

**Е. М. Вечтомов, Я. В. Петухова (Киров, ВятГГУ)
ПОЛУТЕЛА ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ**

Обсуждаются элементы теории полутел [1–3].

Полутелом называется алгебраическая структура U с операциями сложения и умножения, являющаяся по умножению группой, по сложению – коммутативной полугруппой, в которой умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. *Ядром* полутела U называется класс единицы 1 произвольной конгруэнции на U . Подмножество K полутела U будет его ядром тогда и только тогда, когда K является нормальной подгруппой мультипликативной группы U с условием линейной выпуклости: $a, b \in K, u, v \in U, u + v = 1 \Rightarrow au + bv \in K$ [1].

Множество $\text{Con } U$ всех ядер полутела U замкнуто относительно операций умножения и пересечения и образует полную модулярную решетку, которая изоморфна решетке всех конгруэнций полутела U по отношению включения. Заметим, что если полутело U имеет только конечное число ядер, то решетка $\text{Con } U$ дистрибутивна (А. Н. Семёнов, см. [2]).

Наименьшее ядро полутела U , содержащее элемент $u \in U$, называется *главным ядром* и обозначается (u) . Если $(2) = U$, где $2 = 1 + 1$, то полутело U называется *ограниченным*. Если в полутеле $(2) = \{1\}$, т. е. $1 + 1 = 1$, то получаем аддитивно идемпотентное полутело. Заметим, что класс аддитивно идемпотентных полутел совпадает с классом решеточно упорядоченных групп [1]. Ограниченные полутела аддитивно сократимы, т. е. удовлетворяют квазитождеству $a + c = b + c \Rightarrow a = b$. Любое аддитивно сократимое полутело U имеет кольцо разностей $R(U) = U - U$, в которое U вкладывается с сохранением операций сложения и умножения. Для всякого ограниченного полутела U решетка ядер $\text{Con } U$ изоморфна решетке $\text{Id}R(U)$ всех идеалов его кольца разностей $R(U)$: каждому ядру $K \in \text{Con } U$ соответствует идеал $(1 - K)U = \{a - b : ab^{-1} \in K\}$ кольца $R(U)$, а каждому идеалу $I \in \text{Id}R(U)$ соответствует ядро $(I + 1) \cap U$ полутела U [2].

Зафиксируем натуральное число n . Пусть M_n – кольцо всех верхних треугольных матриц n -го порядка с действительными элементами с обычными операциями сложения и умножения матриц, V_n – множество всех матриц из M_n с положительными элементами на главной диагонали. Кольцо M_n является кольцом разностей аддитивно сократимого полутела V_n .

Теорема. Для любого натурального числа n полутело V_n ограниченное, все его ядра главные, решетка $\text{Con } U$ дистрибутивна, имеет единственный атом и число ее элементов равно $(n + 1)$ -му числу Каталана.

Список литературы

- [1] Hutchins H. C., Weinert H. J. *Homomorphisms and kernels of semifields* // Period. Math. Hungarica. 1990. Vol. 21. No 2. P. 113–152.
- [2] Вечтомов Е. М., Черанева А. В. *Полутела и их свойства* // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5. С. 3–54.
- [3] Вечтомов Е. М. *Строение полутел* // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 10. С. 3–42.