравнений $AX = B$ совместна и $F \in P^{n\times 1}$ — некоторое ее решение.

Так как для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ $a_{ij} \wedge f_j \leqslant a_{ij}$ и $a_{ij} \wedge f_j \leqslant b_i$, то $a_{ij} \wedge f_j \leqslant a_{ij} \wedge b_i$ для всех i, j.

Поэтому $b_i = \bigvee\limits_{j=1}^{n}(a_{ij} \wedge f_j) \leqslant \bigvee\limits_{j=1}^{n}(a_{ij} \wedge b_i) \leqslant b_i$, откуда

$$\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij} \wedge b_i) = b_i \tag{1}$$

для всех $i = 1, \ldots, m$.

Далее, пусть $R = A^T B$, тогда для $i = 1, \ldots, m$

$$\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij} \wedge r_j) = \bigvee_{j=1}^{n}\left(a_{ij} \wedge \left(\bigvee_{k=1}^{m}(a_{kj} \wedge b_k)\right)\right) = \bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij} \wedge b_i) \vee \bigvee_{j=1}^{n}\bigvee_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{m}(a_{ij} \wedge a_{kj} \wedge b_k).$$

Учитывая, что при $i \neq k$ $a_{ij} \wedge a_{kj} = \tilde{0}$, и используя (1), получаем

$$\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij} \wedge r_j) = b_i$$

для всех $i = 1, \ldots, m$. □

Теорема 3. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{m\times s}$, A — квазиортогональная по столбцам матрица, причем объединение всех элементов любого столбца матрицы A равно $\tilde{1}$. Если матричное уравнение $AX = B$ разрешимо, то матрица $R = A^T B$ является его наибольшим решением.*

Доказательство. Если уравнение $AX = B$ разрешимо, то матрица $R = A^T B$ является его решением (теорема 2). Покажем, что это решение наибольшее.

Снова пусть $s = 1$ и $F \in P^{n\times 1}$ — некоторое решение системы $AX = B$.

Для любых $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ $a_{ij} \wedge f_j \leqslant a_{ij}$ и $a_{ij} \wedge f_j \leqslant b_i$, поэтому $a_{ij} \wedge f_j \leqslant a_{ij} \wedge b_i$ для всех i, j. Следовательно, для всех $j = 1, \dots, n$

$$\bigvee_{i=1}^{m} (a_{ij} \wedge f_j) \leqslant \bigvee_{i=1}^{m} (a_{ij} \wedge b_i),$$

или

$$f_j \wedge \bigvee_{i=1}^{m} a_{ij} \leqslant \bigvee_{i=1}^{m} (a_{ij} \wedge b_i).$$

Поскольку $\bigvee\limits_{i=1}^{m} a_{ij} = \tilde{1}$ и $\bigvee\limits_{i=1}^{m} (a_{ij} \wedge b_i) = r_j$, то $f_j \leqslant r_j$ для $j = 1, \dots, n$. □

Теорема 4. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с $\tilde{0}$, $A \in P^{n\times s}$, $B \in P^{m\times s}$, A — квазиортогональная по столбцам матрица. Если матричное уравнение $XA = B$ разрешимо, то матрица $R = BA^T$ является его наименьшим решением.*

Доказательство. Пусть $m = 1$ и система линейных уравнений $XA = B$ совместна.

Для всех $j = 1, \dots, s$

$$\bigvee_{i=1}^{n} (b_j \wedge a_{ij}) = b_j. \tag{2}$$

Пусть $F \in P^{1\times n}$ — некоторое решение уравнения $XA = B$, тогда для $j = 1, \dots, s$

$$\bigvee_{i=1}^{n} (f_i \wedge a_{ij}) = b_j. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что для всех $j = 1, \dots, s$

$$\bigvee_{i=1}^{n} (b_j \wedge a_{ij}) = \bigvee_{i=1}^{n} (f_i \wedge a_{ij}).$$

Тогда для всех $j = 1, \dots, s$, $k = 1, \dots, n$

$$b_j \wedge a_{kj} = (b_j \wedge a_{kj}) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} (b_j \wedge a_{ij})\right) = (b_j \wedge a_{kj}) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} (f_i \wedge a_{ij})\right) = \bigvee_{i=1}^{n} (b_j \wedge a_{kj} \wedge f_i \wedge a_{ij}) =$$
$$= (b_j \wedge a_{kj} \wedge f_k) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n} (b_j \wedge a_{kj} \wedge f_i \wedge a_{ij})\right) = (b_j \wedge a_{kj} \wedge f_k) \vee \tilde{0} = b_j \wedge a_{kj} \wedge f_k.$$

Итак, $b_j \wedge a_{kj} = b_j \wedge a_{kj} \wedge f_k$ для $j = 1, \dots, s$, $k = 1, \dots, n$, откуда $b_j \wedge a_{kj} \leqslant f_k$ для всех j, k. Поэтому для $k = 1, \dots, n$

$$\bigvee_{j=1}^{s} (b_j \wedge a_{kj}) \leqslant f_k.$$

Таким образом, матрица $R = BA^T$ содержится во всяком решении F уравнения $XA = B$. Покажем, что вектор R является решением уравнения $XA = B$.

Для всех $j = 1, \dots, s$

$$b_j = \bigvee_{i=1}^{n} (b_j \wedge a_{ij}) \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} \left(\left(\bigvee_{q=1}^{s} (b_q \wedge a_{iq}) \right) \wedge a_{ij} \right) \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} (f_i \wedge a_{ij}) = b_j,$$

откуда

$$\bigvee_{i=1}^{n} \left(\left(\bigvee_{q=1}^{s} (b_q \wedge a_{iq}) \right) \wedge a_{ij} \right) = b_j,$$

т.е. матрица $R = BA^T$ является решением уравнения $XA = B$. □

Пусть $(P, \leqslant)$ — решетка, $A \in P^{m\times n}$. Введем обозначения: $E_l(A) = AA^T$, $E_r(A) = A^T A$.

Если A — квазиортогональная по столбцам матрица и $D = E_l(A)$, то

$$d_{ij} = \begin{cases} \bigvee\limits_{k=1}^{n} a_{ik}, & \text{если } i = j, \\ \tilde{0}, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с $\tilde{0}$, $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{m\times s}$, A — квазиортогональная по столбцам матрица. Если векторы строчечных сумм матриц A, B совпадают, то уравнение $AX = B$ разрешимо.*

Доказательство. Покажем, что матрица $A^T B$ является решением уравнения $AX = B$.

Пусть $C = AA^T B = E_l(A)B$, тогда для всех $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, s$

$$c_{ij} = \left(\bigvee_{k=1}^{n} a_{ik} \right) \wedge b_{ij} = \left(\bigvee_{q=1}^{s} b_{iq} \right) \wedge b_{ij} = b_{ij}.$$

□

Следствие 2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с $\tilde{0}$, $A \in P^{n\times n}$, A — квазиортогональная по столбцам матрица, тогда A рефлексивно обратима.*

Доказательство. Так как уравнение $AX = A$ разрешимо (теорема 5), то матрица $A^T A$ является его решением (теорема 2). Таким образом, матрица A является регулярной:

$$AA^T A = A.$$

С другой стороны,

$$A^T AA^T = (AA^T A)^T = A^T.$$

□

Следствие 3. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A \in P^{n\times n}$, A — квазиортогональная по столбцам матрица. Если A необратима, то A — факторизуемая матрица.*

Доказательство. Если A необратима, то $E_l(A) \neq E$ (если допустить, что $E_l(A) = E$, то матрица A обратима справа над $(P, \leqslant)$, а потому A обратима над $(P, \leqslant)$ [1, теорема 1]), тогда $E_l(A)$ необратима.

Таким образом, существует представление матрицы A в виде произведения двух необратимых матриц:

$$A = E_l(A)A.$$

□

Теорема 6. *Пусть* $(P, \leqslant)$ *— дистрибутивная решетка с* $\tilde{0}$, $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{m\times s}$, A, B *— квазиортогональные по столбцам матрицы. Следующие утверждения равносильны.*

1)Уравнения $AX = B$ *и* $BY = A$ *разрешимы.*

2)Векторы строчечных сумм матриц A, B *совпадают.*

Доказательство. Покажем справедливость импликации 1) $\Rightarrow$ 2). Так как уравнения $AX = B$ и $BY = A$ разрешимы, то им удовлетворяют матрицы A^TB и B^TA соответственно (теорема 2), поэтому

$$B = AA^TB,\ A = BB^TA.$$

Тогда

$$E_l(A) = AA^T = BB^TAA^T,$$

$$E_l(B) = BB^T = B(AA^TB)^T = BB^TAA^T,$$

откуда $E_l(A) = E_l(B)$, поэтому векторы строчечных сумм матриц A, B совпадают.

Справедливость импликации 2) $\Rightarrow$ 1) доказана в теореме 5. □

Теорема 7. *Пусть* $(P, \leqslant)$ *— дистрибутивная решетка с* $\tilde{0}$, $A \in P^{n\times s}$, $B \in P^{m\times s}$, A, B *— квазиортогональные по столбцам матрицы. Следующие утверждения равносильны.*

1)Уравнения $XA = B$ *и* $YB = A$ *разрешимы.*

2)$E_r(A) = E_r(B)$.

Теорема 8. *Пусть* $(P, \leqslant)$ *— дистрибутивная решетка с* $\tilde{0}$, $A \in P^{n\times n}$, A *— квазиортогональная по столбцам матрица. Матрица* A *является идемпотентной тогда и только тогда, когда* $a_{ii} \geqslant a_{ij}$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть A — идемпотентная матрица, тогда для всех $i, j = 1, \ldots, n$

$$\bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kj}) = a_{ij},$$

тогда

$$a_{ij} = a_{ij} \wedge \left(\bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kj})\right) = a_{ij} \wedge \left(\left(\bigvee_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kj})\right) \vee (a_{ii} \wedge a_{ij})\right) =$$

$$= \left(\bigvee_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (a_{ij} \wedge a_{ik} \wedge a_{kj})\right) \vee (a_{ii} \wedge a_{ij}) = \tilde{0} \vee (a_{ii} \wedge a_{ij}) = a_{ii} \wedge a_{ij},$$

откуда следует, что $a_{ii} \geqslant a_{ij}$ для любых i, j.

Достаточность. Пусть теперь $a_{ii} \geqslant a_{ij}$ для $i, j = 1, \ldots, n$, тогда

$$a_{ij} = a_{ii} \wedge a_{ij} = \left(\bigvee_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (a_{ij} \wedge a_{ik} \wedge a_{kj})\right) \vee (a_{ii} \wedge a_{ij}) =$$

$$= a_{ij} \wedge \left(\left(\bigvee_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kj})\right) \vee (a_{ii} \wedge a_{ij})\right) = a_{ij} \wedge \left(\bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kj})\right),$$

откуда

$$a_{ij} \leqslant \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kj}). \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kj}) = (a_{ii} \wedge a_{ij}) \vee \left(\bigvee_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kj}) \right) \leqslant a_{ij} \vee \left(\bigvee_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kk}) \right) = a_{ij} \vee \tilde{0} = a_{ij},$$

таким образом,

$$\bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kj}) \leqslant a_{ij}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$\bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge a_{kj}) = a_{ij},$$

где $i, j = 1, \ldots, n$, т.е. A — идемпотентная матрица. □

Следствие 4. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решетка, $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, $A \in P^{n \times n}$ и пусть каждый столбец матрицы A содержит не более одной единицы $\tilde{1}$. Следующие утверждения равносильны.*

1)Матрица A идемпотентна.

2)Для всех $i, j = 1, \ldots, n$ из равенства $a_{ij} = \tilde{1}$ следует, что $a_{ii} = \tilde{1}$.

3)Для всех $i, j = 1, \ldots, n$ из равенства $a_{ij} = \tilde{1}$ следует, что $A^{(i)} = A^{(j)}$.

Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка, $A \in P^{n \times n}$, $\tilde{1}$ и $\tilde{0}$ — наибольший и наименьший элементы решетки $(P(A), \leqslant)$. Матрица A идемпотентна в $(P^{n \times n}, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда она идемпотентна в $(P(A)^{n \times n}, \leqslant)$.

Для любого элемента $v \in \operatorname{join}(P(A), \leqslant)$ определена матрица $A^{[v]}$, такая что

$$a_{ij}^{[v]} = \begin{cases} \tilde{1}, & \text{если } a_{ij} \leqslant v, \\ \tilde{0} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эта матрица называется составляющей матрицы A.

Любая матрица $A \in P^{n \times n}$ единственным образом может быть представлена в виде линейной комбинации своих составляющих с элементами из множества $\operatorname{join}(P(A), \leqslant)$ [2]:

$$A = \bigvee_{v \in \operatorname{join}(P(A), \leqslant)} \left(v \wedge A^{[v]} \right),$$

причем имеет место равенство

$$A^k = \bigvee_{v \in \operatorname{join}(P(A), \leqslant)} \left(v \wedge \left(A^{[v]} \right)^k \right).$$

Отсюда следует, что матрица A идемпотентна тогда и только тогда, когда идемпотентна каждая из $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матриц $A^{[v]}$.

Матрица $\mathrm{RP}_i(A, \tilde{0}, v)$ называется i-й прямоугольной частью матрицы A, содержащей элемент v, если

1) ее элементами являются только $\tilde{0}$ и v;

2) число элементов v в i-й строке матрицы A равно $q+1$, число элементов v в i-м столбце матрицы A равно $p+1$, где $p, q \geqslant 1$;

3) существуют индексы $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in \{1, \ldots, n\}$, такие что

$$\mathrm{RP}_i(A, \tilde{0}, v) = v \wedge \left(\bigvee_{r=1}^{p} \bigvee_{s=1}^{q} (E_{ii} \vee E_{ij_s} \vee E_{i_r i} \vee E_{i_r j_s}) \right) \leqslant A.$$

Если в этом определении $p = 0$ или $q = 0$, то $\mathrm{RP}_i(A, \tilde{0}, v)$ называется i-й линейной частью матрицы A, содержащей элемент v, и обозначается через $\mathrm{LP}_i(A, \tilde{0}, v)$.

Из последнего следствия с очевидностью вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решетка, $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, $A \in P^{n \times n}$ и пусть каждый столбец матрицы A содержит не более одной единицы $\tilde{1}$. Матрица A идемпотентна тогда и только тогда, когда A есть $\vee$-объединение линейных частей, содержащих $\tilde{1}$.*

Заметим, что структурный критерий идемпотентности произвольных $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матриц приведен в [3].

Теорема 9. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с $\tilde{0}$, $A \in P^{n \times n}$, A — квазиортогональная по столбцам матрица. Матрица A идемпотентна тогда и только тогда, когда A есть $\vee$-объединение линейных частей, содержащих элементы множества* $\mathrm{join}(P(A), \leqslant)$.

Доказательство. Необходимость. Если матрица A идемпотентна, то, как было замечено выше, идемпотентна каждая из $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матриц $A^{[v]}$, составляющих A. Легко при этом заметить, что каждый столбец матрицы $A^{[v]}$ содержит не более одной единицы $\tilde{1}$. Теперь, используя последнюю лемму, получаем справедливость нужного утверждения.

Достаточность. Пусть $A = \bigvee\limits_{k \in K} \mathrm{LP}_k(A, \tilde{0}, v_k)$, где K — некоторое индексное множество, тогда для произвольных $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $a_{ij} = \bigvee\limits_{k \in K'} v_k$, где $K' \subseteq K$, т.е. элемент, стоящий на (i, j)-м месте каждой k-й линейной части матрицы A, где $k \in K'$, равен $\tilde{1}$, а потому, следуя определению линейной части, равен $\tilde{1}$ и элемент, стоящий на (i, i)-м месте каждой k-й линейной части матрицы A, где $k \in K'$. Следовательно, $a_{ii} \geqslant \bigvee\limits_{k \in K'} v_k$. Итак, $a_{ii} \geqslant a_{ij}$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, поэтому матрица A идемпотентна (теорема 8). □

3. Факторизация квазиортогональных по столбцам $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матриц

Пусть $(P, \leqslant)$ — решетка, $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, $A \in P^{n \times n}$, A — квазиортогональная по столбцам матрица и пусть объединение всех элементов любого столбца матрицы A равно $\tilde{1}$. Таким образом, матрицу A можно определить как матрицу, у которой каждый столбец содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$.

В дальнейшем будут рассматриваться факторизационные свойства таких матриц.

Заметим, что подобная проблема для $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матриц размера $n \times n$, $n \geqslant 3$, имеющих мультипликативный ранг n, исследовалась в [4]. В частности, было доказано, что каждая такая матрица представима в виде произведения простых матриц и матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам второго типа.

Теорема 10. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решетка, $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, $A \in P^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть каждый столбец матрицы A содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$. Если матрица A необратима, то* *ее можно факторизовать следующим образом:*

$$A = \left(\prod_{i=1}^{k} M(\pi_i)\ \mathrm{El}_i^{\mathrm{I}}\ \mathrm{El}_i^{\mathrm{II}} \right) M(\sigma),$$

где $M(\sigma)$, $M(\pi_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ — подстановочные матрицы, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по n. Пусть $n = 2$. Справедливы равенства:

$$\begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix} = M(\pi)\,\mathrm{El}_2(2,\tilde{0})\,\mathrm{El}_2(2,1,\tilde{1}),$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix} = \mathrm{El}_2(2,\tilde{0})\,\mathrm{El}_2(2,1,\tilde{1}),$$

где $M(\pi)$ — подстановочная матрица.

Пусть теперь утверждение теоремы справедливо для всех $t < n$. Если $A \in P^{n\times n}$ — необратимая матрица, каждый столбец которой содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$, то A имеет нулевую строку. Переставим строки матрицы A так, чтобы нулевая строка оказалась последней; получим матрицу B, $A = M(\pi)\,B$, где $M(\pi)$ — некоторая подстановочная матрица, $B_{(n)} = 0_{1\times n}$. Но $B = \mathrm{El}_n(n,\tilde{0})\,C$, где матрица C в блочном виде:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0_{1\times(n-1)} & E_{1\times 1} \end{pmatrix},$$

причем C_{11} — матрица, каждый столбец которой содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$.

Так как $c_{rn} = \tilde{1}$ для некоторого $r \in \{1, \ldots, n-1\}$, то $C = \mathrm{El}_n(n,r,\tilde{1})\,D$, где D в блочном виде:

$$D = \begin{pmatrix} C_{11} & 0_{(n-1)\times 1} \\ 0_{1\times(n-1)} & E_{1\times 1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $A = M(\pi)\,\mathrm{El}_n(n,\tilde{0})\,\mathrm{El}_n(n,r,\tilde{1})\,D$. Теперь, если подматрица C_{11} матрицы D обратима, то матрица D обратима и теорема доказана. Если матрица C_{11} необратима, то по индуктивному предположению ее можно факторизовать в произведение $((n-1)\times(n-1))$-матриц:

$$C_{11} = \left(\prod_{i=1}^{k} M(\pi_i)\ \mathrm{El}_i^{\mathrm{I}}\ \mathrm{El}_i^{\mathrm{II}} \right) M(\sigma),$$

где $k \in \{1, \ldots, n-2\}$; поэтому матрицу A можно факторизовать требуемым способом. □

Заметим, что в факторизации необратимой матрицы $A \in P^{n\times n}$, $n \geqslant 3$, каждый столбец которой содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$, могут присутствовать простые матрицы. Например, матрица $\begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix}$ разлагается в произведение трех элементарных матриц и одной простой матрицы:

$$\begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix} = \mathrm{El}_3(2,\tilde{0})\,\mathrm{El}_3(3,\tilde{0})\,\mathrm{El}_3(2,1,\tilde{1}) \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решетка, $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, $A, B \in P^{n\times n}$, $n \geqslant 3$, A, B — необратимые матрицы, каждый столбец которых содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$, причем матрица A имеет только одну нулевую строку. Тогда справедливы утверждения.*

1) Если матрица B имеет ровно одну нулевую строку, то B перестановочно эквивалентна матрице A.

2) Если B имеет по крайней мере две нулевые строки, то B можно представить в виде произведения следующих матриц: элементарных матриц первого и второго типа, матрицы A, подстановочных матриц.

Доказательство. Докажем второе утверждение.

Пусть $n = 3$. M_1 — множество необратимых (3×3)-матриц, каждый столбец которых содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$, и имеющих более одной нулевой строки.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Если $B \in M_1$, то $B = M(\pi) \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix}$ для подходящей подстановочной матрицы $M(\pi)$.

M_2 — множество необратимых (3×3)-матриц, каждый столбец которых содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$, и имеющих только одну нулевую строку. Если $A \in M_2$, то $A = M(\sigma)\, L_{3\times 3}\, M(\tau)$, где

$$L_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix},$$

$M(\sigma)$, $M(\tau)$ — некоторые подстановочные матрицы.

Тогда $B = M(\pi)\,\mathrm{El}_3(3, \tilde{0})\,\mathrm{El}_3(3, 2, \tilde{1})\,[M(\sigma)]^{-1}\,A\,[M(\tau)]^{-1}$.

Пусть теперь утверждение леммы справедливо для всех чисел, меньших числа n, где $n \geqslant 4$. Докажем лемму для числа n.

Если $A \in P^{n\times n}$ — необратимая матрица, каждый столбец которой содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$, и имеющая только одну нулевую строку, то

$$A = M(\pi) \begin{pmatrix} L_{3\times 3} & 0_{3\times(n-3)} \\ 0_{(n-3)\times 3} & E_{(n-3)\times(n-3)} \end{pmatrix} M(\sigma),$$

где $M(\pi)$, $M(\sigma)$ — некоторые подстановочные $(n\times n)$-матрицы.

Матрицу A можно записать в виде:

$$A = M(\pi) \begin{pmatrix} A_{11} & 0_{(n-1)\times 1} \\ 0_{1\times(n-1)} & E_{1\times 1} \end{pmatrix} M(\sigma),$$

где A_{11} — необратимая $((n-1)\times(n-1))$-матрица, каждый столбец которой содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$, и имеющая только одну нулевую строку.

Пусть B — необратимая $(n\times n)$-матрица, каждый столбец которой содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$, и имеющая по крайней мере две нулевые строки, тогда

$$B = M(\tau)\,\mathrm{El}_n(n, \tilde{0})\,\mathrm{El}_n(n, r, \tilde{1}) \begin{pmatrix} B_{11} & 0_{(n-1)\times 1} \\ 0_{1\times(n-1)} & E_{1\times 1} \end{pmatrix}$$

для некоторой подстановочной $(n\times n)$-матрицы $M(\tau)$ и некоторой элементарной матрицы второго типа $\mathrm{El}_n(n, r, \tilde{1})$, $r \in \{1, \ldots, n-1\}$, причем B_{11} — необратимая $((n-1)\times(n-1))$-матрица, каждый столбец которой содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$.

Тогда если матрица B_{11} имеет ровно одну нулевую строку, то она перестановочно эквивалентна матрице A_{11}, поэтому матрица

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0_{(n-1)\times 1} \\ 0_{1\times(n-1)} & E_{1\times 1} \end{pmatrix}$$

перестановочно эквивалентна матрице A и лемма доказана; если матрица B_{11} имеет более одной нулевой строки, то по индуктивному предположению B_{11} можно представить в виде произведения элементарных $((n-1)\times(n-1))$-матриц первого и второго типа, матрицы A_{11}, подстановочных $((n-1)\times(n-1))$-матриц, поэтому матрицу B можно записать как произведение элементарных $(n\times n)$-матриц первого и второго типа, матрицы A и подстановочных $(n\times n)$-матриц. □

Теорема 11. *Пусть* $(P,\leqslant)$ *— решетка,* $P=\{\tilde{0},\tilde{1}\}$, $A\in P^{n\times n}$, $n\geqslant 3$, A *— необратимая матрица, каждый столбец которой содержит ровно одну единицу* $\tilde{1}$, *тогда существует стандартная факторизация матрицы* A, *содержащая ровно одну простую матрицу.*

Доказательство. Пусть $n=3$, $A\in P^{3\times 3}$ — необратимая матрица, каждый столбец которой содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$. Тогда матрица A имеет либо одну нулевую строку, либо две нулевых строки. Рассмотрим оба случая.

Случай первый. Поскольку любые две необратимые (3×3)-матрицы, каждый столбец которых содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$, и имеющие только одну нулевую строку, перестановочно эквивалентны, то

$$A=M(\pi)\begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix}M(\sigma)$$

для некоторых подстановочных (3×3)-матриц $M(\pi)$, $M(\sigma)$, тогда

$$A=M(\pi)\,\mathrm{El}_3(3,\tilde{0})\begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \end{pmatrix}\mathrm{El}_3(3,\tilde{0})\,\mathrm{El}_3(3,2,\tilde{1})\,M(\sigma),$$

т.е. матрица A имеет стандартную факторизацию, содержащую ровно одну простую матрицу.

Случай второй. Имеем:

$$A=M(\tau)\begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix},$$

где $M(\tau)$ — некоторая подстановочная (3×3)-матрица, тогда

$$A=M(\tau)\,\mathrm{El}_3(2,\tilde{0})\,\mathrm{El}_3(3,\tilde{0})\,\mathrm{El}_3(2,1,\tilde{1})\begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \end{pmatrix},$$

матрица A имеет стандартную факторизацию, содержащую ровно одну простую матрицу.

Пусть теперь $n\geqslant 4$. Поскольку матрица

$$\overline{E_{3\times 3}}=\begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \end{pmatrix}$$

простая, то $(n\times n)$-матрица

$$R=\begin{pmatrix} \overline{E_{3\times 3}} & 0_{3\times(n-3)} \\ 0_{(n-3)\times 3} & E_{(n-3)\times(n-3)} \end{pmatrix}$$

является простой [5, теорема 5]. Поменяем местами в матрице R первую и вторую строки, третий и четвертый столбцы, третью и четвертую строки; в результате получим матрицу T, $T = M(\pi)\,R\,M(\sigma)$ для подходящих подстановочных $(n \times n)$-матриц $M(\pi)$, $M(\sigma)$. Обнулим четвертую строку и четвертый столбец матрицы T, получим матрицу S, $S = \mathrm{El}_n(4, \tilde{0})\,T\,\mathrm{El}_n(4, \tilde{0})$. В матрице S заменим четвертый столбец на первый столбец, получим матрицу K, $K = S\,\mathrm{El}_n(4, 1, \tilde{1})$. Полученная матрица K является необратимой $(n \times n)$-матрицей, каждый столбец которой содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$, и имеющей только одну нулевую строку. Тогда если A — необратимая $(n \times n)$-матрица, каждый столбец которой содержит ровно одну единицу $\tilde{1}$, то по лемме 2 либо матрица A перестановочно эквивалентна матрице K, либо матрицу A можно представить в виде произведения элементарных матриц первого и второго типа, матрицы K, подстановочных матриц. □

Список литературы

[1] Л.А.Скорняков, Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами, *Сиб. мат. журн.*, **27**(19860, №2, 182–185.

[2] Y.-J.Tan, On the powers of matrices over a distributive lattice, *Linear Algebra Appl.*, **336**(2001), 1–14.

[3] Л.-Б.Бисли, А.Э.Гутерман, К.Т.Канг, С.З.Сонг, Идемпотентные матрицы и мажорирование, *Фундамент. и прикл. мат.*, **13**(2007), №1, 11–29.

[4] H.H.Cho, Prime Boolean matrices and factorizations, *Linear Algebra Appl.*, **190**(1993), 87–98.

[5] В.Е.Маренич, Простые матрицы над дистрибутивными решетками, *Фундамент. и прикл. мат.*, **14**(2008), №7, 157–173.

Quasiortogonal by Columns Matrices over Distributive Lattices

Anna V. Zhuklina

In this paper, quasiortogonal by columns matrices over distributive lattices are studied. We obtain criteria of solvability of matrix equations in case the equations include such matrices. Criteria of such idempotent matrices are proved. Factorization properties of quasiortogonal by columns $(\tilde{0}, \tilde{1})$*- matrices are studied.*

Keywords: matrices over lattices, boolean matrices, elementary matrices, idempotent matrices.