УДК 539.3+534.11

Моделирование изогонально армированных кольцевых пластин в полярной системе координат

Наталья А. Федорова*
Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет,
Киренского, 26, Красноярск, 660074,
Россия

Получена 10.02.2011, окончательный вариант 10.03.2011, принята к печати 24.04.2011

Построена разрешающая система дифференциальных уравнений в перемещениях осесимметричной задачи армированных кольцевых пластин в полярной системе координат. Многообразие структур армирования достигается путем построения изогональных траекторий к данным семействам кривых. В рамках единой схемы решения системы дифференциальных уравнений получаем композитную конструкцию с заранее заданными свойствами.

Ключевые слова: армирование,структурная модель, изогональные траектории.

Введение

В современной аэрокосмической и машиностроительной промышленности широко используются тонкостенные элементы из волокнистых композитных материалов. Волокнистое армирование позволяет использовать новые принципы проектирования и изготовления изделий, основанные на том, что материал и изделие создаются одновременно в рамках единого технологического процесса. В результате получается изделие с новыми уникальными эксплуатационными качествами. До недавнего времени армирование осуществлялось преимущественно прямолинейными волокнами. Такие структуры армирования не могут быть эффективны для конструкций с большими градиентами полей напряжений и деформаций в зоне отверстий и переходных элементов. В этом случае необходимо создавать конструкции со специальными криволинейными структурами армирования. Работы [1–4] и настоящая статья посвящены методам поиска таких структур армирования.

1. Постановка задачи

Напряженно-деформированное состояние армированной пластины в полярной системе координат (ρ, θ) относительно компонент тензоров деформаций $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\rho\theta}$ и напряжений $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_{\rho\theta}$ в осесимметрическом случае (искомые функции не будут зависеть от полярного угла θ) описывается соотношениями (1)–(5). Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \qquad (1)$$
$$\frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho}\sigma_{\rho\theta} = 0.$$

*run@akadem.ru

Пусть армирование выполнено m семействами волокон ($m = 1, 2, 3$), φ_m — углы армирования, ε_m — деформация в волокне, ω_m — интенсивность армирования m-м семейством волокон. Деформации в волокне в полярной системе определим по структурной модели [5]

$$\varepsilon_\rho \cos^2 \varphi_m + \varepsilon_\theta \sin^2 \varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta} \cos\varphi_1 \sin\varphi_m = \varepsilon_m. \tag{2}$$

Соотношения Коши, связывающие компоненты тензора деформаций и компоненты вектора смещений u_ρ, u_θ, в условиях осесимметричной деформации имеют вид

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho},\ \varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_{\rho\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho}\right). \tag{3}$$

Пусть m^* — некоторое фиксированное число семейств армирующих волокон. Закон Гука для неоднородного армированного материала с числом семейств армирующих волокон m^* запишем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \Omega\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta) + \omega_1\sigma_1\cos^2\varphi_1 + \omega_2\sigma_2\cos^2\varphi_2,\\
\sigma_\theta &= \Omega\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_\rho) + \omega_1\sigma_1\sin^2\varphi_1 + \omega_2\sigma_2\sin^2\varphi_2,\\
\sigma_{\rho\theta} &= \Omega\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{\rho\theta} + \omega_1\sigma_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + \omega_2\sigma_2\cos\varphi_2\sin\varphi_2,
\end{aligned} \tag{4}$$

где E, ν — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона связующего материала, $\Omega = 1 - \sum\limits_{m=1}^{m^*} \omega_m$ — удельная интенсивность прослоек связующего между армирующими слоями. В соотношения (4) входят напряжения в волокне σ_m, они удовлетворяют закону Гука. Интенсивность ω_m определим из условия постоянства сечений волокон в полярной системе координат [1]:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\omega_m\cos\varphi_m) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\omega_m \sin\varphi_m) = 0. \tag{5}$$

Интенсивность армирования m-м семейством волокон ω_m найдем из (5), если введены углы армирования φ_m при задании конкретных траекторий армирования. Пусть траектории армирования — семейство спиралей Архимеда $\rho = a\theta$ (a — параметр). Угол армирования в полярной системе координат определяем как $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{\rho}{\rho\prime}$, следовательно, $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{\rho \operatorname{tg}\varphi_0}{\rho_0}$. Интегрирование (5) для данной траектории армирования дает выражение

$$\omega_1 = \frac{\omega_1^0\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2\operatorname{tg}^2\varphi_0}}{\rho\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_0}}. \tag{6}$$

Для семейств логарифмических спиралей вида $\rho = ae^\theta$ (a — параметр) угол армирования — постоянная величина, интенсивность армирования определяется соотношением $\omega_1 = \dfrac{\omega_1^0}{\rho}$, где φ_0, ω_1^0 — заданные угол выхода и интенсивность на внутреннем контуре ρ_0.

2. Разрешающая система уравнений

Сформулируем задачу об осесимметричной деформации армированной пластины в перемещениях u_ρ, u_θ. Для этого соотношения (4) подставим в уравнения равновесия (1), предварительно напряжения σ_m в волокнах найдем по формуле

$$\sigma_m = E_m\left(\sum_{m=1}^{m^*}(\varepsilon_\rho\cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta}\cos\varphi_m\sin\varphi_m\right). \tag{7}$$

Введем вспомогательные обозначения $m_1 = \Omega\dfrac{E}{1-\nu^2}$, $m_2 = \Omega\dfrac{E}{1+\nu}$, заметим, что если интенсивности зависят от ρ, то и m_1, m_2 — функции ρ. Напряжения $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_{\rho\theta}$ с учетом структурных характеристик примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= m_1(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta) + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m(\varepsilon_\rho\cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta}\sin\varphi_m\cos\varphi_m)\cos^2\varphi_m,\\
\sigma_\theta &= m_1(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\theta) + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m(\varepsilon_\rho\cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta}\sin\varphi_m\cos\varphi_m)\sin^2\varphi_m,\\
\sigma_{\rho\theta} &= m_2\varepsilon_{\rho\theta} + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m(\varepsilon_\rho\cos^2\varphi_m + \varepsilon_\theta\sin^2\varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta}\sin\varphi_m\cos\varphi_m)\sin\varphi_m\cos\varphi_m.
\end{aligned} \tag{8}$$

Введем коэффициенты

$$\begin{gathered}
a_{11} = m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m\cos^4\varphi_m, \quad a_{12} = \nu m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m\cos^2\varphi_m\sin^2\varphi_m,\\
a_{13} = \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m\cos^3\varphi_m\sin\varphi_m, \quad a_{22} = m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m\sin^4\varphi_m,\\
a_{23} = \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m\cos\varphi_m\sin^3\varphi_m, \quad a_{33} = m_2 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m\omega_m\cos^2\varphi_m\sin^2\varphi_m.
\end{gathered}$$

Тогда напряжения $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_{\rho\theta}$ запишем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= a_{11}\varepsilon_\rho + a_{12}\varepsilon_\theta + a_{13}\varepsilon_{\rho\theta},\\
\sigma_\theta &= a_{12}\varepsilon_\rho + a_{22}\varepsilon_\theta + a_{23}\varepsilon_{\rho\theta},\\
\sigma_{\rho\theta} &= a_{13}\varepsilon_\rho + a_{23}\varepsilon_\theta + a_{313}\varepsilon_{\rho\theta}.
\end{aligned} \tag{9}$$

После подстановки (9) в уравнения равновесия (1) с учетом (3) получим относительно компонент перемещений следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
a_{11}\frac{d^2u_\rho}{d\rho^2} + \frac{a_{13}}{2}\frac{d^2u_\theta}{d\rho^2} + \left(\frac{a_{12}}{\rho} + \frac{da_{11}}{d\rho} + \frac{1}{\rho}(a_{11} - a_{12})\right)\frac{du_\rho}{d\rho} +\\
+ \left(\frac{a_{13}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{da_{13}}{d\rho} + (a_{13} - a_{23})\right)\right)\frac{du_\theta}{d\rho} +\\
+ \left(-\frac{a_{12}}{\rho} + \frac{da_{12}}{d\rho} + \frac{1}{\rho}(a_{12} - a_{22})\right)\frac{u_\rho}{\rho} + \left(-\frac{a_{13}}{\rho} - \frac{1}{2}\left(\frac{da_{13}}{d\rho} + \frac{1}{\rho}(a_{13} - a_{23})\right)\right)\frac{u_\theta}{\rho} = 0,\\
a_{13}\frac{d^2u_\rho}{d\rho^2} + \frac{a_{33}}{2}\frac{d^2u_\theta}{d\rho^2} + \left(\frac{a_{23}}{\rho} + \frac{da_{13}}{d\rho} + \frac{2}{\rho}a_{13}\right)\frac{du_\rho}{d\rho} + \left(-\frac{a_{33}}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{da_{33}}{d\rho} + \frac{a_{33}}{\rho}\right)\frac{du_\theta}{d\rho} +\\
+ \left(-\frac{a_{23}}{\rho} + \frac{da_{33}}{d\rho} + \frac{2}{\rho}a_{23}\right)\frac{u_\rho}{\rho}\left(-\frac{a_{33}}{2\rho} - \frac{1}{2}\frac{da_{33}}{d\rho} - \frac{a_{33}}{\rho}\right)\frac{u_\theta}{\rho} = 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Эта система (10) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно компонент перемещений u_ρ, u_θ. К системе (10) присоединим четыре граничных условия на внешнем и внутреннем контурах кольцевой пластины. Пусть на внутреннем контуре при $\rho = \rho_1$ заданы перемещения:

а) $u_\rho = C_1^*,\ u_\theta = C_2^*$ (при $C_1^* = 0,\ C_2^* = 0$ — жестко закрепленный вал, при $C_1^* = 0,\ C_2^* \neq 0$ возможно скручивание вала);

б) на внешнем контуре $\rho = \rho_2$ заданы радиальное и касательное усилия $p_n,\ p_\tau$. С учетом соотношений (9) и (3) условия на внешнем контуре примут вид

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{du_\rho}{d\rho} + a_{12}\frac{u_\rho}{\rho} + \frac{a_{13}}{2}\left(\frac{du_\theta}{d\rho} - \frac{u_\theta}{\rho}\right)\Big|_{\rho=\rho_2} &= p_n, \\ a_{13}\frac{du_\rho}{d\rho} + a_{23}\frac{u_\rho}{\rho} + \frac{a_{33}}{2}\left(\frac{du_\theta}{d\rho} - \frac{u_\theta}{\rho}\right)\Big|_{\rho=\rho_2} &= p_\tau. \end{aligned} \tag{11}$$

Возможны следующие комбинации в граничных условиях: на внутреннем контуре задано одно из усилий и одно из перемещений, на внешнем — оставшиеся усилие и перемещение. Система (10) и граничные условия а), б) представляют собой обобщенную двухточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В граничные условия а), б) для общего случая армирования входят как обе неизвестные функции u_ρ, u_θ, так и их производные. Коэффициенты в (10) содержат полный набор структурных характеристик материала: число m^* семейств армирующих волокон, механические характеристики материалов связующего и волокна, интенсивность ω_m и тригонометрические функции углов армирования φ_m.

Для численного решения система (10) сводилась к системе 4-х дифференциальных уравнений первого порядка, затем строилась разностная схема, аппроксимирующая систему дифференциальных уравнений и краевые условия со вторым порядком точности. Полученная при этом система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов решалась методом ортогональной прогонки [6]. Постановка задачи свелась к реализации единой схемы, которая учитывает ее разнообразные механические формулировки.

3. Изогональное армирование

Наряду с криволинейными структурами армирования по спиралям, рассматриваемыми в кольцевых пластинах [1,3], строим изогональные траектории армирования (т.е. линии, пересекающие кривые данного однопараметрического семейства под одним и тем же заданным углом $\alpha = \operatorname{arctg} k$ [7]). Процедура нахождения изогональных траекторий к данным координатным линиям криволинейной ортогональной системы координат описана в монографии [1].

Для семейства логарифмических спиралей семейство изогональных траекторий к ним описывается уравнением вида $\rho = C_1 e^{\frac{(-1+k)\theta}{(1+k)}}$ (C_1 — произвольная константа, $k = \operatorname{tg}\alpha$). Иллюстрации армирования концентрического кольца по логарифмическим спиралям и изогональным им траекториям для значений $k = 3$, $k = 0,7$ приведены на рис. 1, 2, где параметр семейств траекторий принимает три значения, изогональные траектории изображены пунктирными линиями.

Для семейств спиралей Архимеда уравнение изогональных траекторий имеет вид

$$\rho = C_2(e^{-k\theta}(\theta + k)^{k^2}\theta + e^{-k\theta}(\theta + k)^{k^2}k), \tag{12}$$

где C_2 — произвольная константа. Армирование по спиралям и изогональным им траекториям в кольцевой пластине для значений $k = 0,7$, $k = 1,4$ приведены на рис. 3, 4.

Коэффициенты системы (10) учитывают способы армирования семействами волокон в направлении любых изогональных траекторий, что дает широкое разнообразие структур армирования и позволяет в рамках единой схемы решения (10) получать композиционную конструкцию с заранее заданными свойствами.

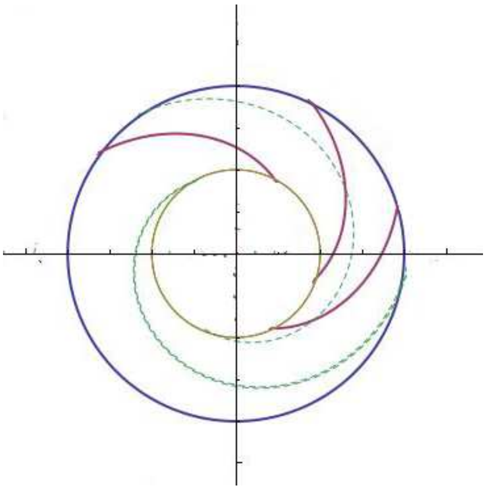

Рис. 1. Армирование концентрического кольца по логарифмическим спиралям и изогональным им траекториям для значения $k = 3$

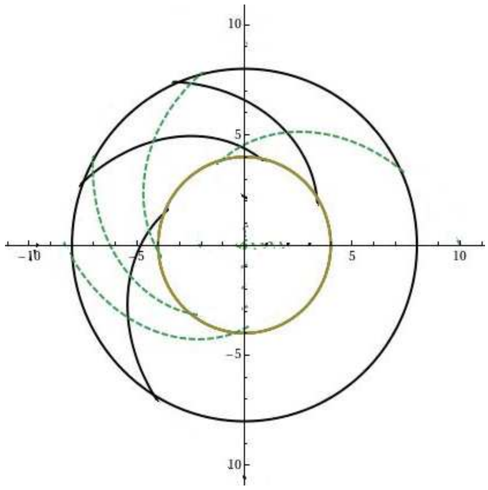

Рис. 2. Армирование концентрического кольца по логарифмическим спиралям и изогональным им траекториям для значения $k = 0,7$

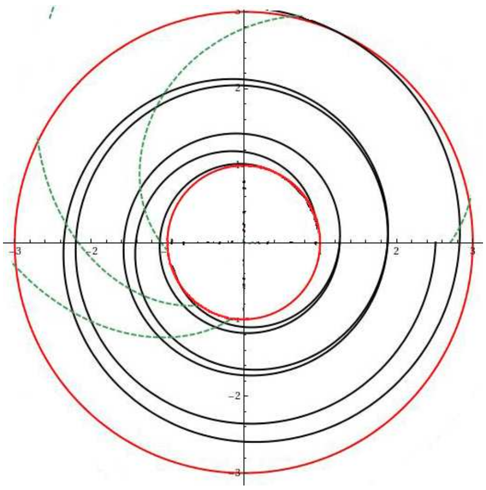

Рис. 3. Армирование по спиралям и изогональным им траекториям в кольцевой пластине для значений $k = 0,7$

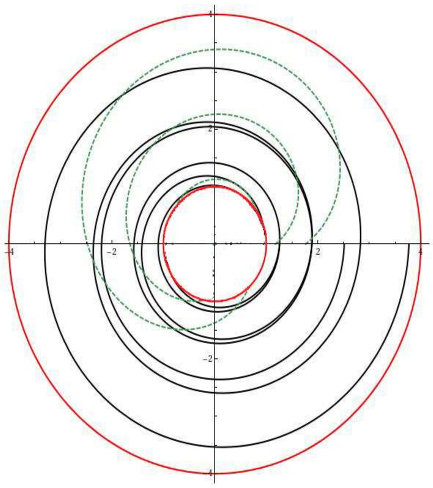

Рис. 4. Армирование по спиралям и изогональным им траекториям в кольцевой пластине для значений $k = 1,4$

Список литературы

[1] Ю.В.Немировский, Н.А.Федорова, Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов, Красноярск, СФУ, 2010.

[2] Ю.В.Немировский, Н.А.Федорова, Армирование плоских конструкций по криволинейным ортогональным траекториям, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та, Сер. физ.-мат. наук*, Самара, 2010, 96-104.

[3] А.П.Янковский, Равнонапряженное армирование кольцевых изгибаемых металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. наук.*, Самара, 2010, 42–55.

[4] И.Т.Вохмянин, Ю.В.Немировский, Особенности продольно-поперечного изгиба трехслойных кольцевых пластин с несимметричными структурами армирования, *Краевые задачи и математические модели, Труды 8-й Всероссийской конференции*, Новокузнецк, **1**(2006), 25–31.

[5] Yu.V.Nemirovsky, On the elastic behavior of the rein-forced layer, *Int. J. Mech. Sci.*, **12**(1970), 898–903.

[6] Дж.Ортега, У.Пул, Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений, М., Наука, 1986.

[7] В.В.Степанов, Курс дифференциальных уравнений, М., ГИТ-ТЛ, 1953.

Modeling for Reinforced with Isogonal Trajectories Ring-Shaped Lamels in Polar Coordinate System

Natalia A. Feodorova

The resolving differential equations system formulated in terms of movements for axially symmetric reinforced ring-shaped lamels problem is obtained in case of polar coordinate system. A variety of reinforcement structures is reached by isogonal trajectories building for given curves classes. In context of the consistent approach for differential equations system solving the composite construction with a priory specified properties is achieved.

Keywords: reinforcement, structural model, isogonal trajectories.