МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.В. Тюрнев

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

«Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования в качестве учебного пособия студентам радиотехнических и радиофизических направлений»

Красноярск 2001

УДК 53:51(07)
Т98

Рецензенты:

Кафедра радиофизики Красноярского государственного университета (зав. кафедрой доктор физ.-мат. наук, профессор Г.А. Петраковский);

Ю.В. Захаров, доктор физ.-мат. наук, профессор зав. кафедрой физики Сибирского государственного технологического университета.

Тюрнев В.В.

Т98 Уравнения математической физики: Учеб. пособие. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2001, 148 с.
ISBN 5-7636-0341-9

Изложены классические методы решения дифференциальных уравнений в частных производных на примере задач технической физики и электродинамики, приведены основные сведения по специальным функциям.

Предназначено для студентов направлений «Радиотехника» и «Радиофизика».

УДК 53:51(07)

ISBN 5-7636-0341-9

© КГТУ, 2001
© В.В. Тюрнев, 2001

Редактор Л.И. Злобина

ЛР № 020375 от 7.02.1997 г. Подп. В печать 16.03.2001. Формат 60×84.16.
Бумага тип. № 1. Офсетная печать. Усл. печ. л. 9,0. Уч.-изд. л. 9,0.
Тираж 200 экз.

Заказ 96. С 75

Отпечатано в ИПЦ КГТУ
660074, Красноярск, ул. Киренского, 26

1. Дифференциальные операторы

Уравнениями математической физики называют уравнения, описывающие математические модели физических явлений. Обычно такие уравнения имеют вид дифференциальных уравнений в частных производных. Помимо дифференциальных уравнений при описании математических моделей физики используют также интегральные и интегро-дифференциальные уравнения. Особое значение для исследования математических моделей физики приобретают прямые численные методы, использующие компьютер.

В этой книге рассматриваются методы решений *линейных дифференциальных уравнений в частных производных* и связанных с ними *обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Дифференциальные уравнения в частных производных принимают компактный вид при использовании специальных дифференциальных операторов. Все эти операторы выражаются через *оператор набла* ∇, который в прямоугольной декартовой системе координат определяется формулой

$$\nabla = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (1)$$

Он представляет собой векторную сумму частных производных по всем координатам. Здесь $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ – *единичные векторы координатных направлений*.

Градиент скалярной функции $\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \Phi(x,y,z)$ определяется формулой

$$\operatorname{grad}\Phi = \nabla\Phi = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \qquad (2)$$

Градиент, как и оператор набла, является векторной величиной. Полный дифференциал $d\Phi$ скалярной функции $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$, соответствующий перемещению точки $d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{i}}\,dx + \vec{\mathbf{j}}\,dy + \vec{\mathbf{k}}\,dz$, может быть вычислен по формуле

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz = d\vec{\mathbf{r}}\cdot\operatorname{grad}\Phi = (d\vec{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\,\Phi. \qquad (3)$$

Дивергенция векторной функции $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{F}}(x,y,z)$ определяется формулой

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{F}} = \nabla\cdot\vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{4}$$

Дивергенция – скалярная величина, так как она является скалярным произведением двух векторов.

Ротор векторной функции $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{F}}(x,y,z)$ определяется формулой

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}} = \nabla\times\vec{\mathbf{F}}. \tag{5}$$

Это векторная величина, так как она является векторным произведением двух векторов.

Оператор Лапласа или *лапласиан* определяется формулой

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{6}$$

Это – дифференциальный оператор второго порядка. Он является скалярной величиной.

Используя правила для скалярного и векторного произведения векторов, можно убедиться в справедливости следующих формул

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \nabla\cdot(\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi, \tag{7}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\mathbf{F}} = \nabla(\nabla\cdot\vec{\mathbf{F}}) = \nabla^2\vec{\mathbf{F}} + \nabla\times(\nabla\times\vec{\mathbf{F}}), \tag{8}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}} = \nabla\times(\nabla\times\vec{\mathbf{F}}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{\mathbf{F}}) - \nabla^2\vec{\mathbf{F}}, \tag{9}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = \nabla\times(\nabla\Phi) = 0, \tag{10}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{\mathbf{F}}) = 0. \tag{11}$$

Из формул (10) и (11) следует, что любую векторную функцию $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ можно представить в виде следующей суммы:

$$\vec{\mathbf{F}} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\vec{\mathbf{A}}. \tag{12}$$

Здесь первое слагаемое называют *потенциальной* составляющей векторной функции, а второе – *соленоидальной*. Для потенциальной составляющей ротор равен нулю, а дивергенция отлична от нуля. Для соленоидальной составляющей, наоборот, дивергенция равна нулю, а ротор отличен от нуля. Поэтому дивергенция характеризует величину потенциальной составляющей

векторной функции пространственных координат, а ротор характеризует величину соленоидальной составляющей.

Сущность дивергенции и ротора можно наглядно представить следующим образом. Если векторную функцию изображать в каждой точке в виде стрелки, то потенциальная составляющая векторной функции изобразится в виде расходящихся или сходящихся линий со стрелками, а соленоидальная составляющая изобразится в виде замкнутых линий со стрелками. Следовательно, дивергенция характеризует степень “расходимости” линий со стрелками, а ротор характеризует степень “закрученности” линий со стрелками.

2. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных

Уравнение, связывающее функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, ее частные производные и аргументы $x_1, \ldots, x_n$, называют *дифференциальным уравнением в частных производных*. Оно имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}) = 0. \qquad (1)$$

где F – заданная функция. Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение (1), называют *порядком уравнения*. Уравнение с частными производными называют *квазилинейным*, если оно линейно относительно всех старших производных. Уравнение называют *линейным*, если оно линейно относительно функции и всех ее производных. Линейные уравнения описывают лишь те физические процессы и явления, при которых состояние физической системы близко к положению равновесия. Описание же сильно возбужденных состояний физической системы требует учета в уравнении соответствующих нелинейных членов.

Квазилинейное уравнение второго порядка имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0. \qquad (2)$$

Уравнения вида (2) разделяют в каждой точке на *три типа*. Зафиксируем определенную точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и составим квадратичную форму относительно $t_i = x_i - x_i^0$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\, t_i t_j \,. \qquad (3)$$

Уравнение (2) принадлежит *эллиптическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (3) положительно определенная или отрицательно определенная. Напомним, что квадратичная форма (3) является положительно определенной или отрицательно определенной, если она после приведения к сумме квадратов

$$\sum_{i=1}^{n} a'_{ii} t_i'^2$$

с помощью линейного преобразования аргументов

$$t'_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, t_j$$

имеет, соответственно, все положительные или все отрицательные коэффициенты a'_{ii}.

Уравнение (2) принадлежит *гиперболическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (3) при приведении ее к сумме квадратов имеет все коэффициенты a'_{ii}, кроме одного, определенного знака, а оставшийся один коэффициент противоположного знака.

Уравнение (2) принадлежит *параболическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (3) при приведении ее к сумме квадратов имеет только один коэффициент, равный нулю, а все другие коэффициенты имеют одинаковые знаки.

Примером уравнения эллиптического типа является *уравнение Пуассона*

$$\Delta u = f(x,y,z). \qquad (4)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $u(x,y,z)$. Правой частью уравнения является заданная функция $f(x,y,z)$. Уравнение Пуассона описывает различные равновесные состояния. В частности оно описывает электростатический потенциал $u(x,y,z)$ зарядов, распределенных с объемной плотностью $\rho(x,y,z) = -f(x,y,z)$.

Частным случаем уравнения Пуассона является *уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0. \qquad (5)$$

Это однородное дифференциальное уравнение эллиптического типа. В частности оно описывает электростатический потенциал в области свободной от зарядов.

Примером уравнения гиперболического типа является *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = v^2 \Delta u \,. \tag{6}$$

Кроме оператора Лапласа оно содержит вторую производную по времени. Уравнение (6) описывает распространение различных волн, в том числе электромагнитных и акустических. Здесь константа v – скорость волны (фазовая и групповая) в свободном пространстве.

Примером уравнения параболического типа является *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial}{\partial t}u = a^2 \Delta u \,. \tag{7}$$

Кроме оператора Лапласа оно содержит первую производную по времени. Уравнение (7) описывает процессы распространения тепла и диффузии. Здесь a – константа температуропроводности (диффузии).

3. Классификация краевых задач

Любое дифференциальное уравнение математической физики имеет неограниченное число различных решений. Для того чтобы решение конкретной физической задачи было единственным, необходимо учитывать начальные и граничные условия. *Начальное условие* задает значение искомой функции u и ее производной $\partial u/\partial t$ в какой-либо момент времени $t = t_0$, называемый начальным. *Граничное условие* задает значение искомой функции или ее градиента на поверхности S пространственной области V, для которой ищется решение. Граничное условие называют однородным, если оно описывается однородным уравнением. Различают следующие типы краевых задач.

1. *Задача Коши*. Требуется найти решение $u(x,y,z,t)$ уравнения гиперболического или параболического типа при заданных начальных условиях для безграничной области. То есть дифференциальное уравнение решается

для случая, когда область V занимает все пространство. При этом начальные условия имеют вид

$$u_{|\,t=t_0} = u_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0} = u_1, \tag{1}$$

где $u_0(x,y,z)$ и $u_1(x,y,z)$ – заданные функции координат.

2. *Задача Дирихле* или *краевая задача I рода*. Требуется найти решение $u(x,y,z)$ уравнения эллиптического типа при заданных граничных условиях на функцию на границе S. Начальные условия, естественно, отсутствуют. В этой задаче граничные условия имеют вид

$$u|_S = u_0, \tag{2}$$

где u_0 – заданная функция на поверхности S.

3. *Задача Неймана* или *краевая задача II рода*. Требуется найти решение $u(x,y,z)$ уравнения эллиптического типа при заданных граничных условиях на производную функции $u(x,y,z)$ на границе S, начальные условия отсутствуют. В этой задаче граничные условия имеют вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = u_1, \tag{3}$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали $\vec{\mathbf{n}}$ к поверхности S, а u_1 – заданная функция на поверхности S.

4. *Краевая задача III рода*. Требуется найти решение $u(x,y,z)$ уравнения эллиптического типа при заданных граничных условиях на функцию $u(x,y,z)$ и ее производную на границе S, начальные условия отсутствуют. В этой задаче граничные условия имеют вид

$$\left[u + \alpha\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S = u_2, \tag{4}$$

где α и u_2 – заданные непрерывные функции на поверхности S.

5. *Смешанная задача*. Требуется найти решение $u(x,y,z,t)$ уравнения гиперболического или параболического типа при заданных начальных условиях и граничных условиях. При этом начальные условия имеют вид

$$u_{|\,t=t_0} = u_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0} = u_1, \tag{5}$$

где $u_0(x,y,z)$ и $u_1(x,y,z)$ – заданные функции координат, а граничные условия имеют вид

$$\left[\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right]\Big|_S = \gamma, \tag{6}$$

где α, β и γ – заданные непрерывные функции на S, причем

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0.$$

Краевые задачи имеют единственное решение. Для каждого типа уравнения это доказывается соответствующими математическими выкладками. Единственность решения имеет прямую связь с основными физическими принципами – законом сохранения энергии и вторым началом термодинамики.

4. Колебания струны

1. *Решение Даламбера*. Свободные колебания струны описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

которое является одномерным случаем волнового уравнения (2.6)*. Здесь $u(x,t)$ – функция, описывающая отклонение струны от равновесного положения. Получим общее решение уравнения (1). Для этого перейдем от переменных x и t к новым переменным

$$\xi = x - vt, \qquad \eta = x + vt.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0.$$

Или

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0.$$

Проинтегрировав по η, получаем

---

* Здесь и далее по тексту в ссылках на формулы, выражаемых двумя числами и разделительной точкой, первое число указывает номер раздела, а второе – номер формулы.

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \Phi(\xi),$$

где $\Phi(\xi)$ – произвольная функция ξ. Интегрируя полученное уравнение по ξ и рассматривая η как параметр, получим

$$u = \int \Phi(\xi)\, d\xi + \Phi_2(\eta).$$

Полагая

$$\int \Phi(\xi)\, d\xi = \Phi_1(\xi),$$

получим

$$u = \Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным (x, t), будем иметь

$$u(x,t) = \Phi_1(x - vt) + \Phi_2(x + vt). \qquad (2)$$

Решение (2) уравнения (1) называется *решением Даламбера*. Функция $\Phi_1(x - vt)$ описывает распространение *прямой волны*. Эта волна распространяется в положительном направлении оси x со скоростью v. Функция $\Phi_2(x + vt)$ описывает распространение *обратной волны* со скоростью v в отрицательном направлении оси x.

2. *Задача Коши*. Найдем решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \qquad (3)$$

Из начальных условий (3) имеем

$$\varphi_0(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x), \qquad \varphi_1(x) = -v\Phi'_1(x) + v\Phi'_2(x).$$

Интегрируя второе равенство, получим

$$\Phi_1(x) + \Phi_2(x) = \varphi_0(x), \quad \Phi_1(x) - \Phi_2(x) = -\frac{1}{v}\int_0^x \varphi_1(z)\, dz + C,$$

где C – произвольная постоянная. Из этих равенств находим

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2v}\int_0^x \varphi_1(z)\, dz + \frac{C}{2},$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2v}\int_0^x \varphi_1(z)\, dz - \frac{C}{2}.$$

Подставив полученные функции в (2), получим искомое решение

$$u(x,t)=\frac{\varphi_0(x-vt)+\varphi_0(x+vt)}{2}+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}\varphi_1(z)\,dz\,. \qquad (4)$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Начальные скорости точек струны равны нулю, то есть $\varphi_1(x)=0$. Из (4) имеем

$$u(x,t)=\frac{\varphi_0(x-vt)+\varphi_0(x+vt)}{2}.$$

2. Начальное смещение точек равно нулю, то есть $\varphi_0(x)=0$. Из (4) имеем

$$u(x,t)=\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}\varphi_1(z)\,dz$$

или, полагая

$$\frac{1}{2v}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz=\Psi(x),$$

получим

$$u(x,t)=\Psi(x+vt)-\Psi(x-vt).$$

3. *Смешанная задача (ограниченная струна)*. Рассмотрим полубесконечную струну, закрепленную в точке $x=0$ и безграничную в положительном направлении оси x. Эта задача сводится к решению уравнения (1) при начальных условиях (3) и граничном условии

$$u|_{x=0}=0. \qquad (5)$$

Решение Даламбера (2), конечно же, справедливо и в этом случае. Но имеется некоторое осложнение в формуле (4) с функцией начального смещения $\varphi_0(x)$ и функцией начальной скорости $\varphi_1(x)$, которые не определены при $x<0$. Доопределим их значения, исходя из граничного условия (5). Для этого наложим граничное условие (5) на решение задачи Коши (4)

$$\frac{\varphi_0(-vt)+\varphi_0(vt)}{2}+\frac{1}{2v}\int_{-vt}^{vt}\varphi_1(z)\,dz=0\,.$$

Видно, что граничное условие (5) выполнится автоматически, если функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ доопределить при $x<0$ формулами

$$\varphi_0(-x)=-\varphi_0(x),\qquad \varphi_1(-x)=-\varphi_1(x), \qquad (6)$$

то есть обе функции сделать нечетными. Тогда решение Коши (4) будет решением задачи о закрепленной струне на одном конце.

Аналогичным образом решается задача о струне конечной длины l, закрепленной на обоих концах. В этом случае функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ будут периодическими с периодом $2l$.

5. Метод Фурье (метод разделения переменных)

Метод Фурье или *метод разделения переменных* является одним из наиболее распространенных методов решения дифференциальных уравнений с частными производными. Изложим этот метод на примере задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах.

1. *Свободные колебания закрепленной струны*. Получим решение уравнения для колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x) \quad (0 \le x \le l). \tag{3}$$

Частные решения уравнения (1) будем сначала искать в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{4}$$

Подставив (4) в (1), получим

$$T''(t)X(x) = v^2 T(t)X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{v^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5}$$

Левая часть равенства (5) зависит только от t, а правая часть – только от x и равенство возможно лишь тогда, когда общая величина отношений (5) будет постоянной. Обозначим ее $-\lambda$. Тогда из равенства (5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T''(t) + v^2 \lambda T(t) = 0, \tag{6}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0. \tag{7}$$

Чтобы получить нетривиальные, то есть не равные тождественно нулю, решения вида (4), удовлетворяющие граничным условиям (2), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (7), удовлетворяющие граничным условиям

$$X|_{x=0}=0, \quad X|_{x=l}=0. \tag{8}$$

Найдем собственные значения λ и собственные функции $X(x)$ задачи (7), (8). Вид решения уравнения (7) зависит от λ.

1. При $\lambda<0$ общее решение имеет вид

$$X(x)=C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x}+C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (8), получим

$$C_1+C_2=0, \quad C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,l}+C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,l}=0.$$

Отсюда находим $C_1=0$, $C_2=0$. Следовательно, решение тривиально при $\lambda<0$.

2. При $\lambda=0$ общее решение имеет вид

$$X(x)=C_1+C_2 x.$$

Граничные условия дают

$$C_1=0, \quad C_1+C_2 l=0.$$

Отсюда находим $C_1=0$, $C_2=0$ и, следовательно, решение тривиально при $\lambda=0$.

3. При $\lambda>0$ общее решение имеет вид

$$X(x)=C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Удовлетворяя граничным условиям (8), получим

$$C_1=0, \quad C_1\cos(\sqrt{\lambda}l)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}l)=0.$$

Следовательно, нетривиальное решение задачи (7), (8) возможно только при *собственных значениях*

$$\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad (k=1, 2, 3, ...). \tag{9}$$

Этим собственным значениям соответствуют *собственные функции*

$$X_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{10}$$

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi vt}{l} + b_k \sin\frac{k\pi vt}{l},$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi vt}{l} + b_k \sin\frac{k\pi vt}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) при любых a_k и b_k.

В силу линейности и однородности уравнения (1) всякая конечная сумма решений будет также решением. То же справедливо и для ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi vt}{l} + b_k \sin\frac{k\pi vt}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (11)$$

если он сходится. Остается определить постоянные a_k и b_k, чтобы удовлетворялись начальные условия (3). Продифференцируем ряд (11) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi v}{l}\left(-a_k \sin\frac{k\pi vt}{l} + b_k \cos\frac{k\pi vt}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (12)$$

Полагая в (11) и (12) $t = 0$, в силу начальных условий (3) получим:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi v}{l} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (13)$$

Формулы (13) представляют собой разложения заданных функций $f(x)$ и $F(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$. Коэффициенты разложений (13) вычисляются по известным формулам:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi v}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \qquad (14)$$

Формулы (14) получаются следующим образом. Умножим левую и правую части первого уравнения (13) на $\sin(k'\pi x/l)$ и проинтегрируем по x от 0 до l:

$$\int_0^l f(x)\sin\frac{k'\pi x}{l}dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k'\pi x}{l}dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2}\int_0^l\left[\cos\frac{(k'-k)\pi x}{l} - \cos\frac{(k'+k)\pi x}{l}\right]dx =$$

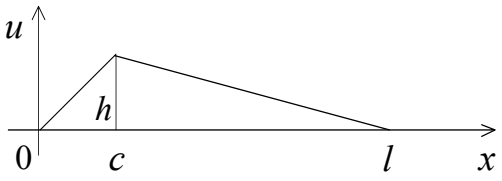
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{la_k}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(k'-k)z - \cos(k'+k)z\right]dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{la_k}{2\pi}\left[\frac{\sin(k'-k)z}{k'-k} - \frac{\sin(k'+k)z}{k'+k}\right]_{z=0}^{\pi} =$$

$$= \frac{la_{k'}}{2}.$$

Отсюда следует первое равенство формулы (14). Аналогичным образом получается второе равенство.

2. *Колебания отклоненной струны*. Рассмотрим колебания струны в щипковом музыкальном инструменте. Пусть струна закреплена на концах. Оттянем ее вверх в точке $x = c$, а затем отпустим, предоставив ей совершать свободные колебания.



В этом случае начальные условия будут следующие

$$u\big|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x, & 0 \le x \le c, \\ \dfrac{h(l-x)}{l-c}, & c \le x \le l, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Применив формулы (14), получим

$$a_k = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)\,k^2}\sin\frac{k\pi c}{l}, \quad b_k = 0. \tag{15}$$

Следовательно, отклонение струны выразится рядом

$$u(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi vt}{l}. \qquad (16)$$

Из (15) видно, что $a_k=0$, если $\sin(k\pi c/l)=0$. То есть в решении (16) будут отсутствовать те гармоники, которые имеют узел в точке $x=c$. Так, например, если точка $x=c$ есть середина струны, то в решении (16) будут отсутствовать все четные гармоники.

3. *Колебания струны под действием удара*. Пусть в начальный момент времени струна получает удар от молоточка в точке $x=c$, причем головка молоточка сконструирована так, что начальная скорость будет выражаться формулой

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases} v_0\cos\dfrac{\pi(x-c)}{h} & \text{при } |x-c|<\dfrac{h}{2}, \\ 0 & \text{при } |x-c|>\dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

Применив формулы (14), найдем

$$a_k=0, \qquad b_k=\frac{4hv_0}{\pi^2 vk}\frac{\sin\dfrac{k\pi c}{l}\cos\dfrac{k\pi h}{2l}}{1-\left(kh/l\right)^2}. \qquad (17)$$

Подставив эти значения в ряд (11), получим выражение для смещения струны

$$u(x,t)=\frac{4hv_0}{\pi^2 v}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{\sin\dfrac{k\pi c}{l}\cos\dfrac{k\pi h}{2l}}{1-\left(kh/l\right)^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi vt}{l}. \qquad (18)$$

6. Общая схема метода Фурье. Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим одномерное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u=\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

где $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ – непрерывные функции при $0\le x\le l$, причем $p(x)>0$, $q(x)>0$, $\rho(x)>0$.

Пусть требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\begin{aligned} \alpha u\big|_{x=0} + \beta \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0} = 0, \\ \gamma u\big|_{x=l} + \delta \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

где α, β, γ, δ – постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = F(x) \quad (0 \le x \le l). \tag{3}$$

Будем искать нетривиальные решения уравнения (1) в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{4}$$

удовлетворяющие только граничным условиям (2). Подставляя (4) в уравнение (1), получим

$$T(t)\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right] - q(x)X(x)T(t) = \rho(x)X(x)T''(t)$$

или

$$\frac{\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right] - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{5}$$

Левая часть равенства (5) зависит только от x, а правая часть – только от t и равенство возможно лишь тогда, когда общая величина отношений (5) будет постоянной. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$. Тогда из равенства (5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right] + \left[\lambda\rho(x) - q(x)\right]X(x) = 0. \tag{7}$$

Чтобы решение (4) удовлетворяло граничным условиям (2), необходимо, чтобы функция $X(x)$ удовлетворяла граничным условиям

$$\begin{aligned} \alpha X\big|_{x=0} + \beta X'\big|_{x=0} = 0, \\ \gamma X\big|_{x=l} + \delta X'\big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, мы приходим к *задаче Штурма-Лиувилля* о собственных числах:

Найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (7), удовлетворяющие граничным условиям (8).

Те значения λ, при которых задача имеет нетривиальное решение, называются *собственными числами* или *собственными значениями*, а сами эти решения, соответствующие собственному числу – *собственными функциями*. Совокупность всех собственных чисел λ называют *спектром* собственных значений.

В силу однородности уравнения (7) и однородности граничных условий, собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Выберем этот множитель так, чтобы

$$\int_0^l \rho(x) X_k^2(x)\, dx = 1. \tag{9}$$

Собственные функции, удовлетворяющие условию (9), будем называть *нормированными*.

Покажем, что собственные функции, соответствующие различным собственным числам, *ортогональны с весом* $\rho(x)$, то есть

$$\int_0^l \rho(x)\ X_1(x)\, X_2(x)\, dx = 0. \tag{10}$$

Пусть λ_1 и λ_2 – два различных собственных числа, а $X_1(x)$ и $X_2(x)$ – соответствующие им собственные функции. Тогда

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_1'(x)\right] + \left[\lambda_1\rho(x) - q(x)\right]X_1(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_2'(x)\right] + \left[\lambda_2\rho(x) - q(x)\right]X_2(x) = 0.$$

Умножим первое равенство на $X_2(x)$, второе — на $X_1(x)$ и вычтем одно из другого почленно. Получим равенство

$$X_2(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)X_1'(x)\right] - X_1(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)X_2'(x)\right] + \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\rho(x)X_1(x)X_2(x) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\rho(x)X_1(x)X_2(x) + \frac{d}{dx}\left\{ p(x)\left[X_2(x)X_1'(x) - X_1(x)X_2'(x)\right]\right\} = 0.$$

Интегрируя это равенство по x в пределах от 0 до l, получим

$$(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^l \rho(x)\, X_1(x)\, X_2(x)\, dx = p(x)\left[X_2(x)X_1'(x) - X_1(x)X_2'(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

Приняв во внимание в правой части равенства граничные условия (8), получаем

$$(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^l \rho(x)\, X_1(x)\, X_2(x)\, dx = 0.$$

Отсюда в силу $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует доказываемое равенство (10).

Перечислим общие свойства собственных функций и собственных чисел одномерной задачи Штурма-Лиувилля:

1. Всякому собственному числу соответствует только одна нормированная собственная функция.*

2. Собственные функции, соответствующие различным собственным числам, ортогональны с весом $\rho(x)$.

3. Все собственные числа вещественны при вещественных коэффициентах уравнения и граничных условий.

4. Спектр собственных чисел дискретен и состоит из бесконечного множества положительных чисел.†

5. Собственные функции образуют *полную систему*.

Систему функций называют *полной*, если не существует отличной от тождественного нуля функции, ортогональной ко всем функциям системы.

Доказательство второго свойства приводилось выше. Остальные свойства даются без доказательств.

Отметим, что изложенный метод Фурье применим не только к рассмотренному здесь дифференциальному уравнению гиперболического типа, но и ко многим другим уравнениям в частных производных.

7. Вынужденные колебания

1. *Вынужденные колебания струны*. Рассмотрим вынужденные колебания струны под действием внешней силы $p(x,t)$, рассчитанной на единицу длины. Эта задача сводится к решению уравнения

---

* В многомерном случае одному собственному значению могут отвечать несколько различных собственных функций. Такие решения называют вырожденными.

† В многомерном случае спектр собственных чисел может содержать еще и конечное множество отрицательных чисел.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,t) \qquad \left[g(x,t) = \frac{1}{\rho} p(x,t) \right] \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = f(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x). \tag{3}$$

Решение этой задачи будем искать в виде суммы

$$u(x,t) = w(x,t) + W(x,t), \tag{4}$$

где $w(x,t)$ – есть решение *неоднородного* уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g(x,t), \tag{5}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0 \tag{6}$$

и начальным условиям

$$w\big|_{t=0} = 0, \ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{7}$$

а $W(x,t)$ – есть решение *однородного* уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \tag{8}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$W|_{x=0} = 0, \quad W|_{x=l} = 0, \tag{9}$$

и начальным условиям

$$W\big|_{t=0} = f(x), \ \frac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x). \tag{10}$$

Решение $w(x,t)$ представляет *вынужденные колебания* струны, то есть такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы, когда начальные возмущения отсутствуют.

Решение $W(x,t)$ представляет *свободные колебания*, то есть такие колебания, которые происходят только вследствие начальных возмущений.

Методы нахождения свободных колебаний $W(x,t)$ мы уже рассмотрели. Здесь остановимся на нахождении только вынужденных колебаний $w(x,t)$. Как и в случае свободных колебаний, решение $w(x,t)$ будем искать в виде ряда:

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\ \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{11}$$

так что граничные условия (6) удовлетворяются сами собой. Подставив ряд (11) в уравнение (5), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\omega_k^2 T_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}=g(x,t), \tag{12}$$

где введено обозначение

$$\omega_k=\frac{k\pi v}{l}. \tag{13}$$

Разложим функция $g(x,t)$ в интервале $(0,l)$ в ряд Фурье по синусам:

$$g(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{14}$$

где

$$g_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l g(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{15}$$

Сравнивая выражения (12) и (14) для одной и той же функции $g(x,t)$, получим дифференциальное уравнение

$$T_k''(t)+\omega_k^2 T_k(t)=g_k(t)\quad(k=1,2,3,...), \tag{16}$$

определяющее функцию $T_k(t)$. Чтобы решение $w(x,t)$, определяемое рядом (11), удовлетворяло и начальным условиям (7), достаточно подчинить функцию $T_k(t)$ условиям

$$T_k(0)=0,\qquad T_k''(0)=0\qquad(k=1,2,3,\ldots). \tag{17}$$

Решение уравнения (16) при начальных условиях (17) имеет вид

$$T_k(t)=\frac{1}{\omega_k}\int_0^t g_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau.$$

Подставляя вместо $g_k(\tau)$ его выражение (15), получим

$$T_k(t)=\frac{2}{l\omega_k}\int_0^t d\tau\int_0^l g(x,\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\,. \qquad (18)$$

Зная $T_k(t)$, решение задачи о вынужденных колебаниях в соответствии с формулами (4) и (11) можно записать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi vt}{l}+b_k\sin\frac{k\pi vt}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (19)$$

где

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad b_k=\frac{2}{k\pi v}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \qquad (20)$$

2. Колебание под действием однородной периодической силы.

Пусть внешняя сила имеет вид

$$g(x,t)=A\sin\omega t,$$

а начальные смещения и начальные скорости струны отсутствуют. В этом случае, как следует из (19), решение выражается рядом

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(x)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (21)$$

где коэффициенты $T_k(t)$ определяются по формуле (18) и оказываются равными

$$\begin{aligned}
T_k(t)&=\frac{2}{l\omega_k}\int_0^t d\tau\int_0^l g(x,\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\\
&=\frac{2}{l\omega_k}\int_0^t d\tau\int_0^l A\sin\omega\tau\ \sin\omega_k(t-\tau)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\\
&=\frac{A}{l\omega_k}\int_0^t\left[\cos\ [\omega\tau-\omega_k(t\text{-}\tau)]-\cos\ [\omega\tau+\omega_k(t\text{-}\tau)]\right]d\tau\,\frac{l}{k\pi}\int_0^{k\pi}\sin x'dx'=\\
&=\frac{A}{l\omega_k}\left[\frac{\sin[(\omega+\omega_k)\tau-\omega_k t]}{\omega+\omega_k}-\frac{\sin[(\omega-\omega_k)\tau+\omega_k t]}{\omega-\omega_k}\right]_{\tau=0}^{t}\frac{l}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right]=\\
&=\frac{2A}{k\pi\omega_k}\left[1-(-1)^k\right]\frac{\omega\ \sin\omega_k t-\omega_k\sin\omega t}{\omega^2-\omega_k^2}.
\end{aligned}$$

В приведенных выкладках предполагалось, что ни одна резонансная частота $\omega_k=k\pi v/l$ $(k=1,2,3,\ldots)$ не совпадает с частотой внешней силы ω. Подставляя $T_k(t)$ в (21), получаем

$$u(x,t)=\frac{4Av}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega\ \sin\omega_{2k-1}t-\omega_{2k-1}\sin\omega t}{\omega_{2k-1}^2\left(\omega^2-\omega_{2k-1}^2\right)}\sin\frac{\omega_{2k-1}}{v}x\,. \tag{22}$$

В случае, когда частота внешней силы ω совпадет с одной из резонансных частот $\omega_{2k'-1}$, то функция $T_{2k'-1}(t)$, как следует из (18), принимает вид

$$T_{2k'-1}(t)=\frac{2Av}{l\,\omega_{2k'-1}^2}\left[\,\omega_{2k'-1}^{-1}\sin\omega_{2k'-1}t-t\cos\omega_{2k'-1}t\,\right]. \tag{23}$$

Отсюда смещение $u(x,t)$ в резонансном случае выражается формулой

$$\begin{aligned}u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}{}'\,&\frac{4Av}{l}\frac{\omega_{2k'-1}\sin\omega_{2k-1}t-\omega_{2k-1}\sin\omega_{2k'-1}t}{\omega_{2k-1}^2\left(\omega_{2k'-1}^2-\omega_{2k-1}^2\right)}\sin\frac{\omega_{2k-1}}{v}x+\\&+\frac{2Av}{l\,\omega_{2k'-1}^2}\left[\omega_{2k'-1}^{-1}\sin\omega_{2k'-1}t-t\cos\omega_{2k'-1}t\right],\end{aligned} \tag{24}$$

где штрих справа вверху у знака суммирования Σ говорит о том, что необходимо исключить слагаемое с $k=k'$, которое вынесено из-под знака суммирования.

Заметим, что в реальных физических объектах решение вида (23), содержащее слагаемое с линейно нарастающей во времени амплитудой колебаний, существовать не может из-за наличия диссипации энергии.

8. Вынужденные колебания струны с подвижными концами

Рассмотрим вынужденные колебания струны под действием внешней силы

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=g(x,t)\,, \tag{1}$$

когда концы ее не закреплены, а двигаются по закону

$$u\big|_{x=0}=\kappa_1(t),\quad u\big|_{x=l}=\kappa_2(t) \tag{2}$$

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0}=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x)\,. \tag{3}$$

К решению этой задачи нельзя применить метод Фурье, так как граничные условия (2) неоднородны. Но эта задача легко сводится к задаче с однородными граничными условиями.

Введем вспомогательную функцию

$$w(x,t) = \kappa_1(t) + \left[\kappa_2(t) - \kappa_1(t)\right]\frac{x}{l}. \tag{4}$$

Ясно, что

$$w\big|_{x=0} = \kappa_1(t), \qquad w\big|_{x=l} = \kappa_2(t). \tag{5}$$

Решение задачи ищем в виде суммы

$$u(x,t) = w(x,t) + W(x,t), \tag{6}$$

где $W(x,t)$ – новая неизвестная функция.

В силу граничных условий (2), (5) и начальных условий (3), функция $W(x,t)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$W\big|_{x=0} = 0, \quad W\big|_{x=l} = 0 \tag{7}$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} W\big|_{t=0} &= f(x) - \kappa_1(0) - \left[\kappa_2(0) - \kappa_1(0)\right]\frac{x}{l} = f_1(x), \\ \frac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=0} &= F(x) - \kappa_1'(0) - \left[\kappa_2'(0) - \kappa_1'(0)\right]\frac{x}{l} = F_1(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя (6) в (1), получим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g(x,t). \tag{9}$$

Учитывая определение (4) функции $w(x,t)$, получаем уравнение для искомой функции

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = g_1(x,t), \tag{10}$$

где введено обозначение

$$g_1(x,t) = g(x,t) - \kappa_1''(t) - \left[\kappa_2''(t) - \kappa_1''(t)\right]\frac{x}{l}. \tag{11}$$

В результате мы пришли к задаче с однородными граничными условиями, метод решения которой нам уже известен.

9. Колебания прямоугольной мембраны

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую пленку. Задача о колебаниях мембраны сводится к решению двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} u\big|_{x=0} &= 0, \quad u\big|_{x=l_x} = 0, \\ u\big|_{y=0} &= 0, \quad u\big|_{y=l_y} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = f(x,\ y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x, y)\,, \tag{3}$$

где $u(x,y,t)$ – величина смещения мембраны от положения равновесия.

Частные решения будем искать в виде

$$u(x,y,t) = T(t)\,U(x,y). \tag{4}$$

Они должны удовлетворять граничным условиям (2). Подставив (4) в (1), получим

$$\frac{T''(t)}{v^2 T(t)} = \frac{U''_{xx}(x, y) + U''_{yy}(x, y)}{U(x, y)}.$$

Очевидно, что это равенство возможно только в случае, когда обе его части равны константе. Обозначим ее через $-k^2$ и, принимая во внимание граничные условия (2), найдем что

$$T''(t) + k^2 v^2 T(t) = 0 \tag{5}$$

и

$$U''_{xx} + U''_{yy} + k^2 U = 0\,, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} U\big|_{x=0} &= 0, \quad U\big|_{x=l_x} = 0\,, \\ U\big|_{y=0} &= 0, \quad U\big|_{y=l_y} = 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Граничную задачу (6) и (7) будем решать методом Фурье, полагая

$$U(x,y) = X(x)\,Y(y)\,. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (6), получим

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2 = -\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Отсюда получаем два уравнения

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0, \tag{9}$$

где

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \tag{10}$$

Общее решение уравнений (9) имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos\ k_x x + C_2 \sin k_x x, \\ Y(y) &= C_3 \cos\ k_y y + C_4 \sin k_y y. \end{aligned} \tag{11}$$

Из (7) получаем граничные условия

$$\begin{aligned} X\big|_{x=0} &= 0, \quad X\big|_{x=l_x} = 0, \\ Y\big|_{y=0} &= 0, \quad Y\big|_{y=l_y} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Откуда ясно, что $C_1 = C_3 = 0$. Если мы положим $C_2 = C_4 = 1$, то окажется

$$X(x) = \sin k_x x, \qquad Y(y) = \sin k_y y, \tag{13}$$

причем должно быть

$$\sin k_x l_x = 0, \qquad \sin k_y l_y = 0. \tag{14}$$

Из (14) следует, что k_x и k_y имеют бесчисленное множество значений:

$$k_m = m\pi/l_x, \quad k_n = n\pi/l_y \quad (m,\ n = 1, 2, 3, ...). \tag{15}$$

Тогда из равенства (10) получим значения постоянной k^2:

$$k_{mn}^2 = k_m^2 + k_n^2. \tag{16}$$

Таким образом, собственным числам (15), (16) соответствуют собственные функции

$$U_{mn}(x,y) = \sin(k_m x)\sin(k_n y) \tag{17}$$

граничной задачи (6), (7).

Обратимся теперь к уравнению (5). Его общее решение имеет вид:

$$T_{mn}(t) = A_{mn}\cos(vk_{mn}t) + B_{mn}\sin(vk_{mn}t). \tag{18}$$

Таким образом, частные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2), имеют вид

$$u_{mn}(x,y,t) = [A_{mn}\cos(vk_{mn}t) + B_{mn}\sin(vk_{mn}t)]\sin(k_m x)\sin(k_n y).$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3), составим ряд

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{mn}\cos(vk_{mn}t) + B_{mn}\sin(vk_{mn}t)\right]\sin(k_m x)\sin(k_n y). \qquad (19)$$

Для выполнения начальных условий необходимо

$$u\big|_{t=0} = f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin(k_m x)\ \sin(k_n y), \qquad (20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v\,k_{mn}B_{mn}\sin(k_m x)\sin(k_n y). \qquad (21)$$

Для определения A_{mn} и B_{mn} умножим обе части уравнений (20) и (21) на

$$\sin(k_{m'}x)\sin(k_{n'}y)$$

и проинтегрируем по x от 0 до l_x и по y от 0 до l_y. Принимая во внимание, что

$$\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}\sin(k_m x)\sin(k_n y)\sin(k_{m'}x)\sin(k_{n'}y)\,dx\,dy =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq m' \text{ или } n \neq n' \\ \dfrac{l_x l_y}{4}, & \text{если } m = m',\ n = n', \end{cases}$$

получим

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{l_x l_y}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y} f(x,y)\sin(k_m x)\sin(k_n y)\,dx\,dy, \\ B_{mn} &= \frac{4}{v l_x l_y k_{mn}}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y} F(x,y)\sin(k_m x)\sin(k_n y)\,dx\,dy. \end{aligned} \qquad (22)$$

Решение (19) можно записать также в виде

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} M_{mn}\sin(k_m x)\sin(k_n y)\sin(vk_{mn}t + \varphi_{mn}), \qquad (23)$$

где

$$M_{mn} = \sqrt{A_{mn}^2 + B_{mn}^2}, \quad \varphi_{mn} = \operatorname{arctg}\frac{A_{mn}}{B_{mn}}. \qquad (24)$$

Видно, что частота собственного колебания определяется формулой

$$\omega_{mn} = v k_{mn}.$$

Мы рассмотрели метод решение двумерной задачи о собственных колебаниях прямоугольной мембраны методом разделения переменных. Расчет производился в прямоугольной декартовой системе координат. Очевидно, что задачу о собственных колебаниях круглой мембраны следует выполнять в полярной системе координат. Прежде чем приступить к решению этой задачи, сначала научимся записывать уравнения математической физики в криволинейных системах координат и, в частности, в полярной системе. Затем ознакомимся с уравнением Бесселя, к которому приходят при решении уравнений, записанных в полярной или цилиндрической системах координат.

10. Криволинейные системы координат

Криволинейная система координат каждой точке трехмерного пространства с декартовыми координатами x, y, z ставит в соответствие тройку действительных чисел x_1, x_2, x_3. Криволинейные координаты задаются тремя формулами

$$x_1 = x_1(x,y,z), \qquad x_2 = x_2(x,y,z), \qquad x_3 = x_3(x,y,z), \tag{1}$$

где функции (1) однозначны и непрерывно дифференцируемы. Система координат x_1, x_2, x_3 будет *декартовой* (но не обязательно прямоугольной), если все уравнения (1) линейны.

Условия $x_i = x_i(x,y,z) = const$ определяют *координатную поверхность*. Поверхности, соответствующие различным значениям одной и той же координаты x_i, не пересекаются. Две координатные поверхности, соответствующие различным координатам x_i и x_j, пересекаются по *координатной линии*, соответствующей третьей координате x_k. Каждая точка $(x,y,z) \equiv (x_1,x_2,x_3)$ может быть представлена как точка пересечения трех координатных поверхностей или трех координатных линий.

Элемент длины дуги ds между двумя соседними точками $(x,y,z) \equiv$ $\equiv (x_1,x_2,x_3)$ и $(x+dx, y+dy, z+dz) \equiv (x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ задается квадратичной дифференциальной формой:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_{ik}(x_1,x_2,x_3)\, dx_i dx_k, \tag{2}$$

где

$$g_{ik}(x_1,x_2,x_3)=\left[\frac{\partial x}{\partial x_i}\frac{\partial x}{\partial x_k}+\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_k}+\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_k}\right],\quad i,k=1,2,3.$$

Функции $g_{ik}(x_1,x_2,x_3)$ называют *компонентами метрического тензора*.

Шесть координатных поверхностей, соответствующих точкам (x_1,x_2,x_3) и $(x_1+dx_1,x_2+dx_2,x_3+dx_3)$, образуют *элемент объема* (параллелепипед)

$$dV=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3. \tag{3}$$

Здесь мы используем *функциональный определитель*, называемый также *якобианом*, который определяется формулой

$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}\equiv\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right]. \tag{4}$$

Якобиан связан с метрическим тензором формулой

$$\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}\right]^2\equiv\det\left[g_{ik}(x_1,x_2,x_3)\right]\equiv g. \tag{5}$$

Система координат называется *правой*, если касательные векторы к координатным линиям x_1,x_2,x_3 образуют правую тройку. Для правой системы координат якобиан

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=\sqrt{g}>0. \tag{6}$$

Если векторная функция $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ описывается в криволинейных координатах x_1,x_2,x_3, то удобнее применять *локальный базис* из векторов, касательных к координатным линиям в каждой точке. Такие *базисные векторы* сами являются векторными функциями точки.

Каждая векторная функция $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})\equiv\vec{\mathbf{F}}(x_1,x_2,x_3)$ может быть однозначно представлена в виде

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})=\vec{\mathbf{F}}(x_1,x_2,x_3)=F_1\vec{\mathbf{i}}_1+F_2\vec{\mathbf{i}}_2+F_3\vec{\mathbf{i}}_3 \tag{7}$$

в каждой точке $(\vec{\mathbf{r}})=(x_1,x_2,x_3)$. Величины F_1, F_2 и F_3 называют *физическими координатами* вектора $\vec{\mathbf{F}}$. Локальные базисные векторы $\vec{\mathbf{i}}_1(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{\mathbf{i}}_2(x_1,x_2,x_3$, $\vec{\mathbf{i}}_3(x_1,x_2,x_3)$ и физические координаты F_1, F_2, F_3 связаны с ортами

$\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ прямоугольной декартовой системы координат и ее координатами F_x, F_y, F_z соотношениями:

$$\vec{\mathbf{i}} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{g_{ii}} \frac{\partial x_i}{\partial x} \vec{\mathbf{i}}_i, \quad \vec{\mathbf{j}} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{g_{ii}} \frac{\partial x_i}{\partial y} \vec{\mathbf{i}}_i, \quad \vec{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{g_{ii}} \frac{\partial x_i}{\partial z} \vec{\mathbf{i}}_i, \tag{8}$$

$$F_x = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial x_i} \frac{F_i}{\sqrt{g_{ii}}}, \quad F_y = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{F_i}{\sqrt{g_{ii}}}, \quad F_z = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{F_i}{\sqrt{g_{ii}}}. \tag{9}$$

Заметим, что функции $\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial x}{\partial x_i}$, $\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial y}{\partial x_i}$, $\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial z}{\partial x_i}$ являются направляющими косинусами орта $\vec{\mathbf{i}}_i$ по отношению к осям Ox, Oy, Oz.

Многие практически важные задачи допускают применение ортогональных криволинейных координат. Система криволинейных координат x_1, x_2, x_3 называется *ортогональной*, если функции $g_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяют соотношениям

$$g_{ik}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k. \tag{10}$$

Координатные линии, а значит и векторы локального базиса $\vec{\mathbf{i}}_1$, $\vec{\mathbf{i}}_2$, $\vec{\mathbf{i}}_3$ будут при этом перпендикулярны друг другу в каждой точке.

В ортогональной системе координат справедливы следующие векторные соотношения:

$$\vec{\mathbf{i}}_i \cdot \vec{\mathbf{i}}_k = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k, \end{cases} \tag{11}$$

$$\vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\mathbf{i}}_2 = \pm \vec{\mathbf{i}}_3, \quad \vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\mathbf{i}}_3 = \pm \vec{\mathbf{i}}_1, \quad \vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\mathbf{i}}_1 = \pm \vec{\mathbf{i}}_2, \tag{12}$$

$$\vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\mathbf{i}}_1 = \vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\mathbf{i}}_2 = \vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\mathbf{i}}_3 = 0, \tag{13}$$

$$\nabla = \pm \left(\frac{\vec{\mathbf{i}}_1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\vec{\mathbf{i}}_2}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\vec{\mathbf{i}}_3}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \tag{14}$$

$$\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{G}} = F_1 G_1 + F_2 G_2 + F_3 G_3, \tag{15}$$

$$\left| \vec{\mathbf{F}} \right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}, \tag{16}$$

$$\vec{\mathbf{F}}\times\vec{\mathbf{G}}=\pm\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}}_1 & \vec{\mathbf{i}}_2 & \vec{\mathbf{i}}_3\\ F_1 & F_2 & F_3\\ G_1 & G_2 & G_3\end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$\nabla\Phi=\pm\left(\frac{\vec{\mathbf{i}}_1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\vec{\mathbf{i}}_2}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\frac{\vec{\mathbf{i}}_3}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right), \tag{18}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{F}}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}F_1\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}F_2\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{33}}}F_3\right)\right], \tag{19}$$

$$\nabla\times\vec{\mathbf{F}}=\frac{\pm1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\sqrt{g_{11}}\vec{\mathbf{i}}_1 & \sqrt{g_{22}}\vec{\mathbf{i}}_1 & \sqrt{g_{33}}\vec{\mathbf{i}}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ \sqrt{g_{11}}F_1 & \sqrt{g_{22}}F_2 & \sqrt{g_{33}}F_3\end{vmatrix}, \quad g\equiv g_{11}g_{22}g_{33}, \tag{20}$$

$$\Delta\Phi=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\right]. \tag{21}$$

Здесь знаки плюс и минус относятся, соответственно, к правой и левой системам координат.

Векторные выражения для $\Delta\vec{\mathbf{F}}$ получают из формулы

$$\Delta\vec{\mathbf{F}}\equiv\nabla\left(\nabla\cdot\vec{\mathbf{F}}\right)-\nabla\times\left(\nabla\times\vec{\mathbf{F}}\right). \tag{22}$$

Таким образом, формулы, описывающие действие оператора Лапласа на скалярную и векторную функцию в криволинейной системе координат, могут существенно различаться. В частности, может иметь место неравенство $(\Delta\vec{\mathbf{F}})_i\neq\Delta F_i$.

Из формулы (2) следует, что векторный элемент линии $d\vec{\mathbf{r}}$ имеет физические координаты $ds_1=\sqrt{g_{11}}dx_1$, $ds_2=\sqrt{g_{22}}dx_2$, $ds_3=\sqrt{g_{33}}dx_3$, то есть его можно записать одним из следующих способов:

$$\begin{aligned}d\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{i}}dx+\vec{\mathbf{j}}dy+\vec{\mathbf{k}}dz=\vec{\mathbf{i}}_1ds_1+\vec{\mathbf{i}}_2ds_2+\vec{\mathbf{i}}_3ds_3=\\ =\vec{\mathbf{i}}_1\sqrt{g_{11}}dx_1+\vec{\mathbf{i}}_2\sqrt{g_{22}}dx_2+\vec{\mathbf{i}}_3\sqrt{g_{33}}dx_3.\end{aligned} \tag{23}$$

Элемент площади на координатной поверхности, отвечающей координате $x_k=const$, выражается формулами

$$d\vec{\mathbf{S}} = \sqrt{g_{ii}g_{jj}}\ \vec{\mathbf{i}}_k\ dx_i dx_j = \vec{\mathbf{i}}_k\ ds_i ds_j \qquad (i \neq j \neq k \neq i \quad k = 1,2,3). \tag{24}$$

Элемент объема dV, появляющийся в выражениях для объемного интеграла, дается формулами

$$dV = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 = \pm\sqrt{g}\ dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = \pm\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\ dx_1 dx_2 dx_3 = \pm\, ds_1 ds_2 ds_3\,. \tag{25}$$

В ортогональных системах координат часто вместо диагональных компонент метрического тензора g_{ii} используют *координатные параметры Ламе*

$$h_i = \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}\,. \tag{26}$$

Из (2) видно, что параметр Ламе h_i есть коэффициент пропорциональности между приращением dx_i криволинейной координаты x_i и приращением ds_i координаты $\vec{\mathbf{r}}$ в декартовой системе.

Отметим, что в *цилиндрической системе координат* (r,φ,z), определяемой равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \tag{27}$$

параметры Ламе имеют значения

$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1, \tag{28}$$

а в *сферической системе координат* (r,θ,φ), определяемой равенствами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \tag{29}$$

параметры Ламе имеют значения

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\sin\theta. \tag{30}$$

Поэтому формулы (18)–(21) для цилиндрической системы координат имеют вид

$$\nabla\Phi = \vec{\mathbf{i}}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\vec{\mathbf{i}}_\varphi}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \vec{\mathbf{i}}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{31}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \tag{32}$$

$$\nabla\times\vec{\mathbf{F}}=\vec{\mathbf{i}}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)+\vec{\mathbf{i}}_\varphi\left(\frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r}\right)+\vec{\mathbf{i}}_z\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right),\tag{33}$$

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},\tag{34}$$

а для сферической

$$\nabla\Phi=\vec{\mathbf{i}}_r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\vec{\mathbf{i}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\vec{\mathbf{i}}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},\tag{35}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{F}}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\,F_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi},\tag{36}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{\mathbf{F}}=\vec{\mathbf{i}}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta\,F_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]+\vec{\mathbf{i}}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\right]+\\+\vec{\mathbf{i}}_\varphi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right],\end{aligned}\tag{37}$$

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}.\tag{38}$$

11. Уравнение Бесселя. Цилиндрические функции

Уравнением Бесселя называют обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$Z''(z)+\frac{1}{z}Z'(z)+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)Z(z)=0.\tag{1}$$

Здесь $Z(z)$ – функция аргумента z, а ν – параметр уравнения.

Функции, являющиеся решением уравнения Бесселя, называются *цилиндрическими*. Это – *специальные функции*, то есть они не являются элементарными функциями. Общее решение уравнения Бесселя можно записать в виде

$$Z_\nu(z)=aJ_\nu(z)+bN_\nu(z),\tag{2}$$

где $J_\nu(z)$ – *функция Бесселя первого рода* ν*-го порядка*, а $N_\nu(z)$ – *функция Бесселя второго рода* ν*-го порядка*. Последнюю функцию также называют *функцией Неймана* или *функцией Вебера*.

Функция Бесселя первого рода определяется следующим степенным рядом

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} . \tag{3}$$

Здесь знаменатель коэффициентов разложения содержит *гамма-функцию*, которая определяется интегралом

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{\nu-1} dx . \tag{4}$$

Гамма-функция удовлетворяет уравнению

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu). \tag{5}$$

В частности для целых $\nu = n$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Ряд (3) сходится при любом значении z.

Функция Неймана связана с функцией Бесселя формулой

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \quad (\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{7}$$

Формула (7) не применима для целых значений ν, так как дает неопределенность типа $0/0$. Раскрытие неопределенности по *правилу Лопиталя* дает следующую формулу при $\nu = n$:

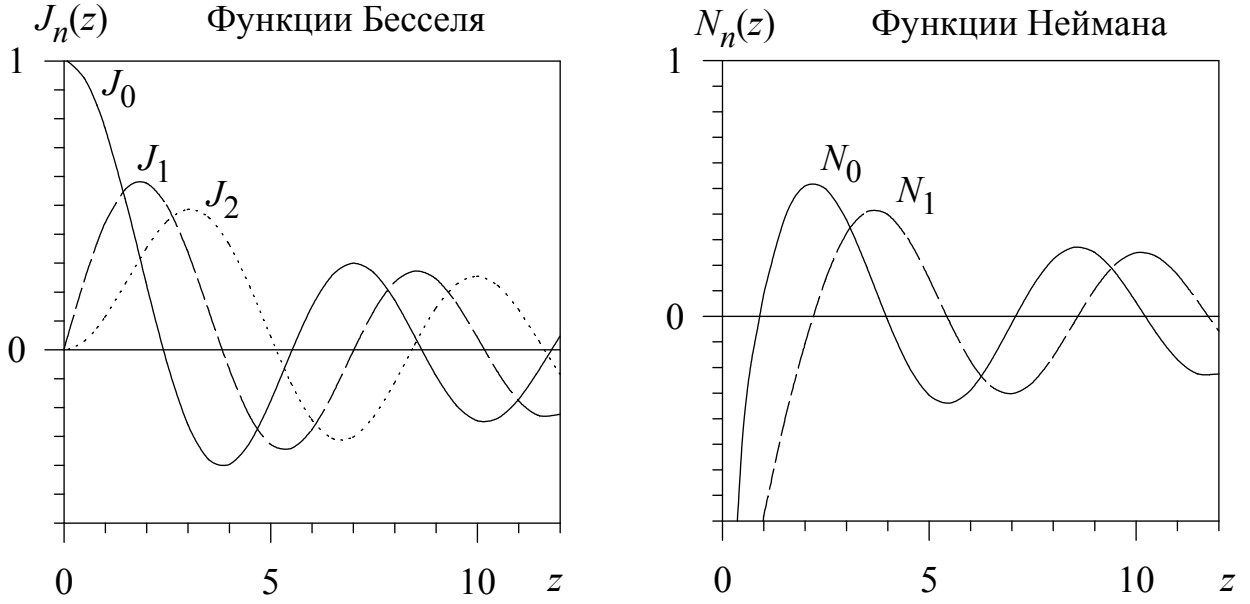
$$\begin{aligned} N_n(z) = {} & \frac{2}{\pi} J_n(z)\left[\ln\frac{z}{2} + C\right] - \\ & - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n+k}\frac{1}{j}\right) - \\ & - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} . \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь использована *постоянная Эйлера-Маскерони*, определяемая как

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0{,}5772157\,. \qquad (9)$$

Функция Бесселя целого порядка имеет следующее *интегральное представление* (формула Бесселя):

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(nx - z\sin x\right)dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \qquad (10)$$



Цилиндрические функции целого порядка ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

Цилиндрические функции полуцелого порядка выражаются через элементарные функции следующими формулами:

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\,, \qquad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z\,,$$

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\cos z + \frac{\sin z}{z}\right), \qquad J_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\sin z - \frac{\cos z}{z}\right), \qquad (11)$$

$$J_{k+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^{k+1/2}\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k \frac{\sin z}{z} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Все цилиндрические функции удовлетворяют следующим *рекуррентным соотношениям*:

$$Z_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}Z_\nu(z) - Z_{\nu-1}(z) = \frac{\nu}{z}Z_\nu(z) - \frac{d}{dz}Z_\nu(z) = -z^\nu\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu}Z_\nu(z)\right]. \qquad (12)$$

Функции Бесселя и Неймана при больших значениях аргумента описываются *асимптотическими разложениями*:

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad N_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \qquad \left(|z| >> \nu, \quad z \to \infty\right) \tag{13}$$

Помимо вещественных функций Бесселя и Неймана используют также комплексные *функции Ханкеля* (Ганкеля) первого и второго рода, определяемые формулами:

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(z) + iN_\nu(z), \qquad H_\nu^{(2)} = J_\nu(z) - iN_\nu(z). \tag{14}$$

Очевидно, что асимптотическое поведение этих функций будет описываться формулами:

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \qquad H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}. \qquad \left(|z| >> \nu, \quad z \to \infty\right) \tag{15}$$

Для функций Бесселя $J_\nu(z)$ справедливо следующее *условие ортогональности*. Пусть $\mu_m^{(\nu)}$ и $\mu_{m'}^{(\nu)}$ два нуля одной функции Бесселя, то есть $J_\nu(\mu_m^{(\nu)}) = 0$ и $J_\nu(\mu_{m'}^{(\nu)}) = 0$. Тогда имеет место условие

$$\int_0^1 J_\nu(\mu_m^{(\nu)} x) J_\nu(\mu_{m'}^{(\nu)} x)\, x\, dx = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq m' \\ \frac{1}{2} J_\nu'^2(\mu_m^{(\nu)}), & \text{при } m = m'. \end{cases} \tag{16}$$

Используя рекуррентные соотношения (12), получим выражение для производной от Бесселевой функции

$$J_\nu'(z) = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z).$$

Учитывая, что $\mu_m^{(\nu)}$ есть нуль функции Бесселя, формулу (16) можно переписать в виде

$$\int_0^1 J_\nu(\mu_m^{(\nu)} x) J_\nu(\mu_{m'}^{(\nu)} x)\, x\, dx = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq m' \\ \frac{1}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_m^{(\nu)}), & \text{при } m = m'. \end{cases} \tag{17}$$

12. Свободные колебания круглой мембраны

Приступим к решению задачи о свободных колебаниях круглой мембраны радиуса r_1. В этом случае граничное условие имеет вид

$$u\Big|_{x^2+y^2=r_1^2} = 0.$$

Наиболее просто оно записывается в *полярной системе координат*:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{1}$$

В ней граничное условие имеет вид

$$u|_{r=r_1} = 0, \tag{2}$$

а начальные условия имеют вид

$$u|_{t=0} = f(r,\varphi), \quad \partial u/\partial t|_{t=0} = F(r,\varphi). \tag{3}$$

Поэтому двумерное уравнение упругих колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{4}$$

следует переписать в полярной системе координат. Учитывая, что двумерный оператор Лапласа Δ в полярной системе координат имеет вид (см. (10.34)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

уравнение колебаний (4) переписываем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{5}$$

Применяя метод Фурье, положим

$$u(r,\varphi,t) = T(t)\,U(r,\varphi). \tag{6}$$

Тогда для функции $T(t)$ мы получим уравнение

$$T''(t) + \nu^2\lambda^2 T(t) = 0,$$

где λ – постоянная разделения переменных. Общее решение уравнения есть

$$T(t) = C\cos\nu\lambda t + D\sin\nu\lambda t. \tag{7}$$

Для функции $U(r,\varphi)$ мы получим следующую граничную задачу:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+\lambda^2 U=0, \tag{8}$$

$$U|_{r=r_1}=0. \tag{9}$$

Уравнение (8) также будем решать методом разделения переменных, то есть будем искать решение в виде

$$U(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi). \tag{10}$$

Подставив (10) в (8) и разделив переменные, получим

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda^2 r^2 R(r)}{R(r)}=-\nu^2. \tag{11}$$

Отсюда, приняв во внимание (9) и (10), придем к двум граничным задачам:

$$\Phi_\nu''(\varphi)+\nu^2\Phi_\nu(\varphi)=0, \tag{12}$$

$$\Phi_\nu(\varphi+2\pi)=\Phi_\nu(\varphi), \tag{13}$$

$$R_\nu''(r)+\frac{1}{r}R_\nu'(r)+\left(\lambda^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)R_\nu(r)=0, \tag{14}$$

$$R_\nu|_{r=r_1}=0, \qquad R_\nu|_{r=0}\neq\infty. \tag{15}$$

Видно, что нетривиальные периодические решения задачи (12), (13) существуют лишь при условии $\nu=n$ (n – целое число) и имеют вид

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{16}$$

Вернемся к уравнению (14). Вводя новую переменную

$$z=\lambda r, \tag{17}$$

приходим к уравнению Бесселя

$$R_n''(z)+\frac{1}{z}R_n'(z)+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)R_n(z)=0. \tag{18}$$

Поэтому общее решение уравнения (14) для радиальной функции $R_n(r)$ имеет вид

$$R_n(r)=a_n J_n(\lambda r)+b_n N_n(\lambda r). \tag{19}$$

Накладывая на общее решение (19) граничные условия (15), получаем

$$R_{nm}(r)=J_n(\mu_m^{(n)}r/r_1) \quad (\lambda_m^{(n)}=\mu_m^{(n)}/r_1), \tag{20}$$

где $\mu_m^{(n)}$ – m-й нуль функции $J_n(z)$. Учитывая формулы (10), (16), находим

$$U_{nm}(r,\varphi)=\left[A_{nm}\cos n\varphi\ +B_{nm}\sin n\varphi\right]J_n(\mu_m^{(n)}r/r_1). \tag{21}$$

Наконец, учитывая формулу (7), получаем общее решение для свободных колебаний круглой мембраны:

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\left[\begin{matrix}\left(A'_{nm}\cos(\mu_m^{(n)}vt/r_1)+B'_{nm}\sin(\mu_m^{(n)}vt/r_1)\right)\cos\ n\varphi+\\+\left(C'_{nm}\cos(\mu_m^{(n)}vt/r_1)+D'_{nm}\sin(\mu_m^{(n)}vt/r_1)\right)\sin\ n\varphi\end{matrix}\right]J_n(\mu_m^{(n)}r/r_1). \tag{22}$$

Найдем теперь коэффициенты разложения в формуле (22) из начальных условий (3). Для этого функцию начального смещения запишем в виде ряда

$$\begin{aligned}f(r,\varphi)=\sum_{m=1}^{\infty}A'_{0m}J_0(\mu_m^{(0)}r/r_1)+\sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{\infty}A'_{nm}\cos(n\varphi)\,J_n(\mu_m^{(n)}r/r_1)+\\+\sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{\infty}C'_{nm}\sin(n\varphi)\,J_n(\mu_m^{(n)}r/r_1).\end{aligned} \tag{23}$$

Ряд (23) представляет собой ряд Фурье по углу φ в интервале $(0,2\pi)$. Найдем его коэффициенты A'_{nm} и C'_{nm}. Для этого последовательно умножим обе стороны равенства (23) на $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$, а затем проинтегрируем по φ от 0 до 2π. Получим уравнения:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\,d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}A'_{0m}J_0(\mu_m^{(0)}r/r_1), \tag{24}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}A'_{nm}J_n(\mu_m^{(n)}r/r_1), \tag{25}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}C'_{nm}J_n(\mu_m^{(n)}r/r_1). \tag{26}$$

Далее умножая обе стороны равенств (24)–(26) на $r\,J_n(\mu_{m'}^{(n)}r/r_1)$ и интегрируя по r от 0 до r_1, получаем:

$$A'_{0m} = \frac{1}{\pi r_1^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} f(r,\varphi) J_0(\mu_m^{(0)} r/r_1)\, r\, d\varphi\, dr, \tag{27}$$

$$A'_{nm} = \frac{2}{\pi r_1^2 J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} f(r,\varphi) \cos(n\varphi) J_n(\mu_m^{(n)} r/r_1)\, \mathrm{r}\, d\varphi\, dr, \tag{28}$$

$$C'_{nm} = \frac{2}{\pi r_1^2 J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} f(r,\varphi) \sin(n\varphi) J_n(\mu_m^{(n)} r/r_1)\, r\, d\varphi\, dr. \tag{29}$$

Здесь нами учтено условие нормировки функций Бесселя (11.17).

Запишем теперь начальное условие для скоростей

$$F(r,\varphi) = \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} \mu_m^{(n)} v/r_1 \left[B'_{nm}\cos(n\varphi) + D'_{nm}\sin(n\varphi)\right] J_n(\mu_m^{(n)} r/r_1). \tag{30}$$

Из сопоставления формулы (30) с формулой (23) находим остальные коэффициенты разложения:

$$B'_{nm} = \frac{2}{\pi r_1 v \mu_m^{(n)} J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} F(r,\varphi) \cos(n\varphi) J_n(\mu_m^{(n)} r/r_1)\, r\, d\varphi\, dr, \tag{31}$$

$$D'_{nm} = \frac{2}{\pi r_1 v \mu_m^{(n)} J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} F(r,\varphi) \sin(n\varphi) J_n(\mu_m^{(n)} r/r_1)\, r\, d\varphi\, dr. \tag{32}$$

Очевидно, что решение (22) можно представить в виде

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} M_{nm} J_n(\mu_m^{(n)} r/r_1) \sin(n\varphi - \varphi_{nm}) \sin\left(\mu_m^{(n)} \frac{v}{r_1} t - \theta_{nm}\right). \tag{33}$$

Из выражения (33) видно, что общее колебание круглой мембраны складывается из бесконечного числа собственных гармонических колебаний с частотой

$$\omega_{nm} = \mu_m^{(n)} \frac{v}{r_1}. \tag{34}$$

При $n=0$ и $m=1$ мы имеем *основной тон* с наинизшей частотой $\omega_{01} = \mu_1^{(0)} v/r_1$. Кроме того, формула (33) показывает существование *узло-*

вых линий, в которых колебание мембраны отсутствует. Эти линии определяются уравнениями

$$J_n(\mu_m^{(n)} r \big/ r_1) = 0, \qquad \sin(n\varphi - \varphi_{nm}) = 0\,. \tag{35}$$

Первое из уравнений (35) дает $m-1$ концентрическую окружность с радиусами

$$r_{(1)} = \frac{\mu_1^{(n)}}{\mu_m^{(n)}} r_1, \quad r_{(2)} = \frac{\mu_2^{(n)}}{\mu_m^{(n)}} r_1, \ \dots\ , \ r_{(m-1)} = \frac{\mu_{m-1}^{(n)}}{\mu_m^{(n)}} r_1\,.$$

Второе из уравнений (35) дает n диаметров мембраны с углами

$$\varphi_{(1)} = \frac{\varphi_{nm}}{n}, \quad \varphi_{(2)} = \frac{\pi}{n} + \frac{\varphi_{nm}}{n}, \ \dots\ , \ \varphi_{(n)} = \frac{(n-1)\,\pi}{n} + \frac{\varphi_{nm}}{n}\,.$$

13. Распространение волн в трехмерном безграничном пространстве

Распространение электромагнитных, акустических и некоторых других волн в трехмерном пространстве описывается однородным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \Delta u = 0\,. \tag{1}$$

Решение задачи Коши, то есть решение уравнения (1) для безграничного пространства и начальных условий

$$u\big|_{t=0} = f(x, y, z)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x, y, z)\,, \tag{2}$$

выражается *формулой Пуассона*

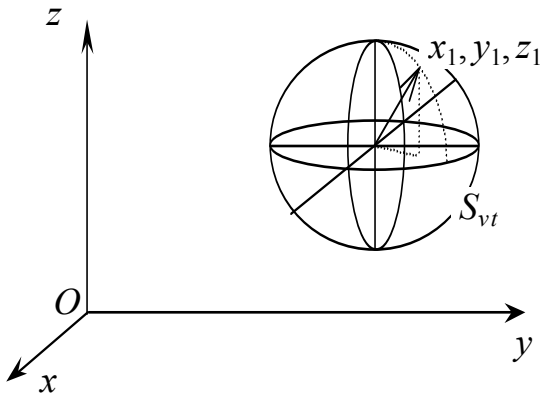
$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi v} \iint\limits_{S_{vt}} \frac{F(x_1, y_1, z_1)}{r} d\sigma_r + \frac{1}{4\pi v} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S_{vt}} \frac{f(x_1, y_1, z_1)}{r} d\sigma_r\,, \tag{3}$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}\,.$$

Вывод этой формулы из-за ограниченности времени мы не приводим*. В ней интегрирование производится по сферической поверхности S_{vt} радиуса $r=vt$ с центром в точке (x, y, z). Координаты элемента поверхности $d\sigma_r$ обозначены (x_1, y_1, z_1).

Формула Пуассона (3) говорит о том, что значение функции u в заданной точке (x, y, z) в момент времени t определяется лишь тем, какие значения эта функция принимала в начальный момент времени в точках, удаленных от заданной точки на расстоянии $r=vt$. Таким образом, формула Пуассона есть математическое выражение *принципа Гюйгенса*, известного из общего курса физики.



Рассмотрим частный случай, когда функции f и F, задающие начальные условия, не зависят от координаты z. Тогда из симметрии задачи следует, что и искомая функция $u(x,y,z)$ не будет зависеть от z. А это значит, что она является решением двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = 0 \qquad (4)$$

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = f(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x,y)\,. \qquad (5)$$

В этом случае в формуле (3) можно от интегрирования по сфере S_{vt} радиуса $r=vt$ с центром в точке (x, y, z) перейти к интегрированию по площади проекции сферы на плоскости xOy, то есть по площади круга C_{vt} того же радиуса

* Вывод формулы Пуассона имеется, в частности, в учебном пособии: Н.С. Кошляков и др. «Уравнения в частных производных математической физики».

на плоскости xOy с центром в точке $(x, y, 0)$. При этом элемент площади круга связан с элементом площади сферы формулой

$$dC_{vt} = \cos\theta \, dS_{vt}. \tag{6}$$

Учитывая, что точка круга C_{vt} с координатами (x_1, y_1) есть проекция двух точек сферы S_{vt} с координатами $(x_1, y_1, z \pm \sqrt{v^2t^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2})$, находим

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{v^2t^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2}}{vt}. \tag{7}$$

Используя выражения (6) и (7), решение (3) приводим к виду

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = {} & \frac{1}{2\pi v} \iint\limits_{C_{vt}} \frac{F(x_1, y_1)}{\sqrt{v^2t^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2}} \, dx_1 dy_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi v} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{C_{vt}} \frac{f(x_1, y_1)}{\sqrt{v^2t^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2}} \, dx_1 dy_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Решение (8) для трехмерного волнового уравнения (1) называется *цилиндрическими волнами*.

14. Излучение волн

Излучение волн в трехмерном пространстве описывает неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \Delta u = g(x, y, z, t). \tag{1}$$

Будем искать его решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Для этого сначала рассмотрим решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - v^2 \Delta U = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$U\big|_{t=\tau}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}\big|_{t=\tau}=g(x,y,z,\tau),\tag{4}$$

причем за начальный момент времени взято не $t=0$, а $t=\tau$, где τ – некоторый параметр. Решение задачи (3), (4) будет выражаться формулой Пуассона, в которой время t заменено на $t-\tau$. Итак будем иметь

$$U(x,y,z,t;\tau)=\frac{1}{4\pi v}\iint\limits_{S_{v(t-\tau)}}\frac{g(x_1,y_1,z_1,\tau)}{v(t-\tau)}d\sigma_r\,.\tag{5}$$

Учитывая, что координаты точек на сфере радиуса $r=v(t-\tau)$ выражаются формулами

$$x_1=x+\alpha v(t-\tau),\qquad y_1=y+\beta v(t-\tau),\qquad z_1=z+\gamma v(t-\tau),\tag{6}$$

где $\alpha=\sin\theta\cos\varphi,\ \beta=\sin\theta\sin\varphi,\ \gamma=\cos\theta$ – направляющие косинусы радиусов сферы, а элемент сферической поверхности выражается формулой

$$d\sigma_r=v^2(t-\tau)^2\,d\Omega\,,\tag{7}$$

где $d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ – элемент стереоугла, формулу (5) перепишем в виде

$$U(x,y,z,t;\tau)=\frac{t-\tau}{4\pi}\iint g\big(x+\alpha v(t-\tau),\,y+\beta v(t-\tau),\,z+\gamma v(t-\tau),\,\tau\big)\,d\Omega\,.\tag{8}$$

Покажем, что функция $u(x,y,z,t)$, определенная формулой

$$u(x,y,z,t)=\int\limits_0^t U(x,y,z,t;\tau)\,d\tau\,,\tag{9}$$

является решением неоднородного уравнения (1) при нулевых начальных условиях (2). Действительно, из (9) следует, что

$$\Delta u(x,y,z,t)=\int\limits_0^t \Delta U(x,y,z,t;\tau)\,d\tau\,.\tag{10}$$

Теперь продифференцируем (9) по времени

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int\limits_0^t\frac{\partial U(x,y,z,t;\tau)}{\partial t}d\tau+U(x,y,z,t;\tau)\big|_{\tau=t}\,.\tag{11}$$

Здесь второе слагаемое в правой части уравнения равно нулю в силу первого из начальных условий (4). Дифференцируя еще раз, будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int\limits_0^t\frac{\partial^2 U(x,y,z,t;\tau)}{\partial t^2}d\tau+\frac{\partial U(x,y,z,t;\tau)}{\partial t}\big|_{\tau=t}\,.\tag{12}$$

В силу второго из начальных условий (4) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 U(x, y, z, t; \tau)}{\partial t^2} d\tau + g(x, y, z, t). \tag{13}$$

Теперь из формул (10), (13) и уравнения (3) видим, что функция $u(x, y, z, t)$, определяемая формулой (9), является решением неоднородного уравнения (1). Из формул (9) и (11) следует, что это решение удовлетворяет начальным условиям (2).

Подставляя в формулу (9) вместо функции $U(x, y, z, t)$ ее выражение (8), получаем

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t-\tau) \left[\iint g\big(x+\alpha v(t-\tau), y+\beta v(t-\tau), z+\gamma v(t-\tau), \tau\big)\, d\Omega \right] d\tau. \tag{14}$$

Введем вместо τ новую переменную интегрирования

$$r = v(t-\tau). \tag{15}$$

Тогда будем иметь

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi v^2} \int_0^{vt} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{g(x+\alpha r, y+\beta r, z+\gamma r,\ t-r/v)}{r} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr. \tag{16}$$

Введя вместо сферических координат r, θ, φ прямоугольные координаты

$$x_1 = x + \alpha r, \qquad y_1 = y + \beta r, \qquad z_1 = z + \gamma r, \tag{17}$$

получаем окончательное выражение для $u(x, y, z, t)$ в виде

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi v^2} \iiint_{V_{vt}} \frac{g(x_1, y_1, z_1, t-r/v)}{r} dx_1 \, dy_1 \, dz_1. \tag{18}$$

Выражение (18) называют *запаздывающим потенциалом*, так как при выполнении интегрирования функция $g(x, y, z, t)$ берется не в рассматриваемый момент времени t, а в момент времени $t-r/v$, предшествующий t на промежуток времени, который требуется, чтобы волна, распространяющаяся со скоростью v, прошла путь от точки (x_1, y_1, z_1) до точки (x, y, z).

Аналогичным образом можно получить решение двумерного неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = g(x, y, t) \tag{19}$$

при нулевых начальных условиях. Оно имеет вид

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi v}\int_0^t\left[\iint\limits_{\rho\le v(t-\tau)}\frac{g(x_1,y_1,\tau)\,dx_1\,dy_1}{\sqrt{v^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\right]d\tau, \tag{20}$$

где

$$\rho^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2.$$

В случае одномерного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=g(x,t) \tag{21}$$

решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, будет следующим:

$$u(x,t)=\frac{1}{2v}\int_0^t\left[\int_{x-v(t-\tau)}^{x+v(t-\tau)}g(x_1,\tau)\,dx_1\right]d\tau. \tag{22}$$

15. Точечный источник

Рассмотрим частный случай, когда свободный член $g(x,y,z,t)$ в уравнении (14.1) отличен от нуля лишь в бесконечно малой (точечной) области V_ε радиусом ε в начале системы координат, то есть когда

$$g(x,y,z,t)=0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge\varepsilon, \tag{1}$$

и в то же время внутри малой области V_ε функция $g(x,y,z,t)$ настолько велика, что ее интеграл конечен

$$\iiint\limits_{V_\varepsilon} g(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz=4\pi v^2 w(t). \tag{2}$$

Обратимся к формуле (14.18) для запаздывающего потенциала. Пусть $vt>r$. Когда радиус области V_ε мал, можно считать, что расстояния любых ее точек до точки наблюдения (x,y,z,t) одинаковы. Поэтому, вынося r в формуле (14.18) за пределы интеграла и учитывая равенство (2), получаем

$$u(x,y,z,t)=\frac{w(t-r/v)}{r}\quad(vt>r). \tag{3}$$

Если же $vt<r$, то область интегрирования V_{vt} не содержит область V_ε, в которой функция $g(x,y,z,t)$ отлична от нуля, и поэтому $u(x,y,z,t)=0$.

Отметим, что функция (3) при любом выборе функции $w(x,y,z,t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению и представляет собой сферическую волну, распространяющуюся со скоростью v от начала координат.

16. Телеграфное уравнение

Рассмотрим электрические колебания в линии передачи, характеризующейся четырьмя погонными параметрами: индуктивностью L, емкостью C, сопротивлением проводников R и проводимостью изоляции G. Запишем выражение для падения напряжения u в проводнике на единицу длины, которое складывается из ЭДС самоиндукции и напряжения омических потерь:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-L\frac{\partial i}{\partial t}-Ri\,. \tag{1}$$

Здесь i – ток в проводниках линии.

Разность входящих и выходящих токов обеспечивает рост потенциала проводника, а также восполняет утечку заряда через изоляцию:

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-C\frac{\partial u}{\partial t}-Gu\,. \tag{2}$$

Получим уравнение для напряжения. Для этого продифференцируем уравнение (1) по x и исключим из него ток, используя формулу (2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial u}{\partial t}+GRu\,. \tag{3}$$

Аналогично получается уравнение для тока

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial i}{\partial t}+GRi\,. \tag{4}$$

Видим, что напряжение u и ток i в линии передачи удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2b_0\frac{\partial u}{\partial t}+c_0u\,, \tag{5}$$

где

$$a_0 = LC, \quad 2b_0 = RC + GL, \quad c_0 = GR. \tag{6}$$

Уравнение (5) называют *телеграфным уравнением*[*]. В отсутствии омических потерь в проводнике и диэлектрических потерь в изоляции, то есть при $R=0$ и $G=0$, телеграфное уравнение переходит в волновое уравнение. Поэтому волновое уравнение является частным случаем телеграфного уравнения.

Если ввести новую функцию $w(x,t)$, положив

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{b_0}{a_0}t}\, w(x,t), \tag{7}$$

то уравнение (5) принимает более простую форму:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b^2 w, \tag{8}$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{a_0}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad b = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}}{a_0} = \frac{1}{2}\left|R/L - G/C\right|. \tag{9}$$

Не приводя доказательств, отметим, что уравнения (8) при начальных условиях

$$w\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x) \tag{10}$$

имеет решение

$$w(x,t) = \frac{f(x-vt) + f(x+vt)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-vt}^{x+vt} \Phi(x,t,z)\, dz, \tag{11}$$

где

$$\Phi(x,t,z) = \frac{1}{v} F(z)\, J_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2 - v^2 t^2}\right) + b\, t\, f(z) \frac{J_0'\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2 - v^2 t^2}\right)}{\sqrt{(z-x)^2 - v^2 t^2}}. \tag{12}$$

Заметим, что в частном случае, когда параметр $b=0$, формула (12) принимает известный вид:

$$\Phi(x,t,z) = \frac{1}{v} F(z),$$

[*] В радиотехнической литературе телеграфными уравнениями называют уравнения (1) и (2).

а уравнение (8) переходит в волновое уравнение (13.1). Этот случай имеет место в линии передачи, когда выполняется условие

$$\frac{R}{L}=\frac{G}{C}. \tag{13}$$

Соотношение (13) на физическом языке выражает равенство добротностей погонной индуктивности $Q_L=\omega L/R$ и погонной емкости $Q_C=\omega C/G$, где ω – частота.

Линию передачи, для которой выполняется соотношение (13), называют *линией, свободной от искажений*.

Учитывая формулу (7), общее решение для напряжения волны в линии, свободной от искажений, можно записать в виде

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left[\varphi(x-vt)+\psi(x+vt)\right], \tag{14}$$

где φ и ψ – произвольные функции.

Для нахождения тока подставим выражение (14) в уравнение (2). Тогда получим

$$\frac{\partial i}{\partial x}=\sqrt{\frac{C}{L}}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left[\varphi'(x-vt)-\psi'(x+vt)\right]. \tag{15}$$

После интегрирования получаем

$$i=\sqrt{\frac{C}{L}}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left[\varphi(x-vt)-\psi(x+vt)+\kappa(t)\right], \tag{16}$$

где $\kappa(t)$ – произвольная функция. Подставив теперь (14) и (16) в уравнение (1), найдем, что

$$\kappa'(t)=0.$$

Откуда

$$\kappa(t)=K=const.$$

Не нарушая общности, можно считать $K=0$. Действительно, допустим, что все же $K\neq 0$. Тогда, переопределив в формулах (14), (16) неопределенные функции заменой

$$\varphi(x-vt)\to\varphi(x-vt)-K/2,$$
$$\psi(x+vt)\to\psi(x+vt)+K/2,$$

мы исключим константу K.

Вид неопределенных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ найдем из начальных условий

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad i\big|_{t=0} = \sqrt{\frac{C}{L}}F(x), \tag{17}$$

где $f(x)$ и $F(x)$ – заданные функции. Подставляя в (17) общее решение (14), (16), получаем

$$\varphi(x) = \frac{f(x)+F(x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x)-F(x)}{2}. \tag{18}$$

17. Уравнение Гельмгольца

Рассмотрим трехмерное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + a_2 u\,. \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_2 – постоянные. Это уравнение описывает самые разные физические процессы. В частности, при $a_0>0$, $a_1>0$, $a_2>0$ оно представляет *телеграфное уравнение*, с одномерным аналогом (16.5) которого мы уже познакомились. При $a_0>0$, $a_1=0$, $a_2=0$ уравнение (1) переходит в волновое уравнение. При $a_0=0$, $a_1>0$, $a_2>0$ уравнение (1) переходит в уравнение теплопроводности и диффузии.

Руководствуясь методом разделения переменных, будем искать решения уравнения (1), имеющие вид

$$u(x,y,z,t) = w(x,y,z)\,T(t). \tag{2}$$

Подставив (2) в уравнение (1), получим

$$\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}}{w} = \frac{a_0 \dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2a_1 \dfrac{\partial T}{\partial t} + a_2 T}{T}.$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k^2 w = 0\,, \tag{3}$$

$$a_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2a_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \left(a_2 + k^2\right)T = 0\,, \tag{4}$$

где k^2 – произвольное число.

Уравнение (3) называют *уравнением Гельмгольца*. Оно играет важную роль в математической физике, описывая многие физические процессы, в том числе волновые процессы, процессы теплопроводности и диффузии.

Заметим, что уравнение (4) описывает колебания, в которых величина смещения изменяется во времени по *гармоническому закону*. Гармонические колебания удобно описывать с помощью комплексных функций вида

$$w(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{5}$$

и

$$w(x,y,z)\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \tag{6}$$

где ω – круговая частота, а $w(x,y,z)$ – комплексная функция координат. Вещественная часть выражений (5) и (6) определяет в каждой точке одно и то же гармоническое колебание

$$u(x,y,z) = \mathrm{Re}\left[w(x,y,z)\,\mathrm{e}^{\mp i\omega t}\right] = |w|\cos(\omega t + \theta) \tag{7}$$

с амплитудой $|w|$ и фазой θ, являющейся корнем уравнений

$$\sin\theta = \mp\frac{\mathrm{Im}\,w}{|w|}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\,w}{|w|}. \tag{8}$$

Здесь символы Re и Im означают, что берется соответственно вещественная или мнимая часть стоящей за ним функции. Знак минус или плюс перед Im выбирается в зависимости от того, используется ли выражение (5) или (6).

Подставив (5) в (1), мы придем к уравнению Гельмгольца (3) с параметром k^2, имеющим значение

$$k^2 = a_0\omega^2 + i2\omega a_1 - a_2. \tag{9}$$

Наряду с однородным уравнением Гельмгольца (3) мы будет также рассматривать *неоднородное уравнение Гельмгольца*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k^2 w = -\rho. \tag{10}$$

Как мы увидим в дальнейшем, функция ρ имеет смысл *плотности распределения источников волн*.

18. Уравнения Максвелла. Граничные условия

В основе электродинамики сплошных сред лежат *уравнения Максвелла*:

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{D}} = \rho, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{B}} = 0. \tag{4}$$

Здесь $\vec{\mathbf{E}}$ и $\vec{\mathbf{D}}$ – напряженность и индукция электрического поля, $\vec{\mathbf{H}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$ – напряженность и индукция магнитного поля, $\vec{\mathbf{j}}$ – плотность электрического тока, ρ – плотность электрических зарядов.

Ток $\vec{\mathbf{j}}$ складывается из *тока проводимости* $\vec{\mathbf{j}}_c$, обусловленного описываемым электромагнитным полем, и *тока сторонних источников* $\vec{\mathbf{j}}_e$.

В линейных изотропных средах индукции электрического и магнитного полей связаны с соответствующими напряженностями линейными уравнениями

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}, \tag{5}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}. \tag{6}$$

Аналогичным соотношением ток проводимости $\vec{\mathbf{j}}_c$ связан с напряженностью электрического поля:

$$\vec{\mathbf{j}}_c = \sigma \vec{\mathbf{E}}. \tag{7}$$

Покажем, что электромагнитные колебания в сплошной среде в отсутствие токов сторонних источников удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца. Для этого подействуем векторным дифференциальным оператором rot на правую и левую стороны равенства (2). Используя тождество (1.9), получим

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{\mathbf{H}}) - \Delta\vec{\mathbf{H}} = \partial/\partial t\,(\operatorname{rot}\vec{\mathbf{D}}) + \operatorname{rot}\vec{\mathbf{j}}_c. \tag{8}$$

Учитывая формулы (4), (5) и (6), перепишем уравнение (8) в виде

$$-\Delta\vec{\mathbf{H}} = \left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\right)\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{E}}. \tag{9}$$

Подставляя в правую часть (9) формулу (1) и учитывая соотношение (7), имеем

$$\Delta\vec{\mathbf{H}} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\mathbf{H}} + \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{H}}. \tag{10}$$

Будем искать гармоническое по времени решение в комплексной форме:

$$\vec{\mathbf{H}}(x, y, z, t) = \vec{\mathbf{h}}(x, y, z)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в уравнение (10), получаем

$$\Delta\vec{\mathbf{h}} + \left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right)\mu\omega^2\vec{\mathbf{h}} = 0. \tag{12}$$

Величину

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + i\sigma/\omega \tag{13}$$

называют *комплексной диэлектрической проницаемостью*. Ее не следует путать с обычной диэлектрической проницаемостью ε, определяемой формулой (5), у которой мнимая часть описывает только диэлектрические потери. Мнимая же часть комплексной диэлектрической проницаемости описывает как диэлектрические, так и омические потери.

Вводя обозначение

$$k^2 = \tilde{\varepsilon}\,\mu\omega^2, \tag{14}$$

уравнение (12) приобретает вид уравнения Гельмгольца

$$\Delta\vec{\mathbf{h}} + k^2\vec{\mathbf{h}} = 0. \tag{15}$$

Решив уравнение (15) для поля $\vec{\mathbf{h}}$, электрическое поле

$$\vec{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \vec{\mathbf{e}}(x, y, z)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

можно найти, переписав уравнение (2) в виде

$$\vec{\mathbf{e}} = \frac{i}{\tilde{\varepsilon}\omega}\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{h}}. \tag{16}$$

Покажем, что и электрическое поле $\vec{\mathbf{E}}$ удовлетворяет уравнению аналогичному уравнению (10), а его амплитуда $\vec{\mathbf{e}}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Для этого подействуем оператором rot на правую и левую стороны равенства (1) и воспользуемся формулой (1.9):

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{\mathbf{E}}\right) - \Delta\vec{\mathbf{E}} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{\mathbf{H}}. \tag{17}$$

Переписав уравнение (2) в виде

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{H}} = \left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\right)\vec{\mathbf{E}} \tag{18}$$

и учитывая тождество (1.11), получаем равенство

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{E}} = 0. \tag{19}$$

Подставляя в левую часть уравнения (17) равенство (19), а в правую – уравнение (2), получаем искомое уравнение для электрической компоненты поля

$$\Delta\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\mathbf{E}} + \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{E}}. \tag{20}$$

Отсюда следует, что амплитуда $\vec{\mathbf{e}}$ электрической компоненты

$$\vec{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \vec{\mathbf{e}}(x, y, z)\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{21}$$

удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\vec{\mathbf{e}} + k^2\vec{\mathbf{e}} = 0. \tag{22}$$

Параметры среды, фигурирующие в уравнениях Максвелла, могут произвольным образом изменяться в пространстве. Это изменение может происходить не только непрерывно, но и скачкообразно. Например, на некоторой поверхности S параметры среды могут испытывать скачок. Такая поверхность является границей раздела двух сред. Скачок параметров среды сопровождается скачком некоторых компонент электромагнитного поля. Величина скачка компонент электромагнитного поля описывается *граничными условиями*:

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \rho_s, \tag{23}$$

$$B_n^{(2)} - B_n^{(1)} = 0, \tag{24}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_t^{(2)} - \vec{\mathbf{E}}_t^{(1)} = 0, \tag{25}$$

$$[\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{H}}_t^{(2)} - \vec{\mathbf{H}}_t^{(1)}] = \vec{\mathbf{J}}. \tag{26}$$

Здесь ρ_s – *плотность поверхностных зарядов*, а вектор $\vec{\mathbf{J}}$ – *плотность поверхностного электрического тока* на границе раздела сред. Последняя отлична от нуля только тогда, когда одна из сред является идеальным проводником, в который электромагнитное поле не проникает. Во всех остальных случаях $\vec{\mathbf{J}} = 0$. Нижние индексы *n* и *t* указывают, соответственно, на нормальную и тангенциальную составляющие вектора, а верхний индекс, заключенный в скобки, задает номер среды. Вектор нормали $\vec{\mathbf{n}}$ направлен из среды *1* в среду *2*. Квадратные скобки в (26) обозначают векторное произведение.

В отсутствие сторонних зарядов равенство (23) упрощается, если использовать комплексную диэлектрическую проницаемость $\tilde{\varepsilon}$:

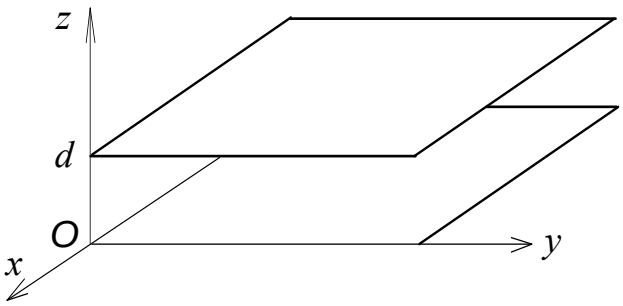
$$\tilde{\varepsilon}^{(2)} E_n^{(2)} - \tilde{\varepsilon}^{(1)} E_n^{(1)} = 0. \tag{27}$$

Формулы (23)–(26) задают 6 равенств: 2 равенства для нормальных компонент поля и 4 равенства для тангенциальных компонент. Однако при решении задач достаточно использовать только 4 равенства. Остальные 2 равенства будут выполняться автоматически, если искомые компоненты в обеих средах являются решениями уравнений Максвелла (1)–(4).

19. Волны между идеально проводящими плоскостями

Приступим к рассмотрению распространения электромагнитных волн в направляющих системах, называемых *линиями передачи*. Будем рассматривать только *стационарные волны*, компоненты поля которых изменяются во времени по гармоническому закону с частотой ω.

Волны с более сложным периодическим изменением компонент всегда можно представить в виде суммы гармонических колебаний с кратными частотами $n\omega$, а любые непериодические волны можно представить в виде интеграла гармонических колебаний по всем частотам ω от 0 до ∞. Это утверждение вытекает из *теорем* о свойствах *рядов* и *интегралов Фурье*.



Начнем рассмотрение распространения плоской волны между двумя идеально проводящими плоскостями. Пусть проводящие плоскости бесконечно простираются в x- и y-направлениях. Полагаем, что первая плоскость расположена на высоте $z_1 = 0$, а вторая — на высоте $z_1 = d$. Для определенности будем считать, что гармоническая волна распространяется вдоль оси x. Тогда компоненты волны не будут зависеть от координаты y. В противном случае волна будет распространяться под углом к осям x и y.

Решение будем искать в комплексном виде, то есть будем полагать что

$$\vec{\mathbf{E}}(x, z, t) = \vec{\mathbf{e}}(x, z)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad \vec{\mathbf{H}}(x, z, t) = \vec{\mathbf{h}}(x, z)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}. \tag{1}$$

Тогда первые два уравнения Максвелла (18.1)–(18.2) можно записать в виде

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{e}} = i\mu\omega\,\vec{\mathbf{h}}, \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{h}} = -i\tilde{\varepsilon}\,\omega\,\vec{\mathbf{e}}. \tag{3}$$

Перепишем систему векторных уравнений (2) и (3) в скалярной форме:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial e_y}{\partial z} &= i\mu\omega\, h_x, & -\frac{\partial h_y}{\partial z} &= -i\tilde{\varepsilon}\omega\, e_x,\\
\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} &= i\mu\omega\, h_y, & \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} &= -i\tilde{\varepsilon}\omega\, e_y,\\
\frac{\partial e_y}{\partial x} &= i\mu\omega\, h_z, & \frac{\partial h_y}{\partial x} &= -i\tilde{\varepsilon}\omega\, e_z.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь мы учли отсутствие зависимости компонент поля от координаты y. Замечаем, что система уравнений (4) распадается на две независимые системы уравнений

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial e_y}{\partial z} &= i\mu\omega h_x, \\
\frac{\partial e_y}{\partial x} &= i\mu\omega h_z, \\
\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} &= -i\tilde{\varepsilon}\omega e_y,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

и

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial h_y}{\partial z} &= -i\tilde{\varepsilon}\omega e_x, \\
\frac{\partial h_y}{\partial x} &= -i\tilde{\varepsilon}\omega e_z, \\
\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} &= i\mu\omega h_y.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Система уравнений (5) описывает волны, у которых отлична от нуля продольная (по отношению к направлению распространения) составляющая магнитного поля ($h_x \neq 0$), но равна нулю продольная составляющая электрического поля ($e_x = 0$). Такие волны называют *волнами магнитного типа* (кратко *H-волнами*) или *поперечно-электрическими волнами* (кратко *TE-волнами*).

Система уравнений (6) описывает волны, у которых отлична от нуля продольная составляющая электрического поля ($e_x \neq 0$), но равна нулю продольная составляющая магнитного поля ($h_x = 0$). Эти волны называют *волнами электрического типа* (кратко *E*-волнами) или *поперечно-магнитными волнами* (кратко *TM-волнами*).

На поверхности идеально проводящих плоскостей тангенциальные составляющие электрического поля обращаются в нуль. Отсюда получаем следующие граничные условия:

$$e_x|_{z=0} = 0, \quad e_x|_{z=d} = 0, \tag{7}$$

$$e_y|_{z=0} = 0, \quad e_y|_{z=d} = 0. \tag{8}$$

Как мы уже знаем, компоненты электромагнитной волны удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (18.15) и (18.22). Решение этих уравнений будем искать методом разделения переменных. Для этого искомое решение представим в виде произведения функций $X(x)$ и $Z(z)$. После подстановки их в (18.15) или (18.22) получим

$$\frac{d^2}{dx^2}X + k_x^2 X = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}Z + k_z^2 Z = 0, \tag{10}$$

где

$$k_z^2 = k^2 - k_x^2. \tag{11}$$

Общее решение уравнений (9), (10) имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x), \\ Z(z) &= C\sin(k_z z) + D\cos(k_z z). \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим сначала *H*-волну. Как видно из системы уравнений (5), эта волна имеет единственную тангенциальную компоненту электрического поля e_y, граничное условие для которой выражается формулой (8). Подставляя общее решение (12) для компоненты e_y в граничное условие (8), получаем

$$D = 0, \qquad \sin(k_z d) = 0. \tag{13}$$

Отсюда находим

$$e_y(x,z) = [A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)]\sin(k_z z), \tag{14}$$

где

$$k_z = \pi n/d, \quad k_x = \sqrt{k^2 - (\pi n/d)^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{15}$$

Далее из уравнений (5) находим остальные ненулевые компоненты *TE*-волны:

$$h_x(x,z) = \frac{ik_z}{\mu\omega}\left[A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)\right]\cos(k_z z), \tag{16}$$

$$h_z(x,z) = \frac{-ik_x}{\mu\omega}\left[A\cos(k_x x) - B\sin(k_x x)\right]\sin(k_z z). \tag{17}$$

Общее решение (14)–(17) для *TE*-волны представляет собой суперпозицию двух стоячих волн. Это решение можно записать еще и в виде суперпозиции двух бегущих волн, распространяющихся в противоположные стороны:

$$e_y(x,z) = \left[A'\mathrm{e}^{ik_x x} + B'\mathrm{e}^{-ik_x x}\right] \sin\left(k_z z\right), \tag{18}$$

$$h_x(x,z) = \left[\frac{i\,k_z}{\mu\,\omega} A'\mathrm{e}^{ik_x x} + \frac{i\,k_z}{\mu\,\omega} B'\mathrm{e}^{-ik_x x}\right] \cos\left(k_z z\right), \tag{19}$$

$$h_z(x,z) = \left[\frac{k_x}{\mu\,\omega} A'\mathrm{e}^{ik_x x} - \frac{k_x}{\mu\,\omega} B'\mathrm{e}^{-ik_x x}\right] \sin\left(k_z z\right) . \tag{20}$$

Из формулы (15) видно, что даже в отсутствие поглощения электромагнитной энергии, то есть при $\mathrm{Im}\,k = 0$, волновое число волны k_x не всегда может быть вещественным. Для каждого значения n существует такая частота ω_n^H, ниже которой волновое число k_x становится комплексным при вещественном значении k. В результате амплитуда такой волны убывает по экспоненте вдоль направления распространения. Поэтому такая волна не может распространяться на большие расстояния. Частоту ω_n^H называют *критической частотой* для n-й волны магнитного типа. Критическую частоту также называют *частотой отсечки*. Из формулы

$$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2$$

для идеального диэлектрика (см. (18.14) и (15) следует, что

$$\omega_n^H = \frac{\pi n}{d\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) . \tag{21}$$

Теперь перейдем к E-волнам. Как видно из системы уравнений (6), эта волна имеет единственную тангенциальную компоненту электрического поля e_x, граничное условие для которой выражается формулой (7). Так как в формулах (6) обе отличные от нуля компоненты электрического поля e_x и e_z выражаются через магнитное поле h_y, то общее решение (12) запишем для компоненты h_y:

$$h_y(x,z) = \left[A\sin\left(k_x x\right) + B\cos\left(k_x x\right)\right]\left[C\sin\left(k_z z\right) + D\cos\left(k_z z\right)\right]. \tag{22}$$

Используя первое уравнение системы (6), получаем общее решение для тангенциальной компоненты электрического поля e_x:

$$e_x(x,z) = \frac{-ik_z}{\widetilde{\varepsilon}\,\omega}\left[A\sin\left(k_x x\right) + B\cos\left(k_x x\right)\right]\left[C\cos\left(k_z z\right) - D\sin\left(k_z z\right)\right]. \tag{23}$$

Подставим теперь общее решение (23) для компоненты e_x в граничное условие (7). В результате находим

$$C = 0, \qquad k_z = \pi n/d \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Отсюда получаем искомое решение для *TM*-волн:

$$h_y(x,z) = \left[A \sin\left(k_x x\right) + B \cos\left(k_x x\right)\right] \cos\left(k_z z\right), \tag{25}$$

$$e_x(x,z) = \left[\frac{ik_z}{\widetilde{\varepsilon}\omega} A \sin\left(k_x x\right) + \frac{ik_z}{\widetilde{\varepsilon}\omega} B \cos\left(k_x x\right)\right] \sin\left(k_z z\right), \tag{26}$$

$$e_z(x,z) = \left[\frac{ik_x}{\widetilde{\varepsilon}\omega} A \cos\left(k_x x\right) - \frac{ik_x}{\widetilde{\varepsilon}\omega} B \sin\left(k_x x\right)\right] \cos\left(k_z z\right), \tag{27}$$

$$k_z = \pi n/d, \qquad k_x = \sqrt{k^2 - (\pi n/d)^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{28}$$

Замечаем, что у поперечно-магнитной волны при $n = 0$ наряду с продольной составляющей магнитного поля (h_x) отсутствует также продольная составляющая электрического поля (e_x). Волны, не имеющие продольных составляющих ни электрического поля, ни магнитного поля, называют *поперечно-электромагнитными волнами*, или *TEM*-волнами, или *T*-волнами.

Из формулы (28) видно, что критические частоты *E*-волн

$$\omega_n^E = \frac{\pi n}{d\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{29}$$

совпадают с критическими частотами *H*-волн (21).

Перепишем формулы (25)–(28) для случая *T*-волны:

$$h_y(x) = A \sin\left(kx\right) + B \cos\left(kx\right), \tag{30}$$

$$e_z(x) = i\sqrt{\frac{\mu}{\widetilde{\varepsilon}}} A \cos\left(kx\right) - i\sqrt{\frac{\mu}{\widetilde{\varepsilon}}} B \sin\left(kx\right). \tag{31}$$

Видно, что *T*-волна распространяется при любых значениях k, то есть на любых частотах ω. Ее критическая частота

$$\omega^T = 0. \tag{32}$$

Поэтому *T*-волна является волной основного типа, а *E*- и *H*-волны являются волнами высших типов. В любой линии передачи *волной основного типа* называют волну с наинизшей критической частотой. Все остальные волны называют *волнами высших типов*.

Формулы (25)–(27) для *E*-волн представляют суперпозицию двух стоячих волн. Их можно представить также в виде суперпозиции бегущих волн двух направлений:

$$h_y(x,z) = \left[A' \mathrm{e}^{ik_x x} + B' \mathrm{e}^{-ik_x x} \right] \cos\left(k_z z\right), \tag{33}$$

$$e_x(x,z) = \left[\frac{ik_z}{\widetilde{\varepsilon}\omega} A' \mathrm{e}^{ik_x x} + \frac{ik_z}{\widetilde{\varepsilon}\omega} B' \mathrm{e}^{-ik_x x} \right] \sin\left(k_z z\right), \tag{34}$$

$$e_z(x,z) = \left[-\frac{k_x}{\widetilde{\varepsilon}\omega} A' \mathrm{e}^{ik_x x} + \frac{k_x}{\widetilde{\varepsilon}\omega} B' \mathrm{e}^{-ik_x x} \right] \cos\left(k_z z\right). \tag{35}$$

Аналогичным образом можно переписать формулы (30)–(31) для *T*-волны:

$$h_y(x) = A' \, \mathrm{e}^{ikx} + B' \, \mathrm{e}^{-ikx}, \tag{36}$$

$$e_z(x) = -\sqrt{\frac{\mu}{\widetilde{\varepsilon}}} \, A' \, \mathrm{e}^{ikx} + \sqrt{\frac{\mu}{\widetilde{\varepsilon}}} \, B' \, \mathrm{e}^{-ikx}. \tag{37}$$

Видим, что для любых бегущих волн знак отношения поперечных составляющих электрического и магнитного полей изменяется при изменении направления распространения. Величина отношения поперечных компонент электрического и магнитного полей для *E*- и *H*-волн зависит от частоты. Для *T*-волны отношение

$$\frac{\left|e_z\right|}{\left|h_y\right|} = \sqrt{\mu/\widetilde{\varepsilon}} \tag{38}$$

постоянно. Величина $\eta = \sqrt{\mu/\widetilde{\varepsilon}}$ называется *характеристическим сопротивлением среды*. Для свободного пространства характеристическое сопротивление в системе единиц *SI* равно

$$\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377 \ [\text{Ом}]. \tag{39}$$

Учитывая гармонический характер временной зависимости (1) и предполагая вещественность амплитуды A', запишем *фазу волны*, описываемой первым слагаемым в формулах (18)–(20) и (33)–(37):

$$\varphi(x,t) = x \, \mathrm{Re}\,(k_x) - \omega t. \tag{40}$$

Видим, что фаза волны будет оставаться постоянной, если координата x точки наблюдения фазы изменяется по закону

$$x = \omega t / \mathrm{Re}\,(k_x)\,.$$

Это означает, что фронт волны перемещается со скоростью

$$v = \omega / \mathrm{Re}\,(k_x) \tag{41}$$

в положительном направлении оси Ox. Аналогичным образом можно увидеть, что второе слагаемое в (18)–(20) и (33)–(37) описывает волну, распространяющуюся в противоположном направлении.

Величина $\omega / \mathrm{Re}\,(k_x)$ называется *фазовой скоростью* волны. Для E- и H-волн, как следует из выражений (15) и (28), величина фазовой скорости определяется формулой

$$v_n^{E,H} = \frac{1}{\mathrm{Re}\left(\sqrt{\widetilde{\varepsilon}\mu - (\pi n/\omega d)^2}\right)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{42}$$

Видно, что фазовые скорости $v_n^{E,H}$ зависят от частоты ω. Зависимость фазовой скорости волны от частоты называют *дисперсией*.

Фазовая скорость T-волны определяется формулой

$$v^T = 1 \Big/ \mathrm{Re}\left(\sqrt{\widetilde{\varepsilon}\mu}\right). \tag{43}$$

Видно, что у T-волн дисперсия отсутствует. На любой частоте поперечные волны распространяются с одинаковой скоростью, если не учитывать частотную дисперсию самой среды, то есть зависимости $\widetilde{\varepsilon}$ и μ от ω.

В случае незаполненного пространства между проводящими плоскостями ($\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$) фазовая скорость T-волны

$$v^T = 1 \Big/ \sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0} \equiv c\,, \tag{44}$$

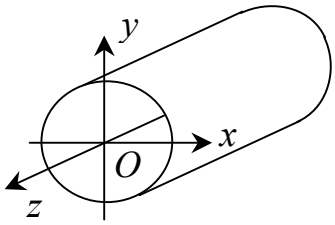
где c – скорость света в свободном пространстве.

20. Волны в круглом волноводе

Так как круглый волновод обладает осевой симметрией, то эту задачу проще решать в цилиндрической системе координат:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z. \tag{1}$$

В этой системе координат граничные условия, выражающие равенство нулю тангенциальных компонент электрического поля на идеально проводящей цилиндрической поверхности радиуса $r = r_1$, имеют вид



$$E_{\varphi}\big|_{r=r_1} = 0, \qquad E_z\big|_{r=r_1} = 0. \tag{2}$$

Учитывая, что оператор Лапласа для скалярной функции выражается в цилиндрической системе координат формулой (10.34), запишем уравнение Гельмгольца (18.22) для продольной составляющей электрического поля гармонической электромагнитной волны в виде

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 e_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial z^2} + k^2 e_z = 0. \tag{3}$$

Найдем сначала решение для E-волны, бегущей вдоль оси Oz. Решение для продольной составляющей будем искать в виде

$$e_z(r,\varphi,z) = R(r)\,\Phi(\varphi)\,\mathrm{e}^{ik_z z}, \tag{4}$$

где k_z – волновое число волны. Подставляя (4) в уравнение (3) получаем

$$\frac{r^2}{R_n}\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{r}{R_n}\frac{\partial R_n}{\partial r} + \left(k^2 - k_z^2\right)r^2 = -\frac{1}{\Phi_n}\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \varphi^2} = n^2, \tag{5}$$

где n^2 – константа разделения переменных, которая подлежит определению. Из (5) получаются два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R_n}{\partial r} + \left[\left(k^2 - k_z^2\right) - \frac{n^2}{r^2}\right]R_n = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \varphi^2} + n^2 \Phi_n = 0. \tag{7}$$

Периодическое решение уравнения (7) имеет вид

$$\Phi_n(\varphi) = \cos\left(n\varphi - \varphi_0\right), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Общее решение уравнения Бесселя (6) есть суперпозиция функций Бесселя и Неймана (см. (11.2). Так как мы ищем решения конечные внутри цилиндра радиуса r_1, то функция Неймана исключается

$$R_n(r) = J_n\left(\sqrt{k^2 - k_z^2}\,r\right). \tag{9}$$

Из граничного условия (2) получаем

$$R_n(r) = J_n(\mu_{nm}\, r/r_1), \quad k_z = \pm\sqrt{k^2 - \mu_{nm}^2/r_1^2}\,, \tag{10}$$

где μ_{nm} – m-й нуль функции Бесселя $J_n(z)$.

Таким образом, в соответствии с (4), (8), (10) имеем

$$e_z(r, \varphi, z) = J_n(\mu_{nm} r/r_1)\cos(n\varphi - \varphi_0)\, e^{ik_z z}. \tag{11}$$

Найдем остальные компоненты E-волны. Для этого обратимся к уравнениям Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{e}} = i\mu\omega\,\vec{\mathbf{h}}, \tag{12}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{h}} = -i\tilde{\varepsilon}\omega\,\vec{\mathbf{e}}. \tag{13}$$

Используя выражения (10.33) для оператора rot в цилиндрической системе координат, перепишем векторные уравнения (12), (13) в виде системы скалярных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial e_\varphi}{\partial z} &= i\mu\omega\, h_r,\\
\frac{\partial e_r}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial r} &= i\mu\omega\, h_\varphi,\\
\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r e_z)}{\partial r} - \frac{\partial e_r}{\partial \varphi}\right] &= i\mu\omega\, h_z,
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial h_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial h_\varphi}{\partial z} &= -i\tilde{\varepsilon}\omega\, e_r,\\
\frac{\partial h_r}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial r} &= -i\tilde{\varepsilon}\omega\, e_\varphi,\\
\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r h_z)}{\partial r} - \frac{\partial h_r}{\partial \varphi}\right] &= -i\tilde{\varepsilon}\omega\, e_z.
\end{aligned} \tag{15}$$

Видно, что если компонента e_z зависит от координаты z как $e^{ik_z z}$, то и все остальные компоненты волны будут иметь такую же зависимость. Поэтому системы уравнений (14), (15) можно несколько упростить:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial \varphi} - ik_z e_\varphi &= i\mu\omega\, h_r,\\
ik_z e_r - \frac{\partial e_z}{\partial r} &= i\mu\omega\, h_\varphi,\\
\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (re_z)}{\partial r} - \frac{\partial e_r}{\partial \varphi}\right] &= i\mu\omega\, h_z,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial h_z}{\partial \varphi} - ik_z h_\varphi &= -i\widetilde{\varepsilon}\omega\, e_r,\\
ik_z h_r - \frac{\partial h_z}{\partial r} &= -i\widetilde{\varepsilon}\omega\, e_\varphi,\\
\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rh_z)}{\partial r} - \frac{\partial h_r}{\partial \varphi}\right] &= -i\widetilde{\varepsilon}\omega\, e_z.
\end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя второе уравнение системы (17) в первое уравнение системы (16), получаем

$$\left(k^2 - k_z^2\right) h_r = -i\widetilde{\varepsilon}\omega \frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial \varphi} + ik_z \frac{\partial h_z}{\partial r}. \tag{18}$$

Аналогичным образом выражаем остальные поперечные компоненты волны через продольные компоненты:

$$\left(k^2 - k_z^2\right) h_\varphi = i\widetilde{\varepsilon}\omega \frac{\partial e_z}{\partial r} + ik_z \frac{1}{r}\frac{\partial h_z}{\partial \varphi}, \tag{19}$$

$$\left(k^2 - k_z^2\right) e_r = ik_z \frac{\partial e_z}{\partial r} + i\mu\omega \frac{1}{r}\frac{\partial h_z}{\partial \varphi}, \tag{20}$$

$$\left(k^2 - k_z^2\right) e_\varphi = ik_z \frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial \varphi} - i\mu\omega \frac{\partial h_z}{\partial r}. \tag{21}$$

Подставляя выражение (11) в формулы (18)–(21) находим поперечные компоненты *E*-волны:

$$h_r = in \frac{\widetilde{\varepsilon}\omega\, r_1^2}{\mu_{nm}^2 r} J_n(\mu_{nm} r / r_1) \sin(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{ik_z z}, \tag{22}$$

$$h_\varphi = i \frac{\widetilde{\varepsilon}\omega\, r_1}{\mu_{nm}} J_n'(\mu_{nm} r / r_1) \cos(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{ik_z z}, \tag{23}$$

$$e_r = i\frac{k_z r_1}{\mu_{nm}} J_n'(\mu_{nm} r / r_1) \cos(n\varphi - \varphi_0)\, e^{ik_z z}, \tag{24}$$

$$e_\varphi = -in\frac{k_z r_1^2}{\mu_{nm}^2 r} J_n(\mu_{nm} r / r_1) \sin(n\varphi - \varphi_0)\, e^{ik_z z}. \tag{25}$$

Замечаем, что вторая тангенциальная составляющая электрического поля e_φ автоматически удовлетворяет граничному условию (2).

Из выражения (10) видим, что фазовая скорость E-волны

$$v_{nm}^E = \frac{1}{\mathrm{Re}\left(\sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu - \mu_{nm}^2 / (r_1\omega)^2}\right)}, \tag{26}$$

а критические частоты

$$\omega_{nm}^E = \frac{\mu_{nm}}{r_1\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{27}$$

Теперь будем искать решение для H-волны. Решение для продольной составляющей будем искать в виде

$$h_z(r,\varphi,z) = R(r)\,\Phi(\varphi)\, e^{ik_z z}. \tag{28}$$

где k_z – волновое число волны. Подставляя (28) в соответствующее уравнение Гельмгольца, аналогичное уравнению (3), и разделяя переменные, получаем

$$h_z(r,\varphi,z) = J_n(\nu_{nm} r / r_1) \cos(n\varphi - \varphi_0)\, e^{ik_z z}, \tag{29}$$

где волновое число

$$k_z = \pm\sqrt{k^2 - \nu_{nm}^2 / r_1^2}, \tag{30}$$

а ν_{nm} – число, подлежащее определению из граничных условий.

Подставляя (29) в систему уравнений (18)–(21), находим поперечные составляющие H-волны

$$h_r(r,\varphi,z) = \frac{ik_z r_1}{\nu_{nm}} J_n'(\nu_{nm} r / r_1) \cos(n\varphi - \varphi_0)\, e^{ik_z z}, \tag{31}$$

$$h_\varphi(r,\varphi,z) = \frac{-ik_z n r_1^2}{\nu_{nm}^2 r} J_n(\nu_{nm} r / r_1) \sin(n\varphi - \varphi_0)\, e^{ik_z z}, \tag{32}$$

$$e_r(r,\varphi,z)=\frac{-i\mu\omega n r_1^2}{\nu_{nm}^2 r}J_n(\nu_{nm}r/r_1)\sin\left(n\varphi-\varphi_0\right)\mathrm{e}^{ik_z z}, \tag{33}$$

$$e_\varphi(r,\varphi,z)=\frac{-i\mu\omega r_1}{\nu_{nm}}J_n'(\nu_{nm}r/r_1)\cos\left(n\varphi-\varphi_0\right)\mathrm{e}^{ik_z z}. \tag{34}$$

H-волна имеет только одну компоненту электрического поля, тангенциальную к проводящей цилиндрической поверхности волновода. Это – компонента e_φ. Подставляя выражение (34) в граничное условие (2), получаем, что ν_{nm} есть *m*-й нуль производной функции Бесселя, то есть корень уравнения

$$J'_n(\nu_{nm})=0. \tag{35}$$

Из формулы (30) находим для *H*-волны фазовую скорость

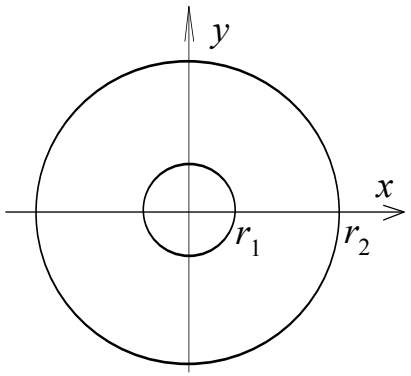
$$v_{nm}^H=\frac{1}{\mathrm{Re}\left(\sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu-\nu_{nm}^2/(r_1\omega)^2}\right)} \tag{36}$$

и критическую частоту

$$\omega_{nm}^H=\frac{\nu_{nm}}{r_1\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{37}$$

Анализируя формулы (27) и (37), можно увидеть, что наинизшую критическую частоту имеет волна типа H_{11}. Поэтому эта волна является волной основного типа в цилиндрическом волноводе.

21. Волны в коаксиальной линии



Коаксиальной линией называют линию передачи, в которой электромагнитные волны распространяются в диэлектрике, заполняющем пространство между двумя соосными проводящими цилиндрическими поверхностями. Поперечное сечение такой линии изображено на рисунке. Пусть r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы цилиндрических поверхностей. Запишем граничные условия для тангенциальных компонент электрического поля:

$$
\begin{aligned}
&E_\varphi\Big|_{r=r_1}=0, \quad E_z\Big|_{r=r_1}=0,\\
&E_\varphi\Big|_{r=r_2}=0, \quad E_z\Big|_{r=r_2}=0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Будем искать решение для стационарной волны в комплексном виде. Амплитуды продольных составляющих такой волны удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$
\frac{\partial^2 e_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial e_z}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 e_z}{\partial z^2}+k^2 e_z=0, \tag{2}
$$

$$
\frac{\partial^2 h_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial h_z}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2}+k^2 h_z=0, \tag{3}
$$

где

$$
k=\sqrt{\widetilde{\varepsilon}\mu}\,\omega\ . \tag{4}
$$

Зная продольные составляющие волны, остальные поперечные составляющие можно вычислить по формулам (20.18)–(20.21).

Получим сначала решение для *H*-волны. Общее решение уравнения (3), согласно формулам (20.4)–(20.9), имеет вид

$$
h_z(r,\varphi,z)=\left[AJ_n\left(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r\right)+BN_n\left(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r\right)\right]\cos\left(n\varphi-\varphi_0\right)\mathrm{e}^{ik_z z}. \tag{5}
$$

Здесь мы были вправе вместе с функцией Бесселя сохранить и функцию Неймана, так как в области $r_1<r<r_2$ обе функции конечны. Подставляя (5) в уравнение (20.21), получаем выражение для тангенциальной составляющей электрического поля

$$
e_\varphi(r,\varphi,z)=\frac{-i\mu\omega}{\sqrt{k^2-k_z^2}}\left[AJ_n'\left(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r\right)+BN_n'\left(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r\right)\right]\cos\left(n\varphi-\varphi_0\right)\mathrm{e}^{ik_z z}. \tag{6}
$$

Налагая на (6) граничные условия (1), получаем

$$
AJ_n'\left(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_1\right)+BN_n'\left(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_1\right)=0, \tag{7}
$$

$$
AJ_n'\left(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_2\right)+BN_n'\left(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_2\right)=0. \tag{8}
$$

Система уравнений (7)–(8) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Отсюда получаем *дисперсионное уравнение* для отыскания волнового числа k_z:

$$J_n'(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_1)\,N_n'(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_2)-J_n'(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_2)\,N_n'(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_1)=0\,. \qquad (9)$$

Перепишем уравнение (9) в виде

$$J_n'(\kappa r_1/r_2)\,N_n'(\kappa)-J_n'(\kappa)\,N_n'(\kappa r_1/r_2)=0\,. \qquad (10)$$

Вычислив корни κ_{nm} уравнения (10), находим значения волнового числа

$$k_z=\sqrt{k^2-(\kappa_{nm}/r_2)^2}\,. \qquad (11)$$

Одновременно из (7), (8) получаем

$$B=-AJ_n'(\kappa_{nm})/N_n'(\kappa_{nm})\,. \qquad (12)$$

Подставим (11) и (12) в выражения (5) и (6):

$$h_z(r,\varphi,z)=A'\left[\frac{J_n(\kappa_{nm}r/r_2)}{J_n'(\kappa_{nm})}-\frac{N_n(\kappa_{nm}r/r_2)}{N_n'(\kappa_{nm})}\right]\cos(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_zz}\,, \qquad (13)$$

$$e_\varphi(r,\varphi,z)=\frac{-i\mu\omega r_2}{\kappa_{nm}}A'\left[\frac{J_n'(\kappa_{nm}r/r_2)}{J_n'(\kappa_{nm})}-\frac{N_n'(\kappa_{nm}r/r_2)}{N_n'(\kappa_{nm})}\right]\cos(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_zz}\,. \qquad (14)$$

Далее, используя формулы (20.18)–(20.20), находим остальные поперечные составляющие *H*-волны:

$$h_r(r,\varphi,z)=ik_zA'\left[\frac{J_n'(\kappa_{nm}r/r_2)}{J_n'(\kappa_{nm})}-\frac{N_n'(\kappa_{nm}r/r_2)}{N_n'(\kappa_{nm})}\right]\cos(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_zz}\,, \qquad (15)$$

$$h_\varphi(r,\varphi,z)=\frac{-ik_znr_2}{\kappa_{nm}r}A'\left[\frac{J_n(\kappa_{nm}r/r_2)}{J_n'(\kappa_{nm})}-\frac{N_n(\kappa_{nm}r/r_2)}{N_n'(\kappa_{nm})}\right]\sin(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_zz}\,, \qquad (16)$$

$$e_r(r,\varphi,z)=\frac{-i\mu\omega r_2^2n}{\kappa_{nm}^2r}A'\left[\frac{J_n(\kappa_{nm}r/r_2)}{J_n'(\kappa_{nm})}-\frac{N_n(\kappa_{nm}r/r_2)}{N_n'(\kappa_{nm})}\right]\sin(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_zz}\,. \qquad (17)$$

Из (11) следует, что для *H*-волны фазовая скорость

$$v_{nm}^H=\frac{1}{\mathrm{Re}\left(\sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu-\kappa_{nm}^2/(r_2\omega)^2}\right)}, \qquad (18)$$

а критическая частота

$$\omega_{nm}^H=\frac{\kappa_{nm}}{r_2\sqrt{\varepsilon\mu}}\,. \qquad (19)$$

Приступим теперь к нахождению решения для *E*-волны. Запишем общее решение уравнения (2) для составляющей e_z:

$$e_z(r,\varphi,z)=\left[\, AJ_n(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r)+BN_n(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r)\right]\cos(n\varphi-\varphi_0)\,\mathrm{e}^{ik_z z}. \qquad (20)$$

Подставляя (20) в граничные условия (1), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} AJ_n(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_1)+BN_n(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_1)=0,\\ AJ_n(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_2)+BN_n(\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_2)=0. \end{aligned} \qquad (21)$$

Вводя обозначение

$$\tau_n=\sqrt{k^2-k_z^2}\,r_2, \qquad (22)$$

перепишем систему (21) в виде

$$\begin{aligned} AJ_n(\tau_n r_1/r_2)+BN_n(\tau_n r_1/r_2)=0,\\ AJ_n(\tau_n)+BN_n(\tau_n)=0. \end{aligned} \qquad (23)$$

Однородная система уравнений (23) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Отсюда получаем *дисперсионное уравнение E*-волны для определения значений τ_{nm} поперечного волнового числа τ_n:

$$\frac{J_n(\tau_{nm}r_1/r_2)}{J_n(\tau_{nm})}-\frac{N_n(\tau_{nm}r_1/r_2)}{N_n(\tau_{nm})}=0. \qquad (24)$$

Из системы (23) также находим отношение констант

$$B/A=-J_n(\tau_{nm})/N_n(\tau_{nm}). \qquad (25)$$

Таким образом, продольная составляющая *E*-волны имеет вид

$$e_z(r,\varphi,z)=A'\left[\frac{J_n(\tau_{nm}r/r_2)}{J_n(\tau_{nm})}-\frac{N_n(\tau_{nm}r/r_2)}{N_n(\tau_{nm})}\right]\cos(n\varphi-\varphi_0)\,\mathrm{e}^{ik_z z}, \qquad (26)$$

где волновое число k_z, как следует из (22), выражается формулой

$$k_z=\sqrt{k^2-(\tau_{nm}/r_2)^2}\,. \qquad (27)$$

Фазовая скорость и критическая частота *E*-волны выражаются формулами

$$v_{nm}^{E}=\frac{1}{\mathrm{Re}\left(\sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu-\tau_{nm}^2/(r_2\omega)^2}\right)}, \qquad (28)$$

$$\omega_{nm}^{E}=\frac{\tau_{nm}}{r_2\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (29)$$

Подставляя (26) в формулы (20.18)–(20.21), находим поперечные компоненты *E*-волны:

$$h_r(r,\varphi,z)=\frac{i\widetilde{\varepsilon}\omega r_2^2 n}{\tau_{nm}^2 r}A'\left[\frac{J_n(\tau_{nm}r/r_2)}{J_n(\tau_{nm})}-\frac{N_n(\tau_{nm}r/r_2)}{N_n(\tau_{nm})}\right]\sin(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_z z}, \tag{30}$$

$$h_\varphi(r,\varphi,z)=\frac{i\widetilde{\varepsilon}\omega r_2}{\tau_{nm}}A'\left[\frac{J_n'(\tau_{nm}r/r_2)}{J_n(\tau_{nm})}-\frac{N_n'(\tau_{nm}r/r_2)}{N_n(\tau_{nm})}\right]\cos(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_z z}, \tag{31}$$

$$e_r(r,\varphi,z)=\frac{i k_z r_2}{\tau_{nm}}A'\left[\frac{J_n'(\tau_{nm}r/r_2)}{J_n(\tau_{nm})}-\frac{N_n'(\tau_{nm}r/r_2)}{N_n(\tau_{nm})}\right]\cos(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_z z}, \tag{32}$$

$$e_\varphi(r,\varphi,z)=\frac{-ik_z r_2^2 n}{\tau_{nm}^2 r}A'\left[\frac{J_n(\tau_{nm}r/r_2)}{J_n(\tau_{nm})}-\frac{N_n(\tau_{nm}r/r_2)}{N_n(\tau_{nm})}\right]\sin(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_z z}. \tag{33}$$

В коаксиальной линии передачи кроме *H*- и *E*-волн может распространяться еще и *T*-волна. Эта волна не имеет продольных компонент e_z и h_z. Из уравнений (20.18)–(20.21) видно, что это возможно только в том случае, когда

$$k_z=\pm k. \tag{34}$$

Отсюда, а также из (4) и (19.41) видно, что фазовая скорость *T*-волны

$$v^T=1\Big/\mathrm{Re}\left(\sqrt{\widetilde{\varepsilon}\mu}\right), \tag{35}$$

а ее критическая частота

$$\omega^T=0. \tag{36}$$

Найдем компоненты *T*-волны. Для этого запишем в цилиндрической системе координат уравнения Максвелла для амплитуд стационарной волны:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial\varphi}-ik_z e_\varphi=i\mu\omega h_r,$$

$$ik_z e_r-\frac{\partial e_z}{\partial r}=i\mu\omega h_\varphi,$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(re_z)}{\partial r}-\frac{\partial e_r}{\partial\varphi}\right]=i\mu\omega h_z,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial h_z}{\partial \varphi} - ik_z h_\varphi = -i\tilde{\varepsilon}\omega e_r,$$

$$ik_z h_r - \frac{\partial h_z}{\partial r} = -i\tilde{\varepsilon}\omega e_\varphi, \qquad (37)$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rh_z)}{\partial r} - \frac{\partial h_r}{\partial \varphi}\right] = -i\tilde{\varepsilon}\omega e_z.$$

Перепишем систему уравнений (37), учитывая, что $e_z = h_z = 0$:

$$\begin{aligned} k_z e_\varphi &= -\mu\omega h_r, \quad & k_z h_\varphi &= \tilde{\varepsilon}\omega e_r, \\ k_z e_r &= \mu\omega h_\varphi, \quad & k_z h_r &= -\tilde{\varepsilon}\omega e_\varphi, \\ \frac{\partial e_r}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial h_r}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \qquad (38)$$

Из системы уравнений (38) видно, что компоненты *T*-волны не зависят от угла φ. Кроме того, эта система разбивается на две разделяющиеся подсистемы:

$$\begin{aligned} k_z e_\varphi + \mu\omega h_r &= 0, \\ \tilde{\varepsilon}\omega e_\varphi + k_z h_r &= 0 \end{aligned} \qquad (39)$$

и

$$\begin{aligned} k_z e_r - \mu\omega h_\varphi &= 0, \\ \tilde{\varepsilon}\omega e_r - k_z h_\varphi &= 0. \end{aligned} \qquad (40)$$

Учитывая (4) и (34), находим

$$e_\varphi = \mp\sqrt{\mu/\tilde{\varepsilon}}\, h_r, \qquad (41)$$

$$h_\varphi = \pm\sqrt{\tilde{\varepsilon}/\mu}\, e_r. \qquad (42)$$

Найдем зависимость поперечных компонент *T*-волны от координаты *r*. Заметим, что в цилиндрической системе координат поперечные компоненты поля в отличие от продольных нельзя рассматривать как скалярные функции, так как отвечающие им орты $\vec{\mathbf{i}}_r$ и $\vec{\mathbf{i}}_\varphi$ являются функциями координат. Это значит, что в волновом уравнении мы не можем использовать компактную формулу (10.34) для оператора Лапласа, которая справедлива в отношении лишь скалярных, но не векторных функций. Поэтому сначала рассмотрим волновые уравнения для векторов электрического $\vec{\mathbf{e}}$ и магнитного поля $\vec{\mathbf{h}}$ в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{e}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{\mathbf{e}}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{\mathbf{e}}}{\partial z^2}+k^2\vec{\mathbf{e}}=0,\\ \frac{\partial^2\vec{\mathbf{h}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{\mathbf{h}}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{\mathbf{h}}}{\partial z^2}+k^2\vec{\mathbf{h}}=0.\end{aligned} \tag{43}$$

Учитывая экспоненциальную зависимость от координаты z и условие (34), уравнения (43) превращаются в два двумерных уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{e}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{\mathbf{e}}}{\partial y^2}=0,\\ \frac{\partial^2\vec{\mathbf{h}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{\mathbf{h}}}{\partial y^2}=0.\end{aligned} \tag{44}$$

Покажем сначала, что решение уравнений (44) для векторных величин $\vec{\mathbf{e}}$ и $\vec{\mathbf{h}}$ можно представить в виде

$$\vec{\mathbf{e}}=-\operatorname{grad}\Phi_e, \qquad \vec{\mathbf{h}}=-\operatorname{grad}\Phi_h, \tag{45}$$

где Φ_e, Φ_h – скалярные потенциалы электрического и магнитного полей, удовлетворяющие уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi_e=0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi_h=0\ . \tag{46}$$

Действительно, учитывая, что ротор от градиента любой скалярной функции равен нулю, имеем

$$\partial e_y/\partial x-\partial e_x/\partial y=0. \tag{47}$$

С другой стороны, из первого уравнения формулы (45) и первого уравнения формулы (46) имеем

$$\partial e_x/\partial x+\partial e_y/\partial y=0. \tag{48}$$

Дифференцируя равенство (48) по x и подставляя в него равенство (47), получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2}=0. \tag{49}$$

Дифференцируя (48) по y и подставляя в него равенство (47), получаем второе уравнение

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_y}{\partial y^2}=0. \qquad (50)$$

Из скалярных равенств (49) и (50) следует справедливость первого векторного равенства системы (44). Справедливость второго векторного равенства (44) доказывается аналогичным образом.

Найдем скалярные потенциалы электрического поля Φ_e и магнитного поля Φ_h. Для этого запишем уравнение (46) в полярной системе координат:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\Phi_e\right)=0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\Phi_h\right)=0\ . \qquad (51)$$

Здесь учтено отсутствие зависимости компонент электромагнитного поля от координаты φ. Решение уравнений (51) имеет вид

$$\Phi_e = A_e \ln r + B_e, \qquad \Phi_h = A_h \ln r + B_h. \qquad (52)$$

По формуле (45) находим напряженности полей:

$$e_r = -A_e / r, \qquad h_h = -A_h / r\ . \qquad (53)$$

Используя формулы (41) и (42), получаем остальные компоненты поперечной волны:

$$h_\varphi = \mp\sqrt{\tilde{\varepsilon}/\mu}\ A_e / r, \qquad e_\varphi = \pm\sqrt{\mu/\tilde{\varepsilon}}\ A_h / r\ . \qquad (54)$$

Из граничных условий (1) для тангенциальных компонент электрического поля находим, что константа $A_h = 0$. Значение константы A_e найдем из условия, что напряжение на внутреннем проводнике относительно внешнего равно U, то есть из условия

$$U = -\int_{r_2}^{r_1} e_r dr = -A_e \ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (55)$$

Таким образом, имеем следующие отличные от нуля компоненты T-волны:

$$e_r = \frac{U}{r\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\,\mathrm{e}^{\pm i k z - i\omega t}, \quad h_\varphi = \pm\sqrt{\tilde{\varepsilon}/\mu}\,\frac{U}{r\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\,\mathrm{e}^{\pm i k z - i\omega t} \quad \left(k=\sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu}\ \omega\right). \qquad (56)$$

Вычислим теперь электрический ток, протекающий по поверхности внутреннего проводника. Для этого обратимся к граничным условиям (18.26) для тангенциальных компонент магнитного поля на поверхности раздела

двух сред. Так как в идеальный проводник электромагнитные волны не проникают, то в рассматриваемом случае граничные условия (18.26) принимают вид

$$[\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{h}}_t] = -\vec{\mathbf{J}}. \tag{57}$$

В цилиндрической системе координат формула (57) для поверхности внутреннего проводника имеет вид

$$h_\varphi|_{r=r_1} = J_z. \tag{58}$$

Учитывая формулу (56), находим плотность поверхностного тока

$$J_z = \pm\sqrt{\tilde{\varepsilon}/\mu}\,\frac{U}{r_1 \ln\dfrac{r_2}{r_1}}\,\mathrm{e}^{\pm i k z - i\omega t}. \tag{59}$$

Полный ток I по внутреннему проводнику есть интеграл поверхностного тока J_z по окружности радиуса r_1. Поэтому, умножая J_z на $2\pi r_1$, получаем

$$I = \pm\sqrt{\tilde{\varepsilon}/\mu}\,\frac{2\pi U}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\,\mathrm{e}^{\pm i k z - i\omega t}. \tag{60}$$

Отношение $Z = U/I$ для бегущей T-волны называют *волновым сопротивлением*. Для коаксиальной линии, как следует из (60), оно равно

$$Z = \sqrt{\mu/\tilde{\varepsilon}}\,\frac{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}{2\pi}. \tag{61}$$

22. Волны в диэлектрическом стержне

До сих пор мы рассматривали распространение электромагнитных волн в линиях передачи, образуемых проводящими поверхностями. Теперь рассмотрим распространение волн в диэлектрике цилиндрической формы радиуса r_1. Для простоты рассмотрения диэлектрик будем считать идеальным с диэлектрической проницаемостью ε и немагнитным, то есть с магнитной проницаемостью μ_0.

Заметим, что диэлектрический стержень, в отличие от круглого волновода и коаксиальной линии, является неоднородной открытой линией пере-

дачи. В такой линии область распространения электромагнитной волны не ограничена диэлектриком. Волна формируется и диэлектриком, и внешней средой. Поэтому в такой линии передачи не может распространяться *T*-волна. Действительно, как мы уже знаем, для *T*-волн $k_z = k$ и потому фазовая скорость $v^T = 1/\sqrt{\varepsilon\mu_0}$. Это означает, что если все же такая волна существует, то она имеет разные фазовые скорости в диэлектрике и в окружающем свободном пространстве, а это уже не одна, а две волны.

Поэтому будем искать *H*- и *E*-волны в диэлектрическом волноводе. В цилиндрической системе координат поперечные составляющие h_r, h_φ, e_r, e_φ электромагнитных волн связаны с продольными составляющими h_z, e_z формулами (20.18)–(20.21). Сами же продольные составляющие являются решениями уравнения Гельмгольца (20.3).

Граничные условия на цилиндрической поверхности раздела двух сред запишем исходя общих граничных условий электродинамики (18.23)–(18.26). Поскольку мы имеем дело с идеальным диэлектрическим волноводом, то поверхностные заряды и токи в диэлектрическом стержне возникать не будут. Поэтому граничные условия для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$e_\varphi^{(2)} = e_\varphi^{(1)}, \quad e_z^{(2)} = e_z^{(1)}, \quad \varepsilon_0 e_r^{(2)} = \varepsilon\, e_r^{(1)}, \tag{1}$$

$$h_\varphi^{(2)} = h_\varphi^{(1)}, \quad h_z^{(2)} = h_z^{(1)}, \quad h_r^{(2)} = h_r^{(1)}. \tag{2}$$

Здесь мы предполагаем, что среда *1* есть диэлектрик, а *2* – окружающее свободное пространство.

Приступим к нахождению *E*-волны. Предполагая, что внутри диэлектрического стрежня

$$\varepsilon\mu_0\omega^2 > k_z^2 \tag{3}$$

и поле волны конечно, запишем решение уравнения Гельмгольца (20.3) для первой среды:

$$e_z^{(1)}(r,\varphi,z) = A J_n(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2}\, r)\cos(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{i k_z z}. \tag{4}$$

Общее решение уравнения Гельмгольца для второй среды можно представить в виде суперпозиции функций Ханкеля первого и второго рода:

$$e_z^{(2)}(r,\varphi,z) = \left[B H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - k_z^2}\, r) + C H_n^{(2)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - k_z^2}\, r) \right] \cos(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{i k_z z}. \tag{5}$$

Из асимптотических формул (11.15) видно, что функции Ханкеля в формуле (5) описывают при вещественном аргументе бегущие волны, расходящиеся и сходящиеся к оси цилиндра. Напротив, при чисто мнимом аргументе, получающемся при

$$\varepsilon_0\mu_0\omega^2 < k_z^2, \tag{6}$$

функции Ханкеля описывают стоячие волны вдоль координаты r. Причем функция Ханкеля первого рода обеспечивает экспоненциально убывающую амплитуду волны, а функция Ханкеля второго рода – экспоненциально нарастающую. Однако, электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль диэлектрического стержня, не может иметь бесконечную энергию. Эта энергия может лишь излучаться из стрежня во внешнее пространство, но не переноситься к нему из бесконечности. Поэтому, исключая второе слагаемое в общем решении (5), имеем

$$e_z^{(2)}(r,\varphi,z) = B\, H_n^{(1)}(i\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2}\, r)\cos(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{i k_z z}. \tag{7}$$

При чисто мнимом аргументе вместо функции Ханкеля первого рода удобно использовать *функцию Макдональда* $K_n(z)$. При вещественном аргументе z эта функция вещественна. Функции $H_n^{(1)}(z)$ и $K_n(z)$ связаны соотношением

$$K_n(z) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(iz). \tag{8}$$

Функция Макдональда $K_n(z)$ является одним из решений *модифицированного уравнения Бесселя*

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} - \left(1 + \frac{n^2}{z^2}\right)u = 0. \tag{9}$$

Из формулы (8) и свойств функции Ханкеля следует, что функция Макдональда при $z = 0$ обращается в бесконечность, а при $z \to \infty$ убывает по экспоненциальному закону.

Вторым решением модифицированного уравнения Бесселя (9) является вещественная функция

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz). \tag{10}$$

Эта функция, напротив, конечна при $z = 0$ и нарастает по экспоненте при $z \to \infty$. Функции $K_n(z)$ и $I_n(z)$ называют *модифицированными функциями Ханкеля и Бесселя*.

После подстановки (8) в (7) получаем

$$e_z^{(2)}(r,\varphi,z) = B' K_n(\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2}\, r)\cos(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{i k_z z}. \qquad (11)$$

Используя формулы (20.18)–(20.21), получим поперечные компоненты волны:

$$h_\varphi(r,\varphi,z) = \begin{cases} \dfrac{i\varepsilon\omega A}{\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2}} J_n'(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2}\, r)\cos(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{ik_z z} & \text{при } r < r_1 \\ \dfrac{-i\varepsilon_0\omega B'}{\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2}} K_n'(\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2}\, r)\cos(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{ik_z z} & \text{при } r > r_1, \end{cases} \qquad (12)$$

$$e_\varphi(r,\varphi,z) = \begin{cases} \dfrac{-ik_z n A}{(\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2) r} J_n(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2}\, r)\sin(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{ik_z z} & \text{при } r < r_1 \\ \dfrac{ik_z n B'}{(k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2) r} K_n(\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2}\, r)\sin(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{ik_z z} & \text{при } r > r_1, \end{cases} \qquad (13)$$

$$h_r(r,\varphi,z) = \begin{cases} \dfrac{i\varepsilon\omega n A}{(\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2) r} J_n(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2}\, r)\sin(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{ik_z z} & \text{при } r < r_1 \\ \dfrac{-i\varepsilon_0\omega n B'}{(k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2) r} K_n(\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2}\, r)\sin(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{ik_z z} & \text{при } r > r_1, \end{cases} \qquad (14)$$

$$e_r(r,\varphi,z) = \begin{cases} \dfrac{ik_z A}{\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2}} J_n'(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2}\, r)\cos(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{ik_z z} & \text{при } r < r_1 \\ \dfrac{-ik_z B'}{\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2}} K_n'(\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2}\, r)\cos(n\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{e}^{ik_z z} & \text{при } r > r_1. \end{cases} \qquad (15)$$

Подставим в граничные условия (1)–(2) тангенциальные* компоненты (4), (9), (14)–(15):

$$A\, J_n(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2}\, r_1) = B' K_n(\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2}\, r_1), \qquad (16)$$

$$\frac{\varepsilon\omega A}{\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2}} J_n'(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2 - k_z^2}\, r_1) = \frac{-\varepsilon_0\omega B'}{\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2}} K_n'(\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0\mu_0\omega^2}\, r_1), \qquad (17)$$

---

* При этом остальные (нормальные) компоненты волны будут удовлетворять граничным условиям (1)–(2) автоматически, если они являются решениями уравнений Максвелла.

$$\frac{-n\,A}{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}J_n(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}\,r_1)=\frac{n\,B'}{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}K_n(\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\,r_1). \qquad (18)$$

Замечаем, что если $\varepsilon\neq\varepsilon_0$, то нетривиальное решение системы уравнений (16)–(18) для *E*-волн существует только при $n=0$. Это значит, что при $n\neq 0$ у волны в диэлектрическом волноводе будут две отличные от нуля продольные составляющие e_z и h_z. Волны, в которых отличны от нуля обе продольные компоненты, называют *гибридными*.

Продолжим рассмотрение *E*-волны с $n=0$. В этом случае равенство (18) превращается в тождество, и остаются лишь два уравнения: (16) и (17). Приравнивая определитель системы оставшихся уравнений нулю, получаем условие существования нетривиального решения:

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}}\frac{J_0'(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}\,r_1)}{J_0(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}\,r_1)}=\frac{-\varepsilon_0}{\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}}\frac{K_0'(\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\,r_1)}{K_0(\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\,r_1)}. \qquad (19)$$

Вводя обозначения

$$\kappa^{(1)}=\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2},\quad \kappa^{(2)}=\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}, \qquad (20)$$

перепишем (19) в виде

$$\frac{\varepsilon}{\kappa^{(1)}}\frac{J_0'(\kappa^{(1)}r_1)}{J_0(\kappa^{(1)}r_1)}=\frac{-\varepsilon_0}{\kappa^{(2)}}\frac{K_0'(\kappa^{(2)}r_1)}{K_0(\kappa^{(2)}r_1)}. \qquad (21)$$

Используя рекуррентную формулу для цилиндрических функций

$$\frac{d}{dz}Z_n=\frac{n}{z}Z_n-Z_{n+1}, \qquad (22)$$

переписываем уравнение (21) в виде

$$\frac{-\varepsilon}{\kappa^{(1)}}\frac{J_1(\kappa^{(1)}r_1)}{J_0(\kappa^{(1)}r_1)}=\frac{\varepsilon_0}{\kappa^{(2)}}\frac{K_1(\kappa^{(2)}r_1)}{K_0(\kappa^{(2)}r_1)}. \qquad (23)$$

Уравнение (23) вместе с обозначениями (20) является *дисперсионным уравнением* для E_{0m}-волн в цилиндрическом стержне, где $n=0$, а m – порядковый номер решения.

Получим критические частоты для E_{0m}-волн. Из формул (11) и (20) видно, что поле волны синфазно в поперечном сечении, а амплитуда поля

убывает по экспоненциальному закону при $r \to \infty$, если квадрат радиального числа $\kappa^{(2)}$ положителен. Напротив, при $(\kappa^{(2)})^2 < 0$ фаза поля волны осциллирует в поперечном сечении и перемещается от поверхности стержня в бесконечность. Это означает, что энергия волны излучается в окружающее пространство. А такая волна не может не затухать вдоль диэлектрического стержня. Отсюда следует, что критическая частота определяется условием

$$\kappa^{(2)} = 0, \tag{24}$$

то есть

$$k_z^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 . \tag{25}$$

Подставим (24) в дисперсионное уравнение (23) и, учитывая, что правая часть его устремляется к бесконечности, получаем уравнение

$$J_0(\kappa^{(1)} r_1) = 0 . \tag{26}$$

Отсюда, используя (25), находим критическую частоту

$$\omega_{0m}^{E} = \frac{\nu_{0m}}{r_1 \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)\mu_0}}, \tag{27}$$

где ν_{nm} – m-й нуль функции Бесселя $J_n(z)$. Отметим, что $\nu_{01} = 2{,}405$. Подставляя (27) в (25), находим отвечающее критической частоте волновое число

$$k_{0m}^{E} = \frac{\nu_{0m}}{r_1 \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0 - 1}} . \tag{28}$$

Приступим к нахождению H-волны. Предполагая, что внутри диэлектрического стрежня выполняется условие (3), а вне его – условие (6), записываем общее выражение для продольной составляющей магнитного поля в виде

$$h_z(r, \varphi, z) = \begin{cases} A\, J_n(\sqrt{\varepsilon \mu_0 \omega^2 - k_z^2}\, r) \cos(n\varphi - \varphi_0)\, e^{ik_z z} & \text{при } r < r_1 \\ B\, K_n(\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2}\, r) \cos(n\varphi - \varphi_0)\, e^{ik_z z} & \text{при } r > r_1. \end{cases} \tag{29}$$

Подставляя (29) в уравнения (20.18)–(20.21), находим поперечные компоненты H-волны:

$$h_r(r, \varphi, z) = \begin{cases} \dfrac{ik_z A}{\sqrt{\varepsilon \mu_0 \omega^2 - k_z^2}} J_n'(\sqrt{\varepsilon \mu_0 \omega^2 - k_z^2}\, r) \cos(n\varphi - \varphi_0)\, e^{ik_z z} & \text{при } r < r_1 \\ \dfrac{-ik_z B}{\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2}} K_n'(\sqrt{k_z^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2}\, r) \cos(n\varphi - \varphi_0)\, e^{ik_z z} & \text{при } r > r_1, \end{cases} \tag{30}$$

$$h_\varphi(r,\varphi,z)=\begin{cases}\dfrac{-ik_z nA}{(\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2)r}J_n(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}\,r)\sin(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_z z} & \text{при } r<r_1\\ \dfrac{ik_z nB}{(k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2)r}K_n(\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\,r)\sin(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_z z} & \text{при } r>r_1,\end{cases} \tag{31}$$

$$e_r(r,\varphi,z)=\begin{cases}\dfrac{-i\mu_0\omega\, nA}{(\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2)\,r}J_n(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}\,r)\sin(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_z z} & \text{при } r<r_1\\ \dfrac{i\mu_0\omega\, nB}{(k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2)r}K_n(\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\,r)\sin(n\varphi-\varphi_0)\,e^{ik_z z} & \text{при } r>r_1,\end{cases} \tag{32}$$

$$e_\varphi(r,\varphi,z)=\begin{cases}\dfrac{-i\mu_0\omega\, A}{\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}}J_n'(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}\,r)\cos(n\varphi-\varphi_0)e^{ik_z z} & \text{при } r<r_1\\ \dfrac{i\mu_0\omega\, B}{\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}}K_n'(\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\,r)\cos(n\varphi-\varphi_0)e^{ik_z z} & \text{при } r>r_1.\end{cases} \tag{33}$$

Подставим тангенциальные компоненты (29), (31), (32) в граничные условия (1)–(2):

$$A\,J_n(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}\,r_1)=B\,K_n(\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\,r_1), \tag{34}$$

$$\frac{-n\,A}{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}J_n(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}\,r_1)=\frac{n\,B}{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}K_n(\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\,r_1), \tag{35}$$

$$\frac{-A}{\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}}J_n'(\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2}\,r_1)=\frac{B}{\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}}K_n'(\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\,r_1). \tag{36}$$

Видим, что H-волны, как и E-волны, существуют только при $n=0$. Дисперсионное уравнение для H_{0m}-волны имеет вид

$$\frac{-1}{\kappa^{(1)}}\frac{J_0'(\kappa^{(1)}r_1)}{J_0(\kappa^{(1)}r_1)}=\frac{1}{\kappa^{(2)}}\frac{K_0'(\kappa^{(2)}r_1)}{K_0(\kappa^{(2)}r_1)}, \tag{37}$$

где введены обозначения

$$\kappa^{(1)}=\sqrt{\varepsilon\mu_0\omega^2-k_z^2},\quad \kappa^{(2)}=\sqrt{k_z^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\,. \tag{38}$$

Критические частоты H_{0m}-волны определяем из условия $\kappa^{(2)}=0$. Отсюда, используя формулы (37) и (38), получаем

$$\omega_{0m}^{H}=\frac{\nu_{0m}}{r_1\sqrt{(\varepsilon-\varepsilon_0)\mu_0}}, \tag{39}$$

$$k_{0m}^{H} = \frac{\nu_{0m}}{r_1\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}}. \tag{40}$$

Видим, что, несмотря на различие дисперсионных уравнений (23) и (37), критические частоты для H_{0m}- и E_{0m}-волн совпадают.

23. Представление электромагнитного поля с помощью двух скалярных функций

Решая электродинамические задачи в цилиндрической системе координат, мы сначала решали уравнение Гельмгольца для z-составляющих электрического и магнитного полей, а затем полученные решения использовали для нахождения остальных компонент волны с помощью уравнений Максвелла. В общем случае, когда ни один из ортов криволинейной системы координат не является константой, а зависит от координат (как в сферической системе), то ни одна из составляющих электромагнитного поля не обязана быть решением уравнения Гельмгольца. Это видно из формулы (10.22) для оператора Лапласа в криволинейной системе координат. Однако в ряде случаев, как будет показано ниже, все компоненты электромагнитного поля могут быть выражены через две вспомогательные скалярные функции, удовлетворяющие определенному уравнению.

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд

$$\mathrm{rot}\ \vec{\mathbf{E}} = i\mu\omega\,\vec{\mathbf{H}}, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{\mathbf{H}} = -i\tilde{\varepsilon}\omega\,\vec{\mathbf{E}} \tag{2}$$

запишем в правой ортогональной криволинейной системе координат x_1, x_2, x_3. Применяя формулу (10.20) для ротора в криволинейной системе, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3E_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2E_2) = i\mu\omega\, h_2h_3H_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1E_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3E_3) = i\mu\omega\, h_3h_1H_2, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2E_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1E_1) = i\mu\omega\, h_1h_2H_3, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3H_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2H_2)=-i\tilde{\varepsilon}\omega\, h_2h_3E_1, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1H_1)-\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3H_3)=-i\tilde{\varepsilon}\omega\, h_3h_1E_2, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2H_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1H_1)=-i\tilde{\varepsilon}\omega\, h_1h_2E_3. \tag{8}$$

В ряде случаев все 6 компонент поля, входящих в уравнения (3)–(8), можно выразить через две вспомогательных функции U и V. Это возможно, если уравнения (3)–(8) допускают решения электрического и магнитного типов. Тогда функция U однозначно определяет электромагнитное поле электрического типа, а функция V – поле магнитного типа.

Решением электрического типа будем считать решение с $E_3\neq 0$ и $H_3=0$, а решением магнитного типа – решение с $E_3=0$ и $H_3\neq 0$. Для решения электрического типа из (5) следует соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2E_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1E_1)=0. \tag{9}$$

Это означает, что составляющие E_1, E_2 можно представить в виде

$$E_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}U', \quad E_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}U'. \tag{10}$$

В этом легко убедиться, подставив (10) в (9).

Далее, подставляя (10) в (6) и (7), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2H_2)=i\tilde{\varepsilon}\omega\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}U', \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1H_1)=-i\tilde{\varepsilon}\omega\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}U'. \tag{12}$$

Система уравнений (11) и (12) легко решается в случае, когда

$$h_3=1, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)=0. \tag{13}$$

Полагая

$$U'=\frac{\partial}{\partial x_3}U, \tag{14}$$

где U – некая новая функция, находим

$$H_2 = \frac{i\widetilde{\varepsilon}\omega}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}U, \tag{15}$$

$$H_1 = -\frac{i\widetilde{\varepsilon}\omega}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}U. \tag{16}$$

Подставляя (14) в (10), переписываем выражения для поперечных компонент электрического поля:

$$E_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}U, \tag{17}$$

$$E_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}U. \tag{18}$$

Формулу для продольной компоненты электрического поля получим, подставив (15)–(16) в (8):

$$E_3 = -\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}U\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}U\right)\right]. \tag{19}$$

Получим теперь уравнение для самой функции U. Для этого обратимся к оставшимся уравнениям (3) и (4). Подставим в них выражения (15)–(19):

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}U\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}U\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}U + \widetilde{\varepsilon}\,\mu\,\omega^2 U\right\} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}U\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}U\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}U + \widetilde{\varepsilon}\,\mu\,\omega^2 U\right\} = 0. \tag{21}$$

Очевидно, что соотношения (20) и (21) будут выполняться одновременно, если значение выражения в фигурных скобках равно нулю, то есть когда функция U есть решение уравнения

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}U\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}U\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}U + \widetilde{\varepsilon}\,\mu\,\omega^2 U = 0. \tag{22}$$

Аналогичные формулы для волн магнитного типа проще всего получить из формул для волн электрического типа, если воспользоваться симметрией уравнений Максвелла (1), (2) относительно замены

$$\vec{\mathbf{E}} \to \vec{\mathbf{H}}, \quad \vec{\mathbf{H}} \to -\vec{\mathbf{E}}, \quad \tilde{\varepsilon} \to \mu, \quad \mu \to \tilde{\varepsilon}. \tag{23}$$

Итак, произведя замену (23), а также $U \to V$ в формулах (15)–(19) и (22), получаем искомые формулы для волн магнитного типа:

$$E_2 = -\frac{i\mu\omega}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}V, \tag{24}$$

$$E_1 = \frac{i\mu\omega}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}V, \tag{25}$$

$$H_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}V, \tag{26}$$

$$H_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}V, \tag{27}$$

$$H_3 = -\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}V\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}V\right)\right], \tag{28}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}V\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}V\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}V + \tilde{\varepsilon}\,\mu\,\omega^2 V = 0. \tag{29}$$

Подчеркнем, что полученные формулы, выражающие компоненты электромагнитных полей через две вспомогательные функции U и V, справедливы только при выполнении условий (13). Если эти условия не выполняются, то метод разделения волн на электрический и магнитный тип не применим.

Условия (13) всегда выполняются, если координата x_3 криволинейной системы совпадает с декартовой координатой z. В сферической системе координат условия (13) выполняются, если в качестве координаты x_3 выбрать координату r.

24. Полиномы Лежандра

Уравнением Лежандра называется уравнение вида

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}y\right] + \lambda y = 0, \tag{1}$$

где λ – некоторый параметр. В этом дифференциальном уравнении коэффициент при старшей производной обращается в нуль в точках $x = \pm 1$. Такие

точки называют *особыми*. Найдем значения параметра λ, при которых в промежутке $[-1,1]$ существует нетривиальное решение уравнения (1), ограниченное в особых точках $x=\pm 1$.

Решение уравнения Лежандра (1) будем искать в виде степенного ряда

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-2na_n+\lambda a_n\right]x^n=0\,. \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-\left[n(n+1)-\lambda\right]a_n=0 \tag{4}$$

или

$$a_{n+2}=\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n\,. \tag{5}$$

Коэффициенты a_0 и a_1 остаются произвольными. При $a_0\neq 0$ и $a_1=0$ получим частное решение, содержащее только четные степени x, а при $a_0=0$ и $a_1\neq 0$ получим частное решение, содержащее только нечетные степени x.

При $\lambda=n(n+1)$ уравнение (1), как видно из (5), имеет решение в виде многочлена степени n, которое ограничено в особых точках $x=\pm 1$. Найдем теперь многочлены степени n, являющиеся решениями уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}y\right]+n(n+1)y=0\,. \tag{6}$$

Рассмотрим многочлен степени $2n$:

$$z=(x^2-1)^n. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что этот многочлен удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(x^2-1\right)\frac{dz}{dx}-2nx\,z=0\,. \tag{8}$$

Продифференцируем $n-1$ раз по x обе части этого уравнения. Тогда получим

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^n z}{dx^n}+n\left(n+1\right)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}=0\,. \tag{9}$$

Если продифференцируем еще раз по x, то найдем, что $\dfrac{d^n z}{dx^n}$ удовлетворяет уравнению (6).

Итак, уравнение (6) имеет решение

$$y = C\frac{d^n z}{dx^n} = C\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n, \tag{10}$$

где C – постоянная. Полагая $C = \dfrac{1}{2^n n!}$, получим

$$y = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Это и есть *полиномы Лежандра*, которые являются решениями уравнения (1) при $\lambda = n(n+1)$. Формула (11) называется *формулой Родрига*.

Вычислив по формуле (11), получим

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \quad P_3(x) = \tfrac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) \text{ и т. д.}$$

Отметим некоторые свойства полиномов Лежандра.

1. Полином Лежандра n-й степени есть функция той же четности, что и n:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

2. В нуле полином принимает значения:

$$P_{2n-1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

3. В особых точках полином принимает значения:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

4. Все корни полинома Лежандра вещественны, различны и лежат в интервале (–1, 1).

25. Ортогональность полиномов Лежандра

Докажем, что полиномы Лежандра различных порядков ортогональны в интервале $(-1, 1)$. Напишем уравнения для двух различных полиномов Лежандра ($m \neq n$):

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right]+\lambda_m P_m(x)=0\,, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right]+\lambda_n P_n(x)=0\,. \tag{2}$$

Умножим первое уравнение на $P_n(x)$, а второе уравнение на $P_m(x)$. Затем вычтем из первого уравнения второе и проинтегрируем по x в промежутке $(-1, 1)$. Получим

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda_m-\lambda_n\right)\int_{-1}^{1}P_n(x)\,P_m(x)\,dx=\\
&=\int_{-1}^{1}\left\{P_m(x)\frac{d}{dx}\left[(1\text{-}x^2)\,P_n'(x)\right]-P_n(x)\frac{d}{dx}\left[(1\text{-}x^2)\,P_m'(x)\right]\right\}dx=\\
&=\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left\{(1\text{-}x^2)\left[P_m(x)P_n'(x)-P_n(x)P_m'(x)\right]\right\}dx=\\
&=\left[(1-x^2)\left(P_m(x)P_n'(x)-P_n(x)P_m'(x)\right)\right]_{x=-1}^{x=1}=0.
\end{aligned}$$

Итак, при $m\neq n$

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=0\,, \tag{3}$$

то есть полиномы Лежандра *ортогональны* в интервале $(-1, 1)$.

Вычислим квадрат нормы полиномов Лежандра

$$J_n=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx\,.$$

Пользуясь формулой Родрига (24.11), перепишем интеграл в виде

$$J_n=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}dx\,.$$

Интегрируя n раз по частям и принимая во внимание, что каждый раз внеинтегральный член равен нулю, получим

$$J_n=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\,dx$$

или

$$J_n=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx\,.$$

Известно, что

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx=(-1)^n 2\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)},$$

и предыдущая формула окончательно дает

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом, мы имеем

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим теперь разложение произвольной функции $f(x)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x). \tag{5}$$

Коэффициенты a_n этого разложения могут быть определены на основании свойств ортогональности полиномов Лежандра. Действительно, умножая (5) на $P_m(x)$ и интегрируя по отрезку $[-1,1]$, получим

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,P_n(x)\,dx. \tag{6}$$

Полиномы Лежандра образуют на отрезке $[-1,1]$ полную систему. Это следует из того, что любой многочлен $Q_n(x)$ степени n можно представить в виде линейной комбинации полиномов Лежандра порядков от 0 до n.

26. Важные формулы для полиномов Лежандра

Отметим, что помимо формулы Родрига (24.11), полиномы Лежандра могут быть также представлены интегралами. Существует *интегральная формула Шлэфли*

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{(z^2-1)^n}{2^n(z-x)^{n+1}}\,dz, \tag{1}$$

где L – произвольный контур, охватывающий точку x. Доказательство этой формулы базируется на теореме о вычетах из курса теории функций комплексного переменного.

Из формулы Шлэфли можно получить *формулу Лапласа*

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi\,. \tag{2}$$

Приведем следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{cases}(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \quad (n=1,2,\ldots)\\ P_1(x)-xP_0(x)=0,\end{cases} \tag{3}$$

$$P_n(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}-2x\frac{dP_n(x)}{dx}, \tag{4}$$

$$nP_n(x)=x\frac{dP_n(x)}{dx}-\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}, \tag{5}$$

$$(2n+1)\,P_n(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}-\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}. \tag{6}$$

Последняя формула справедлива и при $n=0$, если положить $dP_{-1}(x)/dx=0$. Из формулы (6) следует

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\,P_k(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_n(x)}{dx}. \tag{7}$$

Приведем еще одну важную формулу

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,z^n & \text{при } |z|<1,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{P_n(x)}{z^{n+1}} & \text{при } |z|>1,\end{cases} \qquad (-1\le x\le 1). \tag{8}$$

Функцию $1\Big/\sqrt{1-2xz+z^2}$ называют *производящей функцией* для полиномов Лежандра.

27. Сферические функции

Сферические функции широко используются в математической физике. Они возникают в уравнениях, содержащих оператор Лапласа, когда последний записывают в сферической системе координат.

Рассмотрим простейшее уравнение, содержащее оператор Лапласа

$$\Delta U=0. \tag{1}$$

Оно является предельным случаем уравнения Гельмгольца при $k = 0$. Так как параметр k пропорционален частоте ω, то уравнение Лапласа описывает электростатические и магнитостатические поля.

Произведем разделение переменных в уравнении (1) по формуле

$$U = R(r)\, Y(\theta, \varphi). \tag{2}$$

Подставляя (2) в уравнение (1), получаем

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr} R \right) - \lambda R = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y + \lambda Y = 0, \tag{4}$$

где λ – постоянная разделения. Функции $Y(\theta,\varphi)$, удовлетворяющие уравнению (4) получили название *сферических функций*.

Решение уравнения (4) также будем искать методом разделения переменных. Подстановкой

$$Y(\theta, \varphi) = P(\theta)\, \Phi(\varphi) \tag{5}$$

уравнение в частных производных (4) приведем к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi_m + m^2 \Phi_m = 0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} P \right) + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] P = 0. \tag{7}$$

Однозначные непрерывные периодические решения уравнения (6) получаются только при целых значениях константы m. Каждому такому значению отвечает решение

$$\Phi_m(\varphi) = \cos m\varphi, \qquad \Phi_m(\varphi) = \sin m\varphi, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Займемся уравнением (7). Подстановкой

$$z = \cos\theta \tag{9}$$

приведем его к виду

$$\frac{d}{dz}\left[(1 - z^2) \frac{d}{d\, z} P \right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] P = 0. \tag{10}$$

Сделаем в уравнении (10) новую подстановку:

$$P(z) = (1 - z^2)^{m/2} y. \tag{11}$$

Тогда функция $y(z)$ будет удовлетворять уравнению

$$\left(1 - z^2\right)\frac{d^2}{dz^2} y - 2(m+1) z \frac{d}{dz} y + \left[\lambda - m(m+1)\right] y = 0. \tag{12}$$

Чтобы найти его решения, обратимся к уравнению Лежандра

$$\frac{d}{d z}\left[(1 - z^2)\frac{d}{dz} P_n\right] + n\,(n+1)\,P_n = 0. \tag{13}$$

Продифференцируем его m раз по z. Воспользовавшись *формулой Лейбница*

$$\frac{d^n}{d\,z^n}\left[f_1(z) f_2(z)\right] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k f_1(z)}{d\,z^k} \frac{d^{n-k} f_2(z)}{d\,z^{n-k}}, \tag{14}$$

где биномиальные коэффициенты

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \tag{15}$$

получаем

$$(1 - z^2)\frac{d^{m+2} P_n}{d\,z^{m+2}} - 2(m+1)\,z \frac{d^{m+1} P_n}{d\,z^{m+1}} + \left[n(n+1) - m(m+1)\right]\frac{d^m P_n}{d\,z^m} = 0. \tag{16}$$

Сравнивая уравнения (16) и (12), видим, что при

$$\lambda = n(n+1) \tag{17}$$

и целых m функции

$$y(z) = \frac{d^m}{dz^m} P_n(z) \tag{18}$$

являются решениями уравнения (12).

Мы ищем функции $Y(\theta,\varphi)$, ограниченные во всем диапазоне углов, в том числе и при $\cos\theta = \pm 1$. Поэтому функции $y(z)$ вместе с функциями $P_n(z)$ должны быть ограничены при $z = \pm 1$. Это возможно только при целых значениях n, так как только в этом случае ограничены решения уравнения Лежандра (13).

Подставляя (18) в (11), находим решения уравнения (10):

$$P_{nm}(z) = \left(1 - z^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z). \tag{19}$$

Возвращаясь от z к переменной θ, получаем искомые решения уравнения (7):

$$P_{nm}(\cos\theta) = \sin^m\theta \ \frac{d^m}{d(\cos\theta)^m} P_n(\cos\theta). \tag{20}$$

Так как полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta)$ представляют собой полиномы степени n от $\cos\theta$, то функции $P_{nm}(\cos\theta)$ также являются полиномами от $\cos\theta$ и $\sin\theta$, причем

$$P_{nm}(\cos\theta) = 0 \ \text{ при } \ m > n. \tag{21}$$

Функции $P_{nm}(\cos\theta)$ получили название *присоединенных функций Лежандра*.

Таким образом, для каждого n мы получили $(n+1)$ частных решений уравнения (7): $P_n(\cos\theta)$, $P_{n1}(\cos\theta)$, … $P_{nn}(\cos\theta)$, соответствующих значениям $m = 0, 1, 2, \ldots$. Комбинируя эти решения с решениями (8), получим $(2n+1)$ сферических функций $Y_{nm}(\theta, \varphi)$:

$$\begin{gathered} P_n(\cos\theta), \quad P_{nm}(\cos\theta)\cos\ m\varphi, \ \ldots\ , \ P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi, \\ \left(m = 1, 2, \ldots, n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\right), \end{gathered} \tag{22}$$

являющихся частными решениями уравнения (4). Эти $(2n+1)$ сферических функций линейно независимы, так как линейно независимы множители $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Функции $P_n(\cos\theta)$ получили название *зональных*, а функции $P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi$ и $P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi$ – *тессеральных* сферических функций.

Таким образом, любую сферическую функцию $Y_n(\theta, \varphi)$ можно представить в виде линейной комбинации найденных линейно независимых решений (22):

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} \left(a_m \cos\ m\varphi + b_m \sin\ m\varphi\right) P_{nm}(\cos\theta), \tag{23}$$

где a_0, a_m, b_m – постоянные.

Вернемся к уравнению (3) для радиальной функции $R(r)$. Для значений λ, выражаемых формулой (17), его решение имеет вид

$$R(r) = A_n r^{\,n} + \frac{B_n}{r^{\,n+1}}, \tag{24}$$

где A_n и B_n – константы. При $A_n = 0$ получаем следующее решение уравнения Лапласа (1), ограниченное в бесконечности

$$U(r,\theta,\varphi) = \frac{Y_n(\theta,\varphi)}{r^{\,n+1}}. \tag{25}$$

Очевидно, что мы исчерпываем все функции $Y_n(\theta,\varphi)$, входящие в решение (25) уравнения Лапласа (1). Поэтому сферические функции $Y_n(\theta,\varphi)$, являющиеся решениями уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Y+n(n+1)Y=0, \tag{26}$$

образуют полную систему функций в интервалах $0\le\theta\le\pi,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi$. Уравнение (26) называют *уравнением сферических функций*.

28. Ортогональность сферических функций

Покажем, что построенные сферические функции ортогональны на поверхности Σ любого шара с центром в начале координат, то есть интеграл от произведения двух различных функций (27.23) по поверхности Σ равен нулю.

Начнем со сферических функций разных порядков. Пусть $Y_k(\theta,\varphi)$ и $Y_m(\theta,\varphi)$ — две такие функции ($k\ne m$). Функции

$$u_k = r^k\,Y_k(\theta,\varphi)\ \text{ и }\ u_m = r^m\,Y_m(\theta,\varphi), \tag{1}$$

как следует из формул (27.2), (27.24), являются решениями уравнения Лапласа (27.1). Они конечны в любой ограниченной области. Функции, являющиеся решениями уравнения Лапласа называют *гармоническими функциями*.

Рассмотрим интеграл

$$I_{km} = \iint\limits_{\Sigma}\left(u_k\frac{\partial u_m}{\partial n}-u_m\frac{\partial u_k}{\partial n}\right)dS. \tag{2}$$

Здесь дифференцирование производится по нормали n к поверхности интегрирования Σ, совпадающей с радиусом r, то есть $\partial/\partial n = \partial/\partial r$. Подставляя (1) в (2), получаем

$$I_{km} = (m-k)\,r^{k+m-1}\iint\limits_{\Sigma}Y_k(\theta,\varphi)\,Y_m(\theta,\varphi)\,dS. \tag{3}$$

С другой стороны, используя *формулу Грина*

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS=\iiint\limits_{V}\left(v\Delta u-u\Delta v\right)dV\,, \tag{4}$$

изучаемую в теории кратных интегралов, и свойства функций (1), выражаемые формулой (27.1), имеем

$$I_{km}=0. \tag{5}$$

Сопоставляя (3) и (5) и учитывая неравенство $k\neq m$, получаем условие ортогональности

$$\iint\limits_{\Sigma} Y_k(\theta,\varphi)\,Y_m(\theta,\varphi)\,dS=0\,. \tag{6}$$

В случае функций одного порядка ($k=m$) ортогональность функций (27.22) возникает как следствие ортогональности множителей

$$1,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \sin 2\varphi,\ \ldots,\ \cos n\varphi,\ \sin n\varphi$$

в интервале $(0,2\pi)$.

Приведем без вывода значения интегралов от квадратов сферических функций

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}\left[P_n(\cos\theta)\right]^2 dS=\frac{4\pi r^2}{2n+1},\\ &\iint\limits_{\Sigma}\left[P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi\,\right]^2 dS=\\ &=\iint\limits_{\Sigma}\left[P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi\,\right]^2 dS=\frac{2\pi r^2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!},\end{aligned} \tag{7}$$

где r – радиус сферической поверхности Σ.

Из формул (7) следует, что в разложении в ряд

$$f(\theta,\varphi)=a_{00}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_{n0}P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}\left(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi\right)P_{nm}(\cos\theta)\right\} \tag{8}$$

произвольной функции $f(\theta,\varphi)$ коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}a_{n0}&=\frac{2n+1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma} f(\theta,\varphi)\,P_n(\cos\theta)\,dS,\\ a_{nm}&=\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint\limits_{\Sigma} f(\theta,\varphi)\,P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi\;\,dS,\\ b_{nm}&=\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint\limits_{\Sigma} f(\theta,\varphi)\,P_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi\;\,dS.\end{aligned} \tag{9}$$

29. Электромагнитные волны в сферической системе координат

Найдем возможные типы электромагнитных волн в сферической системе координат:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{1}$$

Параметры Ламе в этой системе (см. (10.30) выражаются функциями

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\sin\theta. \tag{2}$$

Решение будем искать в виде суперпозиции полей электрического и магнитного типа, компоненты которых (см. (23.15)–(23.19), (23.24)–(23.28) выражаются через функции U и V формулами:

$$E_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}U + \frac{i\mu\omega}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}V, \tag{3}$$

$$E_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}U - \frac{i\mu\omega}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}V, \tag{4}$$

$$H_1 = -\frac{i\tilde{\varepsilon}\omega}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}U + \frac{1}{h_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}V, \tag{5}$$

$$H_2 = \frac{i\tilde{\varepsilon}\omega}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}U + \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}V, \tag{6}$$

$$E_3 = -\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}U\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}U\right)\right], \tag{7}$$

$$H_3 = -\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}V\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}V\right)\right]. \tag{8}$$

При этом функции U и V удовлетворяют (см. (23.22) и (23.29) уравнениям

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}U\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}U\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}U + \tilde{\varepsilon}\mu\omega^2 U = 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}V\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}V\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}V + \tilde{\varepsilon}\mu\omega^2 V = 0. \tag{10}$$

Так как формулы (3)–(10) получены при условии, $h_3 = 1$, а согласно (2) $h_r = 1$, то координаты пронумеруем в следующем порядке

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = r. \tag{11}$$

Учитывая (2) и (11), формулы (3)–(10) перепишем в виде

$$E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial r}U + \frac{iZ_c k}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}V, \tag{12}$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}U - \frac{iZ_c k}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V, \tag{13}$$

$$H_\theta = \frac{-ik}{r\sin\theta\, Z_c}\frac{\partial}{\partial\varphi}U + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}V, \tag{14}$$

$$H_\varphi = \frac{ik}{rZ_c}\frac{\partial}{\partial\theta}U + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial r}V, \tag{15}$$

$$E_r = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right]U, \tag{16}$$

$$H_r = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right]V, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}U + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}U\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}U\right)\right] + k^2U = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}V + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}V\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}V\right)\right] + k^2V = 0, \tag{19}$$

где $k^2 = \tilde{\varepsilon}\,\mu\,\omega^2$, $Z_c = \sqrt{\mu/\tilde{\varepsilon}}$. В формулах (16) и (17) были учтены уравнения (18) и (19). Заметим, что уравнения (18) и (19) не являются уравнением Гельмгольца. Однако подстановкой

$$U = r\,\bar{U}, \quad V = r\,\bar{V} \tag{20}$$

уравнения (18) и (19), благодаря соотношению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\bar{U}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\bar{U}\right),$$

приводятся к уравнению Гельмгольца

$$\Delta\overline{U} + k^2\overline{U} = 0, \tag{21}$$

$$\Delta\overline{V} + k^2\overline{V} = 0, \tag{22}$$

где оператор Лапласа в сферической системе координат (см. (10.38) имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{23}$$

Функции $\overline{U}$ и $\overline{V}$ получили название *потенциалов Дебая*.

Уравнения Гельмгольца (21) и (22), записанные в сферической системе координат, будем решать методом разделения переменных. Поэтому искомые функции представим в виде

$$\overline{U}, \overline{V} = R(r)\,Y(\theta,\varphi). \tag{24}$$

После подстановки (24) в (21) и (22) получаем

$$\left[\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R\right) + k^2r^2\right] + \frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Y\right] = 0. \tag{25}$$

Здесь первое слагаемое в левой части зависит только от координаты *r*, а последнее – только от θ и φ. Поэтому равенство может удовлетворяться при всех *r*, θ и φ только тогда, когда каждое из слагаемых постоянно, то есть

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R\right) + k^2r^2 = \lambda, \tag{26}$$

$$\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Y\right] = -\lambda, \tag{27}$$

где λ – постоянная разделения. Отсюда получаем два уравнения:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R\right) + \left(k^2r^2 - \lambda\right)R = 0, \tag{28}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Y + \lambda Y = 0. \tag{29}$$

Таким образом, уравнение Гельмгольца (25) для потенциала Дебая, записанное в сферической системе координат, мы свели к обыкновенному

дифференциальному уравнению (28) для радиальной функции $R(r)$ и к уравнению в частных производных (29) для функции угловых координат $Y(\theta,\varphi)$.

Уравнение (29) нам уже известно. Оно является уравнением для сферических функций. При $\lambda = n(n+1)$ сферические функции $Y_{nm}(\theta,\varphi)$ ограничены в особых точках $\cos\theta = \pm 1$.

Перейдем к уравнению (28). При $\lambda = n(n+1)$ с помощью подстановки

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} w(r) \tag{30}$$

оно преобразуется в уравнение Бесселя полуцелого порядка ($\nu = n + \frac{1}{2}$):

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \left[k^2 - \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{r^2} \right] w = 0 . \tag{31}$$

Поэтому решения уравнения (28) выражаются через цилиндрические функции полуцелого порядка:

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) . \tag{32}$$

Вместо цилиндрических функций полуцелого порядка $Z_{n+\frac{1}{2}}(x)$ часто используют функции

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Z_{n+\frac{1}{2}}(x) , \tag{33}$$

которые называют *сферическими функциями Бесселя*. Эти функции удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 z_n}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dz_n}{dx} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] z_n = 0 . \tag{34}$$

Сферические функции Бесселя, как и цилиндрические функции, могут быть четырех родов. Их обозначают теми же буквами, что и цилиндрические, но только не прописными, а строчными (маленькими). Эти функции выражаются через элементарные функции формулами:

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x},\quad h_0^{(1)}(x)=-\frac{i\mathrm{e}^{ix}}{x},\quad h_0^{(2)}(x)=\frac{i\mathrm{e}^{-ix}}{x},$$
$$j_{-1}(x)=\frac{\cos\ x}{x},\quad h_{-1}^{(1)}(x)=\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x},\qquad h_{-1}^{(2)}(x)=\frac{\mathrm{e}^{-ix}}{x},\tag{35}$$

$$j_n(x)=x^n\left(\frac{-1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\frac{\sin x}{x},\ n_n(x)=(-1)^{n+1}j_{-n-1}(x)\ \ (n=1,2,...),\tag{36}$$

$$z_{n-1}(x)=\frac{n+1}{x}z_n(x)+\frac{d}{dx}z_n(x),\quad z_{n+1}(x)=\frac{n}{x}z_n(x)-\frac{d}{dx}z_n(x).\tag{37}$$

Поведение сферических функций $j_n(x)$, $n_n(x)$, $h_0^{(1)}(x)$, $h_0^{(2)}(x)$ в нуле и в бесконечности подобно поведению функций $J_n(x)$, $N_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$.

Итак, учитывая формулы (24), (32) и (33), получаем частные решения для потенциалов Дебая:

$$\overline{U},\overline{V}=z_n(kr)\,P_{nm}(\cos\theta)\cos\ (m\varphi+\psi_m).\tag{38}$$

30. Сферический резонатор

Сферическую полость в проводящем материале называют *сферическим резонатором*. Найдем возможные типы электромагнитных колебаний в таком резонаторе. Пусть его радиус $r=r_1$. Граничные условия для тангенциальных компонент электрического поля имеют вид

$$E_\theta|_{r=r_1}=E_\varphi|_{r=r_1}=0.\tag{1}$$

Подставляя (29.12), (29.13) и (29.20) в (1), получаем граничные условия для потенциалов Дебая:

$$\frac{\partial}{\partial r}\overline{U}+\frac{\overline{U}}{r}=0,\tag{2}$$

$$\overline{V}=0.\tag{3}$$

Подставим теперь частные решения (29.38) для потенциалов Дебая в граничные условия (2) и (3):

$$k_l r_1 z_n'(k_l r_1)+z_n(k_l r_1)=0,\tag{4}$$

$$z_n(k_l r_1)=0,\tag{5}$$

где $l = 1, 2, 3, \ldots$ – порядковые номера решений. Из выражений (29.35)–(29.37) видно, что сферические функции третьего и четвертого рода $h_n^{(1)}$ и $h_n^{(2)}$ не имеют нулей и потому они не могут удовлетворять граничным условиям (4) и (5). Нули имеют только сферические функции первого и второго рода j_n и n_n. Однако функции n_n подобно функциям Неймана N_n обращаются в бесконечность при $r \to 0$. Поэтому из всех сферических функций выбираем j_n. В результате уравнения (4) и (5) принимают окончательный вид:

$$k_l r_1 \; j_n'(k_l r_1) + j_n(k_l r_1) = 0, \tag{6}$$

$$j_n(k_l r_1) = 0. \tag{7}$$

Уравнение (6) определяет волновые числа k_l и, следовательно, резонансные частоты ω_l для колебаний электрического типа. Уравнение (7) определяет те же величины, но для колебаний магнитного типа.

Полагая

$$\overline{U} = j_n(k_l r)\, P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi + \psi_m), \tag{8}$$

запишем компоненты полей для колебаний электрического типа ($U \neq 0$, $V = 0$):

$$E_\theta = \frac{k_l}{r} j_n'(k_l r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi + \psi_m), \tag{9}$$

$$E_\varphi = -m \frac{k_l}{r} j_n'(k_l r) \frac{1}{\sin\theta} P_{nm}(\cos\theta) \sin(m\varphi + \psi_m), \tag{10}$$

$$H_\theta = \frac{mi}{Z_c} \frac{k_l}{r} j_n(k_l r) \frac{1}{\sin\theta} P_{nm}(\cos\theta) \sin(m\varphi + \psi_m), \tag{11}$$

$$H_\varphi = \frac{i}{Z_c} \frac{k_l}{r} j_n(k_l r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi + \psi_m), \tag{12}$$

$$E_r = k^2 \left[j_n''(k_l r) + j_n(k_l r) \right] P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi + \psi_m), \tag{13}$$

$$H_r = 0. \tag{14}$$

Полагая

$$\overline{V} = j_n(k_l r)\, P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi + \psi_m), \tag{15}$$

аналогичным образом можно получить компоненты полей для колебаний магнитного типа ($U=0,\ V\neq 0$).

31. Распространение тепла в неограниченном стержне

До сих пор мы рассматривали решение задач, которые описываются уравнениями в частных производных гиперболического типа. Перейдем теперь к решению задач, описываемых дифференциальными уравнениями параболического типа.

Рассмотрим решение задачи Коши о распространении тепла в *неограниченном однородном стержне*, боковая поверхность которого теплоизолирована. Эта задача формулируется следующим образом.

Найти ограниченную функцию $u(x,t)$ ($t\geq 0$, $-\infty<x<\infty$), удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (t>0,\ -\infty<x<\infty) \tag{1}$$

и начальному условию

$$u|_{t=0}=\varphi(x)\qquad (-\infty<x<\infty)\,. \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ – непрерывная ограниченная функция.

Найдем сначала частные решения вида

$$u=T(t)X(x). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0,\qquad X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \tag{4}$$

где λ^2 – постоянная разделения.

Согласно (3), (4), получим частное решение

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right], \tag{5}$$

справедливое при любом значении параметра λ. Общее решение уравнения (1) будет иметь вид

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda\,. \tag{6}$$

Выберем $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ так, чтобы выполнялось начальное условие (2). Подставляя (6) в (2), получаем

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right] d\lambda . \tag{7}$$

С другой стороны, выразим функцию $\varphi(x)$ через ее интеграл Фурье:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\cos\lambda(x'-x)\,dx' = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\lambda x \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\cos\lambda x'\,dx' + \sin\lambda x \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\sin\lambda x'\,dx'\right] d\lambda .\end{aligned} \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), находим

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\cos\lambda x'\,dx', \quad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\sin\lambda x'\,dx' . \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), получаем:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\ \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x'-x)\,dx' = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\ \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x'-x)\,dx' .\end{aligned} \tag{10}$$

Изменив порядок интегрирования, получаем:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\left[\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x'-x)\,d\lambda\right]dx' . \tag{11}$$

Внутренний интеграл можно вычислить. Действительно, положим

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \quad \lambda(x'-x) = \mu\, z . \tag{12}$$

Откуда

$$d\lambda = \frac{dz}{a\sqrt{t}}, \quad \mu = \frac{x'-x}{a\sqrt{t}} .$$

Поэтому

$$\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x'-x)\,d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\cos\mu\, z\ dz \equiv \frac{1}{a\sqrt{t}}J(\mu) . \tag{13}$$

Дифференцируя интеграл $J(\mu)$ по параметру μ, найдем, что

$$J'(\mu) = -\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\, z\sin\mu\, z\ dz .$$

Интегрируя теперь по частям, получаем

$$J'(\mu) = -\frac{\mu}{2}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos \mu z\, dz = -\frac{\mu}{2}J(\mu).$$

Отсюда

$$J(\mu) = C\, e^{-\frac{\mu^2}{4}}.$$

Чтобы найти постоянную C, полагаем здесь $\mu = 0$. Это дает

$$C = J(0) = \int_0^\infty e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Поэтому

$$J(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\mu^2}{4}}$$

и, в силу (13),

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos \lambda(x'-x)\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4a^2 t}}. \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (11), получаем искомое решение задачи

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x')}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4a^2 t}}\, dx'. \qquad (15)$$

Нетрудно видеть, что функция

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4a^2 t}} \qquad (16)$$

является решением уравнения (1). Функцию (16) называют *фундаментальным решением* уравнения теплопроводности (1).

Убедимся, что полученное решение (15) удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \varphi(x). \qquad (17)$$

Для этого введем новую переменную интегрирования

$$\beta = \frac{x'-x}{2a}.$$

Произведя выкладки

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+2a\beta)}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\beta^2}{t}} d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+2a\beta) \left[\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2\beta^2} \right] d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+2a\beta)\, \delta(\beta)\, d\beta = \varphi(x),$$

убеждаемся в справедливости равенства (15). Здесь мы учли одно из представлений для дельта-функции:

$$\delta(\beta) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2\beta^2}.$$

Выясним *физический* смысл фундаментального решения (16) уравнения теплопроводности (1). Пусть функция начального распределения температуры

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0 & \text{при } |x - x_0| \le h, \\ 0 & \text{при } |x - x_0| > h. \end{cases} \tag{18}$$

Физически можно представить, что участку длиной $2h$ сообщили количество тепла $Q = 2hSc_v u_0$, где S – поперечное сечение стержня, c_v – объемная удельная теплоемкость.

В последующие моменты времени распределение температуры, согласно формуле (15), будет иметь вид

$$u(x,t) = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4a^2 t}} dx' =$$

$$= \frac{Q}{2hSc_v} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4a^2 t}} dx'. \tag{19}$$

Если теперь мы будем уменьшать h до нуля, а количество тепла Q сохранять прежним, то придем к понятию *мгновенного точечного источника тепла* Q, *помещенного в момент времени* $t = 0$ *в точке* $x = x_0$. От действия такого источника тепла в стержне получается распределение температуры

$$u(x,t)=\frac{Q}{2S\,c_v\,a\sqrt{\pi t}}\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}\mathrm{e}^{-\frac{(x'-x)^2}{4a^2t}}\,dx'. \tag{20}$$

Используя теорему о среднем

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f(x_1),\quad \text{где } (a<x_1<b)\ , \tag{21}$$

выражение (20) приводим к виду

$$u(x,t)=\frac{Q}{S\,c_v}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}\ . \tag{22}$$

Таким образом, фундаментальное решение (16) дает распределение температуры, вызываемое мгновенным точечным источником тепла $Q=Sc_v$, помещенным в начальный момент $t=0$ в точке $x=x_0$ стержня.

32. Распространение тепла в полуограниченном стержне

Рассмотрим задачу о распространении тепла в полуограниченном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована. Пусть конец $x=0$ поддерживается при заданной температуре, которая может изменяться с течением времени. Тогда задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (t>0,\ 0<x<\infty) \tag{1}$$

при граничном условии

$$u|_{x=0}=\psi(t)\qquad (t>0) \tag{2}$$

и начальном условии

$$u|_{t=0}=\varphi(x)\qquad (x\geq 0). \tag{3}$$

Решение задачи будем искать в виде суммы:

$$u=v+w, \tag{4}$$

где v и w – решения следующих задач:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad v\big|_{x=0}=0,\quad v\big|_{t=0}=\varphi(x), \tag{5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad w\big|_{x=0} = \psi(t), \qquad w\big|_{t=0} = 0. \tag{6}$$

Решим сначала задачу (5). Решение этой задачи может быть получено из решения (31.15), найденного для неограниченного стержня. Для этого формулу (31.15) перепишем в виде

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[\varphi(x') \mathrm{e}^{-\frac{(x'-x)^2}{4a^2 t}} + \varphi(-x') \mathrm{e}^{-\frac{(x'+x)^2}{4a^2 t}} \right] dx'. \tag{7}$$

Решение (7) будет удовлетворять граничному условию, если функцию $\varphi(x)$ доопределим следующим образом:

$$\varphi(x) = -\varphi(-x), \qquad (x < 0). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получим решение задачи (5):

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(x') \left[\mathrm{e}^{-\frac{(x'-x)^2}{4a^2 t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x'+x)^2}{4a^2 t}} \right] dx'. \tag{9}$$

В случае, когда начальная температура постоянна, то есть

$$v|_{t=0} = \varphi(x) = v_0, \tag{10}$$

решение (9) принимает вид

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{v_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-\frac{(x'-x)^2}{4a^2 t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x'+x)^2}{4a^2 t}} \right] dx' = \\ &= v_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} \mathrm{e}^{-\alpha^2} \, d\alpha = v_0 \, \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha^2} \, d\alpha \tag{12}$$

– специальная функция, называемая *функцией ошибок*, или *интегралом вероятностей*.

Перейдем теперь к решению задачи (6). Начнем с частного случая $\psi(t) = 1$. Видно, что функция

$$w(x,t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \tag{13}$$

будет решением задачи (6) для этого частного случая.

Пусть теперь температура ψ на конце стержня поддерживалась до момента времени τ равной нулю, а затем равной единице. Решение для этого случая обозначим через $w_\tau(x,t)$. Очевидно, что до момента времени $t = \tau$ будет $w_\tau = 0$. После же этого момента времени функция w_τ совпадет с решением (13), если в нем заменить t на $t - \tau$. Это дает нам

$$w_\tau(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le t \le \tau \\ 1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) & \text{при } t \ge \tau. \end{cases} \tag{14}$$

Если же в промежутке времени от τ до $\tau + d\tau$ поддерживать температуру $\psi = 1$, а все остальное время — $\psi = 0$, то распределение температуры вдоль стержня будет следующим

$$w(x,t) = w_\tau(x,t) - w_{\tau+\Delta\tau}(x,t). \tag{15}$$

Действительно, каждая из функций удовлетворяет дифференциальному уравнению, а их разность удовлетворяет начальному и граничному условиям.

При малой продолжительности $d\tau$ формулу (15) можно записать как

$$w(x,t) = -\frac{\partial w_\tau}{\partial \tau} d\tau. \tag{16}$$

Если же в промежутке времени от τ до $\tau + d\tau$ на границе стержня поддерживать температуру $\psi(\tau)$, а не 1, то распределение температуры будет

$$w(x,t) = -\psi(\tau)\frac{\partial w_\tau}{\partial \tau} d\tau. \tag{17}$$

Ясно, что если поддерживать температуру на границе стержня при всех значениях τ от 0 до t, то полный эффект мы получим, сложив все эффекты (17). Поэтому распределение температуры будет

$$w(x,t) = -\int_0^t \psi(\tau)\frac{\partial w_\tau}{\partial \tau} d\tau. \tag{18}$$

Учитывая (14) и (12), окончательно получим

$$w(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau. \tag{19}$$

Введем вместо τ новую переменную интегрирования

$$z=\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}.$$

Тогда формулу (19) перепишем в виде

$$w(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\psi\left(t+\frac{x^2}{4a^2z^2}\right)\mathrm{e}^{-z^2}\,dz. \tag{20}$$

При $x=0$ мы получим

$$w(0,t)=\psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\,dz=\psi(t),$$

то есть решение (20) удовлетворяет граничному условию (2).

33. Распространение тепла в ограниченном стержне

1. Рассмотрим распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре. Задача состоит в отыскании решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=0,\qquad u|_{x=l}=0 \tag{2}$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0}=\varphi(x). \tag{3}$$

Согласно методу Фурье решение ищем в виде

$$u=T(t)X(x). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), получаем два уравнения:

$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0, \tag{5}$$

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0. \tag{6}$$

Решения уравнения (6), удовлетворяющие граничному условию (2), имеют вид

$$X(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{7}$$

При этом постоянная разделения принимает значения

$$\lambda_n = n\pi/l. \tag{8}$$

Значениям $\lambda = \lambda_n$ соответствуют решения уравнения (5):

$$T_n(t) = A_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}. \tag{9}$$

Итак, все функции

$$u_n(x, t) = A_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10}$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) при любых постоянных A_n. Поэтому решение задачи запишем в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{11}$$

Требуя выполнения начального условия (3), получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{12}$$

Написанный ряд представляет собой разложение заданной функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам в промежутке от 0 до l. Его коэффициенты определяются по известной формуле

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx. \tag{13}$$

2. Рассмотрим распространение тепла в стержне, концы которого находятся при заданных переменных температурах. Эта задача сводится к решению уравнения теплопроводности (1) при граничных условиях

$$u|_{x=0} = \psi_1(t), \qquad u|_{x=l} = \psi_2(t) \tag{14}$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{15}$$

Решение ищем в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{16}$$

где

$$T_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{17}$$

Интегрируя два раза по частям, получим

$$T_n(t)=\frac{2}{n\pi}\Big[u(0,t)-(-1)^n u(l,t)\Big]-\frac{2l}{n^2\pi^2}\int_0^l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{18}$$

Так как $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (14), то

$$T_n(t)=\frac{2}{n\pi}\Big[\psi_1(t)-(-1)^n\psi_2(t)\Big]-\frac{2l}{n^2\pi^2a^2}\int_0^l\frac{\partial u}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{19}$$

Дифференцируя теперь выражение (17) по t, получим

$$\frac{dT_n(t)}{dt}=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{\partial u}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{20}$$

Исключая интеграл из равенств (19) и (20), получаем следующее уравнение для определения коэффициентов $T_n(t)$:

$$\frac{dT_n(t)}{dt}+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=\frac{2n\pi a^2}{l^2}\Big[\psi_1(t)-(-1)^n\psi_2(t)\Big]. \tag{21}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\left[C_n+\frac{2n\pi a^2}{l^2}\int_0^t\mathrm{e}^{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\tau}\Big(\psi_1(\tau)-(-1)^n\psi_2(\tau)\Big)d\tau\right], \tag{22}$$

где, очевидно, $C_n=T_n(0)$. Чтобы удовлетворить начальному условию (15), требуем выполнения равенства

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x)$$

и, следовательно,

$$C_n=T_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{23}$$

Таким образом, решением задачи (1), (14)–(15) будет ряд (16), где $T_n(t)$ определяются равенствами (22) и (23).

34. Интегральные преобразования

Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ есть функция n переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Преобразование

$$\bar{f}(x_1,\ldots,x_{j-1},\bar{x},x_{j+1},\ldots,x_n)= \\ =\int_a^b f(x_1,\ldots,x_{j-1},x,x_{j+1},\ldots,x_n)\,K(\bar{x},x)\,\rho(x)\,dx, \tag{1}$$

по которому функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ставится в соответствие функция $\bar{f}(x_1,\ldots,x_{j-1},\bar{x},x_{j+1},\ldots,x_n)$, называют *интегральным преобразованием по переменной* $x=x_j$. Переменную x называют *переменной преобразования*. Интегральное преобразование (1) определяется *пределами преобразования* a и b, *ядром* $K(\bar{x},x)$ и *весовой функцией* $\rho(x)$. Пределы a и b могут быть бесконечными. Свойства функций $K(\bar{x},x)$ и $\rho(x)$ будут установлены ниже. Функцию $\bar{f}$ называют *интегральным преобразованием*, а также *изображением*, *трансформантой* или *образом* функции f. Функцию f часто называют *оригиналом* или *прообразом функции* $\bar{f}$.

Преобразование, которым функция $\bar{f}$ снова преобразуется в функцию f, называют *обратным* интегральному преобразованию (1). При этом само преобразование (1) называют *прямым*.

Для практического применения интегральных преобразований важно, чтобы существовали обратные преобразования, устанавливающие *взаимно однозначное соответствие* между функциями f и $\bar{f}$. Идея применения интегральных преобразований состоит в том, чтобы выбором подходящего преобразования заменить дифференциальное уравнение на алгебраическое. Затем, найдя решение преобразованной задачи, с помощью обратного преобразования получить решение исходной задачи.

Приведем часто встречающиеся интегральные преобразования.

1. *Синус-преобразование Фурье* и обратное ему преобразование задаются формулами

$$\bar{f}(\bar{x}) = \int_0^\infty f(x) \sin(\bar{x}x)\, dx, \tag{2}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{f}(\bar{x}) \sin(\bar{x}x)\, d\bar{x}. \tag{3}$$

2. *Косинус-преобразование Фурье* и обратное ему преобразование задаются формулами

$$\bar{f}(\bar{x}) = \int_0^\infty f(x) \cos(\bar{x}x)\, dx, \tag{4}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{f}(\bar{x}) \cos(\bar{x}x)\, d\bar{x}. \tag{5}$$

Синус-преобразование и косинус-преобразование Фурье используются для функций $f(x)$, заданных в интервале от 0 до ∞.

3. *Преобразование Фурье* и обратное ему преобразование задаются формулами

$$\bar{f}(\bar{x}) = \int_{-\infty}^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-i\bar{x}x}\, dx, \tag{6}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \bar{f}(\bar{x})\, \mathrm{e}^{i\bar{x}x} d\bar{x}. \tag{7}$$

Преобразование Фурье используется для функций $f(x)$, заданных в интервале от $-\infty$ до ∞.

4. *Преобразование Лапласа* и обратное ему преобразование задаются формулами

$$\bar{f}(\bar{x}) = \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-\bar{x}x}\, dx, \tag{8}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \bar{f}(\bar{x})\, \mathrm{e}^{\bar{x}x} d\bar{x}. \tag{9}$$

Преобразование Лапласа используется для функций $f(x)$, заданных в интервале от 0 до ∞. Формулу обратного преобразования (9), где $r > 0$, называют *формулой обращения Меллина*.

Все четыре приведенные выше интегральные преобразования применимы к дифференциальным уравнениям, содержащим вторую производную по x. Кроме того преобразования Фурье и Лапласа применимы и к дифферен-

циальным уравнениям с постоянными коэффициентами любой степени. Преобразование Лапласа применимо также для исключения первой производной по времени в уравнении теплопроводности.

5. *Преобразование Меллина* и обратное ему преобразование задаются формулами

$$\bar{f}(\bar{x}) = \int_0^\infty f(x)\, x^{\bar{x}-1}\, dx, \tag{10}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \bar{f}(\bar{x})\, x^{-\bar{x}} d\bar{x}. \tag{11}$$

Преобразование Меллина может быть использовано для исключения из дифференциального уравнения выражения вида $x^2 u'' + x u'$.

6. *Преобразование Ханкеля* и обратное ему преобразование задаются формулами

$$\bar{f}(\bar{x}) = \int_0^\infty f(x)\, J_\nu(\bar{x}x)\, x\, dx, \tag{12}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \bar{f}(\bar{x})\, J_\nu(\bar{x}x)\, \bar{x}\, d\bar{x}. \tag{13}$$

35. Применение преобразования Лапласа

1. Задача о токе в электрической цепи, содержащей последовательно соединенные индуктивность, емкость и сопротивление. Требуется найти ток $I(t)$, удовлетворяющий закону Ома

$$L\frac{dI}{dt} + \int_0^t \frac{I}{C} dt + RI = E, \qquad E = const \tag{1}$$

при начальном условии

$$I|_{t \le 0} = 0. \tag{2}$$

Продифференцировав по времени, преобразуем интегро-дифференциальное уравнение (1) в дифференциальное уравнение.

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0. \tag{3}$$

Умножим обе части уравнения (3) на e^{-pt} и проинтегрируем по t от 0 до ∞:

$$L\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-p\,t}\,\frac{d^2 I}{d\,t^2}dt + R\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}\,\frac{dI}{d\,t}dt + \frac{1}{C}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-p\,t}\,I\,dt = 0\,. \tag{4}$$

Интегрируем по частям

$$L\left[\mathrm{e}^{-pt}\,\frac{dI}{dt}\right]_{t=0}^{\infty} + Lp\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}\,\frac{dI}{dt}dt + R\left[\mathrm{e}^{-pt}\,I\right]_{t=0}^{\infty} + Rp\bar{I} + \frac{1}{C}\bar{I} = 0\,, \tag{5}$$

где

$$\bar{I}(p) = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}I(t)\,dt \tag{6}$$

– преобразование Лапласа для функции тока $I(t)$.

Мы имеем начальное условие (2) для тока. Подставив (2) в (1), получаем начальное условие для производной тока

$$\frac{dI}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{E}{L}\,. \tag{7}$$

Подставляя (2) и (7) в (5), получаем

$$-E + Lp\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}\,\frac{dI}{dt}dt + Rp\,\bar{I} + \frac{1}{C}\bar{I} = 0\,. \tag{8}$$

После повторного интегрирования по частям получаем

$$Lp^2\bar{I} + Rp\,\bar{I} + \frac{1}{C}\bar{I} = E\,. \tag{9}$$

Отсюда находим трансформанту Лапласа для тока

$$\bar{I} = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \dfrac{1}{C}}\,. \tag{10}$$

Оригинал функции $\bar{I}(p)$ можно получить, выполнив обратное преобразование Лапласа

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\,\infty}^{r+i\,\infty}\bar{I}(p)\,\mathrm{e}^{pt}dp\,. \tag{11}$$

Однако оригинал проще найти, если обратиться к таблице преобразований Лапласа, имеющейся в справочниках по математике.

$\bar{f}(p)$	$f(t)$
$\dfrac{1}{(p-a)^n}$	$\dfrac{t^{n-1}\mathrm{e}^{at}}{(n-1)!}$
$\dfrac{1}{p^2+a^2}$	$\dfrac{\sin at}{a}$
$\dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-k\sqrt{p}}$	$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{t}}\right)$

Для этого формулу (10) перепишем в виде

$$\bar{I}=\frac{E}{\sqrt{R^2-4L/C}}\left[\frac{1}{p-p_1}-\frac{1}{p-p_2}\right], \tag{12}$$

где

$$p_1=-\frac{R}{2L}\left[1-\sqrt{1-\frac{4L/C}{R^2}}\right], \tag{13}$$

$$p_2=-\frac{R}{2L}\left[1+\sqrt{1-\frac{4L/C}{R^2}}\right]. \tag{14}$$

Тогда, согласно таблице преобразований Лапласа,

$$I(t)=\frac{E}{\sqrt{R^2-4L/C}}\left[\mathrm{e}^{p_1 t}-\mathrm{e}^{p_2 t}\right]. \tag{15}$$

После подстановки в (15) выражений (13) и (14) получаем искомую формулу

$$I(t)=\frac{E}{R}\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\sqrt{1-\frac{4L}{R^2C}}t}}{\sqrt{1-\frac{4L}{R^2C}}}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\frac{1-\sqrt{1-\frac{4L}{R^2C}}}{2}t}. \tag{16}$$

Из формулы (16) видно, что в отсутствие емкости, то есть при $C\to\infty$, решение имеет вид

$$I(t)=\frac{E}{R}\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right]. \tag{17}$$

2. Задача о нагревании полубесконечного тела. Требуется найти распределение температуры $u(x,t)$ для полубесконечного тела, исходная температура которого $u=0$, а его левый конец в точке $x=0$ поддерживается при постоянной температуре u_0. Записываем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad (x>0,\ t>0) \tag{18}$$

и начальные и граничные условия

$$u(x,t)\big|_{t=0}=0, \tag{19}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u_0. \tag{20}$$

Применим преобразование Лапласа по переменной t. Для этого умножим левую и правую части уравнения (18) на e^{-pt} и проинтегрируем по t от 0 до ∞:

$$\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{e}^{-pt}dt=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-pt}dt. \tag{21}$$

После интегрирования по частям получаем

$$p\,\overline{u}=a^2\frac{d^2}{dx^2}\overline{u}, \tag{22}$$

где

$$\overline{u}(x,p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}u(x,t)\,dt. \tag{23}$$

Общее решение уравнения (22) имеет вид

$$\overline{u}=A(p)\,\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+B(p)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \tag{24}$$

Из условия ограниченности решения $\overline{u}$ при $x\to\infty$ следует $A(p)=0$. Для нахождения величины $B(p)$ применим преобразование Лапласа к граничному условию (20):

$$\overline{u}(x,p)\big|_{x=0}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}u_0\,dt=\frac{u_0}{p}. \tag{25}$$

Подставляя решение (24) в граничное условие (25), находим

$$B(p)=\frac{u_0}{p}. \tag{26}$$

Таким образом, трансформанта Лапласа для функции температуры

$$\overline{u}(x,p)=\frac{u_0}{p}\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \tag{27}$$

Из таблицы обратных преобразований Лапласа находим, что

$$\frac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-k\sqrt{p}}\to\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right), \tag{28}$$

где $\operatorname{erfc}(x)$ – дополнительная функция ошибок или дополнительный интеграл вероятностей, определяемый формулой

$$\operatorname{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx. \tag{29}$$

Напомним (см. (32.12), что функцией ошибок или интегралом вероятностей называется функция

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\,dx=1-\operatorname{erfc}(x). \tag{30}$$

Учитывая формулу (28), находим прообраз трансформанты Лапласа

$$u(x,t)=u_0\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{31}$$

Другими словами, формула (31) является решением задачи о нагревании полубесконечного тела.

36. Применение преобразований Фурье

Выясним, в каких случаях следует применять синус-преобразование Фурье, а в каких случаях косинус-преобразование. Интегрируя по частям, вычислим трансформанты Фурье для второй производной для обоих случаев:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \sin\ px\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx=\left[\sin\ px\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}^{\infty}-p\int_0^\infty \cos\ px\,\frac{\partial u}{\partial x}\,dx=\\&=-p\left(\left[\cos\ px\,u\right]_{x=0}^{\infty}+p\int_0^\infty \sin\ px\,u\,dx\right)=pu\big|_{x=0}-p^2\overline{u},\end{aligned} \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \cos px \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \left[\cos px \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0}^{\infty} + p \int_0^\infty \sin px \frac{\partial u}{\partial x} dx =$$
$$= -\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} + p \left(\left[\sin px\, u \right]\Big|_{x=0}^{\infty} - p \int_0^\infty \cos px\, u\, dx \right) = -\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} - p^2 \overline{u} . \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), видим, что синус-преобразование Фурье (34.2) следует использовать при решении *задач Дирихле*, то есть когда задано граничное условие для искомой функции. Косинус-преобразование Фурье (34.4) следует использовать при решении *задач Неймана*, то есть когда задано граничное условие для производной от искомой функции.

1. Задача о нагревании полубесконечного тела, которая была уже решена нами с помощью преобразования Лапласа. На этот раз решим ее с помощью преобразования Фурье. Записываем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0,\ t > 0) \quad (3)$$

и начальные и граничные условия

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = u_0. \quad (5)$$

Применяя синус-преобразование Фурье (34.2) к уравнению (3), получаем

$$\frac{d\overline{u}}{dt} = a^2 p u_0 - a^2 p^2 \overline{u} . \quad (6)$$

Далее производя последовательные выкладки

$$\frac{d\overline{u}}{a^2 p u_0 - a^2 p^2 \overline{u}} = dt,$$
$$\frac{-1}{a^2 p^2} \ln (a^2 p u_0 - a^2 p^2 \overline{u}) = t + C,$$
$$\ln (a^2 p u_0 - a^2 p^2 \overline{u}) = -a^2 p^2 t + C',$$

получаем решение для синус-трансформанты Фурье

$$p^2 \overline{u} = p u_0 + C'' \mathrm{e}^{-a^2 p^2 t} . \quad (7)$$

Используя начальное условие (4), из выражения (7) находим константу

$$C'' = -p u_0 . \quad (8)$$

Итак, окончательно получаем решение для синус-трансформанты Фурье:

$$\overline{u}(p,t)=\frac{u_0}{p}\left[1-\mathrm{e}^{-a^2p^2t}\right]. \tag{9}$$

Обратное синус-преобразование Фурье (34.3) дает искомую функцию температуры

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \overline{u}(p,t)\sin(px)\,dp=u_0\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{10}$$

2. Задача о колебании бесконечной струны. Записываем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\qquad(\infty<x<\infty) \tag{11}$$

вместе с начальными условиями

$$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x), \tag{12}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0. \tag{13}$$

На бесконечном участке применяем комплексное преобразование Фурье

$$\overline{u}(p,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\,\mathrm{e}^{i\,p\,x}dx. \tag{14}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\mathrm{e}^{ipx}dx&=\left[\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{i\,p\,x}\right]_{x=-\infty}^{\infty}-ip\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{i\,p\,x}dx=\\&=-p^2\int_{-\infty}^{\infty}u\,\mathrm{e}^{i\,p\,x}dx=-p^2\overline{u},\end{aligned} \tag{15}$$

уравнение (11) после выполнения преобразования Фурье принимает вид

$$\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}=-p^2v^2u. \tag{16}$$

При интегрировании (15) по частям было учтено, что

$$u\big|_{x=\pm\infty}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pm\infty}=0. \tag{17}$$

Общее решение уравнения (16) имеет вид

$$\bar{u}(p,t) = A(p)\cos pvt + B(p)\sin pvt\,. \tag{18}$$

Учитывая начальные условия (12) и (13), находим функции

$$A(p) = \bar{f}(p)\,, \quad B(p) = 0. \tag{19}$$

После подстановки (19) в решение (18) получаем трансформанту Фурье искомой функции:

$$\bar{u}(p,t) = \bar{f}(p)\cos pvt\,. \tag{20}$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, получаем решение задачи:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(p)\cos pvt\,\mathrm{e}^{-ipx}dp = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x')\left[\frac{\mathrm{e}^{i(vt+x'-x)p}}{2\pi} + \frac{\mathrm{e}^{-i(vt+x-x')p}}{2\pi}\right]dx'\,dp = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x')\left[\delta(vt+x'-x) + \delta(vt+x-x')\right]dx' = \\ &= \frac{1}{2}\left[f(x-vt) + f(x+vt)\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь при вычислении интеграла использовано следующее интегральное представление для дельта-функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ixp}dp\,. \tag{22}$$

3. Задача об остывании стержня с одним теплоизолированным концом и одним излучающим концом. Записываем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l,\ t > 0) \tag{23}$$

граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right]_{x=l} = 0 \tag{24}$$

и начальное условие

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x)\,. \tag{25}$$

Так как в граничном условии (24) для левого конца стержня ($x = 0$) задано значение производной, то используем косинус-преобразование Фурье. До сих пор мы рассматривали задачи, которые решались с помощью интегральных преобразований с бесконечными пределами. В этой задаче будем использовать конечное интегральное преобразование. Выполним его для второй производной искомой функции

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos px\,dx = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos px\right]_0^l + p\left[u\sin px\right]_0^l - p^2\overline{u} = \\ = \frac{\partial u}{\partial x}\cos px\Big|_{x=l} + pu\sin px\Big|_{x=l} - p^2\overline{u}. \tag{26}$$

Видим, что конечное косинус-преобразование Фурье позволяет упростить уравнение (23) лишь в том случае, когда будет выполняться равенство

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + pu\,\mathrm{tg}\,(pl)\right]_{x=l} = 0. \tag{27}$$

Учитывая граничное условие (24), получаем трансцендентное уравнение

$$p\,\mathrm{tg}\,(pl) = h \tag{28}$$

для нахождения всех значений параметра p, обеспечивающих выполнение равенства (27).

Таким образом, уравнение теплопроводности (23) после выполнения конечного косинус-преобразования Фурье принимает вид

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -a^2 p^2 \overline{u}. \tag{29}$$

Оно имеет решение:

$$\overline{u}(p,t) = A(p)\,\mathrm{e}^{-a^2 p^2 t}. \tag{30}$$

Учитывая начальное условие (25), переписываем (30) в виде

$$\overline{u}(p,t) = \bar{f}(p)\,\mathrm{e}^{-a^2 p^2 t}, \tag{31}$$

где

$$\bar{f}(p) = \int_0^l f(x)\cos px\,dx. \tag{32}$$

Получим обратное преобразование для конечного косинус-преобразования Фурье

$$\overline{u}(p,t)=\int_0^l u(x)\cos px\,dx. \tag{33}$$

Для этого сначала докажем ортогональность функций $\cos px$ и $\cos p'x$, когда p и p' являются двумя различными решениями уравнения (28). Вычисляя интеграл по частям

$$\begin{aligned} I\equiv\int_0^l \cos px\cos p'x\,dx&=\left[\frac{1}{p}\sin px\cos p'x\right]_0^l+\frac{p'}{p}\int_0^l \sin px\sin p'x\,dx=\\ &=\frac{1}{p}\sin pl\cos p'l-\left[\frac{p'}{p^2}\cos px\sin p'x\right]_0^l+\frac{p'^2}{p^2}\int_0^l \cos px\cos p'x\,dx, \end{aligned} \tag{34}$$

находим

$$I=\frac{p\,\mathrm{tg}\,pl-p'\,\mathrm{tg}\,pl}{p^2-p'^2}\cos pl\cos p'l. \tag{35}$$

Учитывая уравнение (28), получаем $I=0$, что говорит об ортогональности функций $\cos px$ и $\cos p'x$.

Вычислим теперь норму функции $\cos px$:

$$\begin{aligned} \int_0^l \cos^2 px\,dx&=\frac{1}{2}\int_0^l\left[1+\cos 2px\right]dx=\frac{l}{2}+\frac{1}{4p}\sin 2pl=\\ &=\frac{l}{2}+\frac{1}{2p}\frac{\mathrm{tg}\,pl}{1+\mathrm{tg}^2 pl}. \end{aligned} \tag{36}$$

Учитывая, что p – корень уравнения (28), находим норму

$$\int_0^l \cos^2 px\,dx=\frac{l(p^2+h^2)+h}{2(p^2+h^2)}. \tag{37}$$

Теперь разложим искомую функцию в ряд по $\cos px$:

$$u(x,t)=\sum_p A_p\cos px. \tag{38}$$

Для нахождения коэффициентов разложения A_p умножим левую и правую части выражения (38) на $\cos p'x$, проинтегрируем по x, а затем просуммируем по всем значениям p':

$$\overline{u}(p') = A_{p'} \frac{l(p'^2 + h^2) + h}{2(p'^2 + h^2)}. \tag{39}$$

Подставляя (39) в (38), получаем формулу для обратного интегрального преобразования:

$$u(x,t) = \sum_p \overline{u}(p,t) \frac{2(p^2 + h^2)}{l(p^2 + h^2) + h} \cos px. \tag{40}$$

Учитывая формулу (31) для образа функции, получаем искомое решение задачи:

$$u(x,t) = \sum_p \bar{f}(p)\, \mathrm{e}^{-a^2 p^2 t} \frac{2(p^2 + h^2)}{l(p^2 + h^2) + h} \cos px, \tag{41}$$

где функция $\bar{f}(p)$ есть интеграл, выражаемый формулой (32).

37. Уравнения Лапласа и Пуассона

Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1}$$

и уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -\rho \tag{2}$$

относятся к дифференциальным уравнениям эллиптического типа. Они описывают такие процессы, как стационарное движение несжимаемой жидкости, стационарное распределение температуры, потенциал равновесно распределенных зарядов, распределение электрического потенциала в омическом проводнике при наличии стационарных источников электрического тока. При этом функция ρ описывает соответственно пространственное распределение источников жидкости, источников тепла, плотности зарядов и источников электрического тока.

38. Решения уравнений Лапласа и Пуассона как потенциалы

Будем рассматривать решения уравнений Лапласа и Пуассона как потенциалы зарядов. Начнем с простейшего случая — *потенциала единичного точечного заряда*. Функция объемной плотности такого заряда имеет вид

$$\rho(\vec{\mathbf{r}}) = \delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) = \delta(x - x_1)\,\delta(y - y_1)\,\delta(z - z_1)\,, \tag{1}$$

где $\vec{\mathbf{r}}_1$ – координата точечного заряда. Покажем, что потенциал единичного точечного заряда выражается формулой

$$\varphi_0(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) = \frac{1}{4\pi\left|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1\right|} \equiv \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} \quad (\vec{\mathbf{r}} \neq \vec{\mathbf{r}}_1)\,. \tag{2}$$

Действительно, при $\vec{\mathbf{r}} \neq \vec{\mathbf{r}}_1$ функция плотности (1) обращается в нуль и, следовательно, уравнение Пуассона (37.2) совпадает с уравнением Лапласа (37.1). Для того чтобы убедиться, что выражение (2) удовлетворяет уравнению Лапласа (37.1), продифференцируем его дважды по координате x:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi_0(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) = \frac{2(x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - (z-z_1)^2}{4\pi\left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2\right]^{5/2}}\,. \tag{3}$$

Аналогичное дифференцирование по остальным координатам дает

$$\frac{d^2}{dy^2}\varphi_0(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) = \frac{2(y-y_1)^2 - (x-x_1)^2 - (z-z_1)^2}{4\pi\left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2\right]^{5/2}}, \tag{4}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\varphi_0(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) = \frac{2(z-z_1)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2}{4\pi\left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2\right]^{5/2}}\,. \tag{5}$$

Складывая, левые и правые части уравнений (3)–(5), убеждаемся в том, что потенциал (2) удовлетворяет уравнению Лапласа (37.1).

Покажем, что и при $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_1$ выражение (2) удовлетворяет уравнению Пуассона (37.2). Замечаем, что левая и правая части уравнения (37.2) после подстановки в него выражений (1) и (2) устремляются к бесконечности при $\vec{\mathbf{r}} \to \vec{\mathbf{r}}_1$. Остается доказать правильность выбранного коэффициента $(4\pi)^{-1}$ в формуле (2). Для этого уравнение Пуассона (37.2) проинтегрируем по объему V, ограниченному сферой S_R радиуса R с центром в точке $\vec{\mathbf{r}}_1$:

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{\nabla}\varphi_0)\,dV = -\int_V \rho\,dV\,. \tag{6}$$

Учитывая точечное распределение заряда (1) и используя *интегральную теорему о дивергенции* (*Остроградского-Гаусса*)

$$\int_V \operatorname{div}\vec{\mathbf{F}}\,dV = \int_S F_n dS\,, \tag{7}$$

равенство (6) переписываем в виде

$$\int_{S_R} \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} dS = -1\,. \tag{8}$$

Наконец, подставляя (2) в (8) и учитывая, что $\partial/\partial n = \partial/\partial R$, получаем тождество

$$\int_{S_R} \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{4\pi R}\right) dS = -1, \tag{9}$$

что доказывает правильность коэффициента $(4\pi)^{-1}$ и, следовательно, правильность формулы (2).

Точечные заряды не являются единственными точечными источниками поля. Простейшим точечным источником поля, не имеющим заряда, является *диполь*. Его можно рассматривать как два или несколько близко расположенных зарядов, суммарный заряд которых равен нулю. Диполь характеризуют векторной величиной

$$\vec{\mathbf{p}} = \sum_i q_i \vec{\mathbf{r}}_i\,, \tag{10}$$

называемой *дипольным моментом*, где $\vec{\mathbf{r}}_i$ – радиус-вектор заряда q_i, причем

$$\sum_i q_i = 0\,. \tag{11}$$

Потенциал диполя выражается формулой

$$\varphi_1(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) = -\vec{\mathbf{p}}\,\vec{\nabla}\varphi_0(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) \quad (\vec{\mathbf{r}} \neq \vec{\mathbf{r}}_1)\,. \tag{12}$$

Формула (12) получается из формулы (2) суммированием потенциалов всех точечных зарядов, образующих диполь. Причем при суммировании предполагается, что

$$\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_i)-\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_j)\approx-(\vec{\mathbf{r}}_i-\vec{\mathbf{r}}_j)\frac{\partial\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_j)}{\partial\vec{\mathbf{r}}}. \qquad (13)$$

Потенциал зарядов, расположенных в объеме V с объемной плотностью $\rho(\vec{\mathbf{r}})$, получается интегрированием произведения единичного потенциала точечного заряда $\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')$ на плотность зарядов $\rho(\vec{\mathbf{r}}')$ по всему объему, занимаемому зарядами

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}})=\int_V\rho(\vec{\mathbf{r}}')\,\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}\text{-}\vec{\mathbf{r}}')\,dV'\equiv\int_V\frac{\rho(\vec{\mathbf{r}}')\,dV'}{4\pi\left|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'\right|}. \qquad (14)$$

Потенциал, выражаемый формулой (14), называют *потенциалом объемного распределения зарядов*.

Потенциал зарядов, расположенных на поверхности S с поверхностной плотностью $\rho_s(\vec{\mathbf{r}})$, выражается поверхностным интегралом

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}})=\int_S\rho_s(\vec{\mathbf{r}}')\,\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}\text{-}\vec{\mathbf{r}}')\,dS'\equiv\int_S\frac{\rho_s(\vec{\mathbf{r}}')\,dS'}{4\pi\left|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'\right|}. \qquad (15)$$

Потенциал, выражаемый формулой (15), называют *потенциалом простого* слоя.

Если во всем пространстве объемная плотность зарядов $\rho(\vec{\mathbf{r}}')=0$, а на поверхности S распределены дипольные моменты с поверхностной плотностью $\vec{\mathbf{p}}_s(\vec{\mathbf{r}}')$, то их потенциал выражается формулой

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}})=-\int_S\vec{\mathbf{p}}_s(\vec{\mathbf{r}}')\,\vec{\nabla}\,\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')\,dS'\equiv-\int_S p_s(\vec{\mathbf{r}}')\frac{\partial\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{\partial n}\,dS'. \qquad (16)$$

В формуле (16) учтено, что дипольный момент $\vec{\mathbf{p}}_s(\vec{\mathbf{r}}')$ в каждой точке $\vec{\mathbf{r}}'$ поверхности S направлен вдоль нормали $\vec{\mathbf{n}}$. Потенциал, выражаемый формулой (16), называют *потенциалом двойного слоя*.

Очевидно, что в общем случае потенциал любых зарядов, расположенных в ограниченной области пространства, может быть записан в виде суммы трех потенциалов (14)–(16):

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}})=\int_S\rho_s(\vec{\mathbf{r}}')\,\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}\text{-}\vec{\mathbf{r}}')\,dS'-\int_S p_s(\vec{\mathbf{r}}')\frac{\partial\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}\text{-}\vec{\mathbf{r}}')}{\partial n}\,dS'+\int_V\rho(\vec{\mathbf{r}}')\,\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}\text{-}\vec{\mathbf{r}}')\,dV'. \qquad (17)$$

39. Двумерная теория потенциала. Логарифмический потенциал

В некоторых задачах функция $\varphi(x,y,z)$ не зависит от координаты z. Эти задачи составляют содержание *двумерной теории потенциала*. Очевидно, что функция потенциала $\varphi(x,y,z)$ не будет зависеть от координаты z лишь в том случае, когда и функция плотности зарядов $\rho(x,y,z)$, создающих этот потенциал, не будет зависеть от этой координаты. Отсутствие зависимости $\rho(x,y,z)$ от z означает, что любое распределение зарядов следует рассматривать как множество протяженных вдоль оси z линейных зарядов.

Вычислим потенциал $\Phi_0(x,y)$ *единичного линейного заряда*, то есть линейного заряда, единичная длина которого содержит единичный заряд. Для этого разобьем единичный линейный заряд на бесконечное число точечных зарядов и просуммируем их потенциалы. В результате мы приходим к интегралу

$$\Phi_0(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_1)\,dz_1\,. \tag{1}$$

где x_1 и y_1 – координаты линейного заряда. Подставляя в (1) выражение (38.2) для φ_0 и вводя обозначение $r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$, получаем

$$\begin{aligned}\Phi_0(x,y)&=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dz_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}=\\&=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d(z-z_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}=\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d(z-z_1)}{\sqrt{r^2+(z-z_1)^2}}=\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\ \ln\left((z-z_1)+\sqrt{r^2+(z-z_1)^2}\right)\ \right]_{z-z_1=0}^{\infty}=\infty.\end{aligned}$$

Видим, что интегрирование по бесконечному пределу дает бесконечность. Такой результат у нас получился из-за того, что потенциал, созданный любыми зарядами, определен с точностью до произвольной константы. Действительно, если $\varphi(\vec{\mathbf{r}})$ является решением уравнения Пуассона (37.2), то и

$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) + Const$ также является решением того же уравнения Пуассона. Суммирование этих констант по всем точкам линейного заряда и привело к бесконечности.

Избежать появления бесконечности можно следующим образом. Для этого сначала вычислим потенциал линейного заряда конечной протяженности l в оба направления оси z:

$$\Phi_0^l(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{l} \frac{dz_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi}\left[\ln\left((z_1 - z) + \sqrt{r^2 + (z-z_1)^2} \right) \right]_{z_1 - z = 0}^{l} \equiv \qquad (2)$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi}\ln\frac{l+\sqrt{r^2+l^2}}{2\,l\,r} + \frac{1}{2\pi}\ln 2l\,.$$

Последнее слагаемое в правой части равенства (2) является константой, не зависящей от координат. Поэтому эту константу можно опустить. Тогда потенциал бесконечного линейного проводника получаем как предел:

$$\Phi_0(x,y) = \lim_{l\to\infty}\left[\Phi_0^l(x,y,z) - \frac{1}{2\pi}\ln 2l \right] \equiv$$

$$\equiv \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{l+\sqrt{r^2+l^2}}{2\,l\,r} \right) \equiv -\frac{\ln(r)}{2\pi}. \qquad (3)$$

Убедимся, что $\Phi_0(x,y)$ при $r \neq 0$ удовлетворяет уравнению Пуассона. Для этого вычислим частные производные

$$\frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial x} = \frac{-1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\ln\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\frac{(x-x_1)}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{(x-x_1)^2-(y-y_1)^2}{\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]^2}, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{-(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]^2}. \qquad (6)$$

Складывая уравнения (5) и (6), убеждаемся, что потенциал $\Phi_0(x,y)$ при $r \neq 0$ является решением двумерного уравнения Пуассона для точечного заряда

$$\frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial y^2} = -\delta(x-x_1)\delta(y-y_1). \qquad (7)$$

Убедимся теперь в том, что уравнение (7) остается справедливым и при $r = 0$. Для этого проинтегрируем правую и левую стороны уравнения (7) по площади S_R круга радиуса R вокруг точки (x_1,y_1):

$$\int\limits_{S_R} \left[\frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial y^2} \right] dS = -\int\limits_{S_R} \delta(x-x_1)\delta(y-y_1)\, dS \ . \qquad (8)$$

Используя теорему о дивергенции на плоскости

$$\int\limits_{S_R} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dS = \oint\limits_{C_R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dC\,, \qquad (9)$$

уравнение (8) приводим к виду

$$\oint\limits_{C_R} \frac{\partial \Phi_0(r)}{\partial r} dC = -1 \ . \qquad (10)$$

Подставляя в (10) выражение (3), приходим к тождеству

$$\frac{-1}{2\pi} \oint\limits_{C_R} \frac{\partial \ln r}{\partial r} dC = -1 \ . \qquad (11)$$

Это доказывает, что потенциал $\Phi_0(r)$, заданный формулой (3), является решением двумерного уравнения Пуассона (7).

В случае, когда линейный заряд распределен по некоторой площади S поперечного сечения с линейной плотностью заряда $\rho_S(x,y)$, потенциал линейных зарядов выражается интегралом

$$\Phi(x,y) = \int\limits_S \rho_S(x_1,y_1)\, \Phi_0(r)\, dS_1 \equiv \frac{-1}{2\pi} \int\limits_S \rho_S(x_1,y_1) \ln \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}\, dS_1 \,. \qquad (12)$$

При распределении линейного заряда по некоторому контуру C поперечного сечения с линейной плотностью заряда $\rho_l(x,y)$ потенциал линейных зарядов выражается интегралом

$$\Phi(x,y) = \int\limits_C \rho_C(x_1,y_1)\, \Phi_0(r)\, dC_1 \equiv \frac{-1}{2\pi} \int\limits_C \rho_l(x_1,y_1) \ln \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}\, dC_1. \qquad (13)$$

1. Применение конформных отображений в теории двумерных потенциалов

В ряде случаев двумерные задачи о *потенциале заряженных проводников* могут быть решены с использованием так называемого конформного отображения. Конформное отображение позволяет выразить решение задачи со сложным поперечным сечением проводников через решение задачи с простым сечением проводников. Дадим сначала понятие конформного отображения.

Пусть положение точки на плоскости двумерной задачи характеризуется координатами x и y. Двум координатам x и y можно поставить в соответствие комплексное число

$$z = x + iy. \tag{1}$$

Очевидно, что для указания положения точки на плоскости вместо двух координат x и y можно использовать одно комплексное число z. Поэтому плоскость с координатами x и y будем называть z-плоскостью.

Рассмотрим плоскость другой задачи. Пусть точка на второй плоскости характеризуется координатами u и v. Координатам второй плоскости поставим в соответствие комплексное число

$$w = u + iv. \tag{2}$$

Поэтому вторую плоскость будем называть w-плоскостью.

Если каждая точка на w-плоскости связана с соответствующей точкой z-плоскости соотношением

$$w = f(z), \tag{3}$$

где $f(z)$ – некая аналитическая функция*, для которой $f'(z) \neq 0$ в каждой точке, то говорят, что функция $f(z)$ осуществляет *конформное отображение* z-плоскости на w-плоскость, то есть такое отображение, при котором угол пересечения любых пересекающихся кривых сохраняется неизменным.

Покажем, что уравнение Лапласа остается инвариантным при преобразовании координат с помощью конформного отображения. Пусть функция

---

* В теории функций комплексного переменного функцию $f(z)$ называют *аналитической* в точке z, если в этой точке эта функция имеет конечную производную $df/dz = \lim_{\Delta z \to 0} \Delta f / \Delta z$, не зависящую от способа стремления Δz к нулю. Функцию $f(z)$ называют *аналитической* в области, если она аналитична во всех точках области.

$\varphi(x,y)$ есть решение двумерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{4}$$

Перейдем от координат x и y к новым координатам u и v с помощью некоего конформного отображения

$$u=\mathrm{Re}f(z), \tag{5}$$

$$v=\mathrm{Im}f(z). \tag{6}$$

Вычисляем заготовки для оператора Лапласа в новой системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}=\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial v}=$$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\mathrm{Im}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial v}=\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=-\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial u}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial v}\right]=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u}+\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial}{\partial v}+\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}=$$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial^2}{\partial v^2}+$$

$$+2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial^2}{\partial v^2}-$$

$$-2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial^2}{\partial v\partial u}-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial u}-\mathrm{Im}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial v}.$$

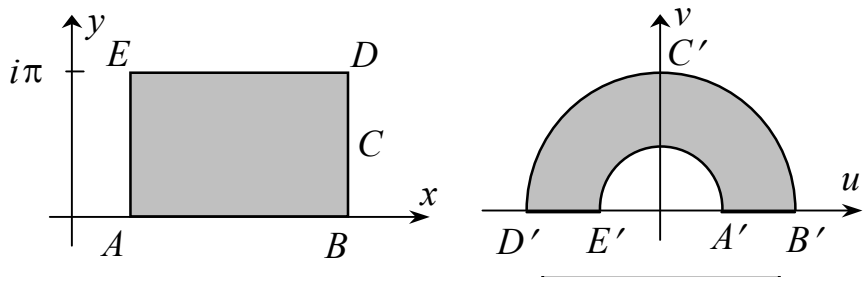
Используя эти заготовки, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right]. \tag{7}$$

Из формулы (7) видно, что если функция $\varphi(x,y)$ является решением уравнения Лапласа (4), то в новой системе координат, получаемой с помощью какого-либо конформного преобразования (5)–(6) с $f'(z)\neq 0$, эта функция будет решением уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=0. \tag{8}$$

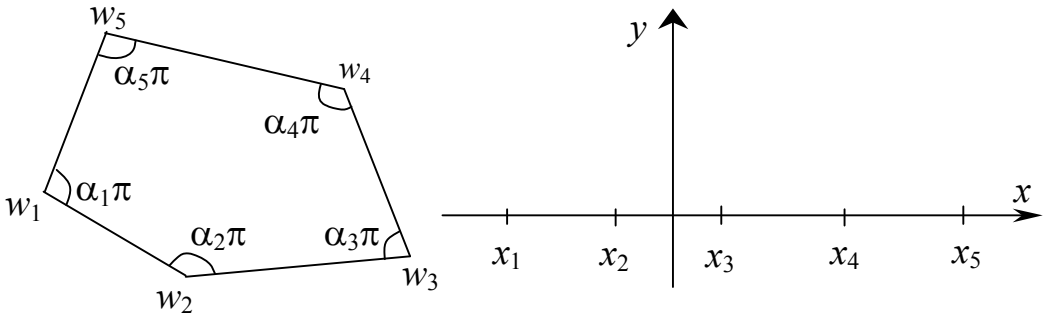
В справочниках по математике имеются таблицы аналитических функций, обеспечивающих конформное преобразование одних плоских геометрических фигур в другие плоские фигуры. Например, функция $f(z)=\mathrm{e}^z$, как показано на рисунке, отображает прямоугольный четырехугольник в полукольцо.



В ряде случаев для нахождения вида функции $f(z)$, обеспечивающей конформное преобразование одной геометрической фигуры в другую, может быть полезной следующая формула:

$$w=f(z)=A\int_{z_0}^{z}(z-x_1)^{\alpha_1-1}(z-x_2)^{\alpha_2-1}\ldots(z-x_n)^{\alpha_n-1}dz+B,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=n-2. \tag{9}$$

Эта формула получила название *интеграла Шварца-Кристоффеля*. Она отображает верхнюю полуплоскость ($y>0$) конформно во внутренность n-угольника в w-плоскости. При этом вершинам многоугольника w_1, w_2, … w_n на w-плоскости соответствуют точки x_1, x_2, … x_n, расположенные на оси x z-плоскости. Параметрам α_1, α_2, … α_n отвечают внутренние углы многоугольника $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, … $\alpha_n\pi$.



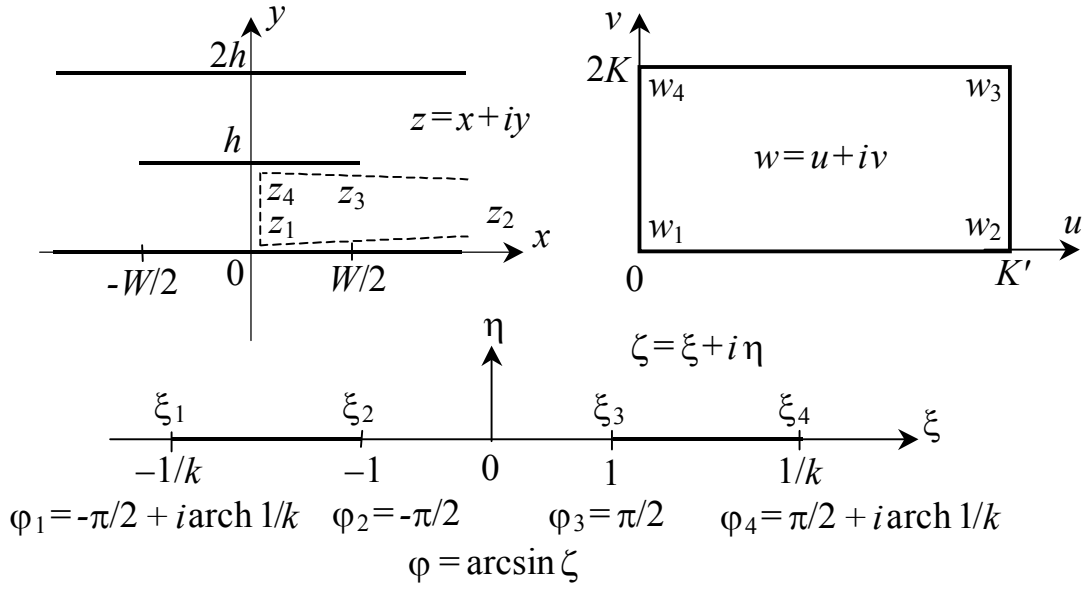
Для каждого данного многоугольника в w-плоскости три точки из точек x_j могут быть выбраны произвольно; остальные точки x_j и параметры A и B определяются единственным образом. Если одной из вершин многоугольника соответствует бесконечно удаленная точка, например $x_n = \infty$, то формула (9) приводится к виду

$$w = f(z) = A' \int_{z_0}^{z} (z - x_1')^{\alpha_1 - 1} (z - x_2')^{\alpha_2 - 1} \ldots \; (z - x_{n-1}')^{\alpha_{n-1} - 1} dz + B', \qquad (10)$$

где A' и B' – постоянные параметры, а $x'_1, x'_2, \ldots x'_{n-1}$ – новые точки на оси x.

2. Расчет симметричной полосковой линии

Используя метод конформных отображений, рассчитаем электростатическое поле в воздушной трехпроводной полосковой линии передачи. Поперечное сечение такой линии изображено в левой стороне рисунка. Полосковая линия содержит два параллельных безграничных плоских проводника, между которыми симметрично расположен полосковый проводник шириною W.



Видно, что линия передачи имеет две ортогональные плоскости симметрии. Поэтому достаточно рассмотреть структуру поля, например, лишь в правом нижнем квадранте z-плоскости. Охватим этот квадрант треугольником с вершинами z_1, z_2 и z_4. Стороны этого треугольника изображены штриховыми линиями. Одна из вершин треугольника, z_2, располагается в бесконечности. Отобразим выделенный треугольник на z-плоскости в какой-либо прямоугольник на w-плоскости. Для этого сначала в соответствии с формулой (40.9) отображаем треугольник на верхнюю половину ζ-плоскости:

$$z = A'\int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta+1)\sqrt{\zeta^2 - 1/k^2}} + B' = A \arccos\left(\frac{\zeta k + 1/k}{\zeta + 1}\right) + B. \qquad (1)$$

Константы A и B найдем из условий, что $z(\xi_1)=0$, $z(\xi_2-0)=\infty$, $z(\xi_4)=ih$. После их подстановки в (1) получаем

$$z = -i\frac{h}{\pi}\left[\arccos\left(\frac{\zeta k + 1/k}{\zeta + 1}\right) - \pi\right]. \qquad (2)$$

Совмещая точку $z(\xi_3)$ с точкой $z = W/2 + ih$, расположенной на краю полоскового проводника, находим параметр

$$k = \mathrm{e}^{-\frac{\pi W}{2h}}. \qquad (3)$$

Запишем теперь интеграл Шварца-Кристоффеля, отображающий w-пространство прямоугольника на верхнюю половину ζ-плоскости:

$$w = A'\int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(\zeta^2 - 1/k^2)}} + B' = \\ = A\,F(k, \arcsin\zeta) + B. \qquad (4)$$

Здесь $F(k,\varphi)$ – *неполный эллиптический интеграл Лежандра первого рода*, определяемый формулой

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}. \qquad (5)$$

Параметр k называют *модулем* эллиптического интеграла.

Полным эллиптическим интегралом Лежандра первого рода называют интеграл, определяемый формулой

$$K(k) = F(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (6)$$

Величины

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (7)$$

и k называют *дополнительными модулями*, а величины

$$K' = K(k') \quad (8)$$

и K называют *связанными эллиптическими интегралами первого рода*.

Обращение интеграла $z = F(k, \varphi)$ порождает функцию, называемую *амплитудой*:

$$\varphi = \mathrm{am}\, z. \quad (9)$$

С функцией am связана функция

$$\mathrm{sn}(z, k) = \sin(\mathrm{am}\, z), \quad (10)$$

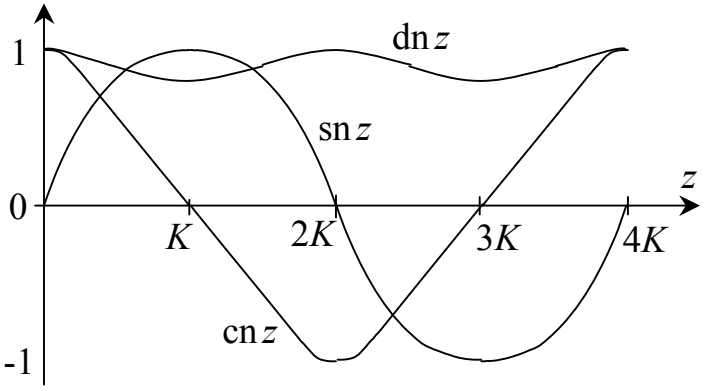
которая называется *синус амплитуды*.

Кроме этих функций используются еще функции

$$\mathrm{cn}(z, k) = \cos(\mathrm{am}\, z), \quad (11)$$

$$\mathrm{dn}(z, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\mathrm{am}\, z)}, \quad (12)$$

которые называют, соответственно, *косинус амплитуды* и *дельта амплитуды*. Функции sn(z,k), cn(z,k) и dn(z,k) называются также *эллиптическими функциями Якоби*.



Эллиптические функции Якоби ($k = 0{,}7$)

Комплексные функции $\mathrm{sn}\,z$, $\mathrm{cn}\,z$ и $\mathrm{dn}\,z$ периодичны. Период функции $\mathrm{sn}\,z$ вдоль вещественной оси равен $4K$, а вдоль мнимой оси равен $i2K'$, то есть

$$\mathrm{sn}(z+4K,k)=\mathrm{sn}(z,k),\qquad \mathrm{sn}(z+i2K',k)=\mathrm{sn}(z,k). \tag{13}$$

Отметим еще одну необходимую нам формулу

$$F(k,\varphi+n\pi)=F(k,\varphi)+2nK\qquad (n=\pm1,\pm2,\ldots). \tag{14}$$

Тригонометрические функции являются частным случаем эллиптических функций Якоби при модуле $k=0$:

$$\mathrm{sn}(z,0)=\sin z,\quad \mathrm{cn}(z,0)=\cos z,\quad \mathrm{dn}(z,0)=1. \tag{15}$$

Гиперболические функции являются частным случаем эллиптических функций Якоби при модуле $k=1$:

$$\mathrm{sn}(z,1)=\mathrm{th}\,z,\quad \mathrm{cn}(z,1)=1/\mathrm{ch}\,z,\quad \mathrm{dn}(z,1)=1/\mathrm{ch}\,z. \tag{16}$$

В математических справочниках значения эллиптических интегралов Лежандра и эллиптических функций Якоби приведены только для “стандартных” значений модуля, находящихся в диапазоне $0\le k\le 1$. Подпрограммы расчета эллиптических интегралов и эллиптических функций включены в математические библиотеки программного обеспечения* также только для “стандартных” значений модуля. В справочниках существуют таблицы формул для приведения функций “нестандартного” модуля к функциям “стандартного” модуля. Приведем одно из них –

$$kF(\psi,k)=F(\dot\psi,\dot k), \tag{17}$$

где

$$\dot k=1/k,\qquad \sin\dot\psi=k\sin\psi. \tag{18}$$

Вернемся к конформному отображению (4). Для нахождения значений параметров A и B необходимо знать значения функции $F(k,\varphi)$ в точках $\varphi_1=\arcsin(-1/k)$, $\varphi_2=\arcsin(-1)$, $\varphi_3=\arcsin(1)$, и $\varphi_4=\arcsin(1/k)$. Очевидно, что

$$F(k,\varphi_2)=-K,\qquad F(k,\varphi_3)=K. \tag{19}$$

Значения функции $F(k,\varphi)$ в остальных точках не столь очевидны. Пусть

$$F(k,\varphi_4)=x. \tag{20}$$

---

* Например, пакет подпрограмм *NAG* и библиотека *IMSL*.

Тогда

$$\sin\varphi_4 = \mathrm{sn}x = 1/k. \tag{21}$$

В справочнике по математике в таблице специальных значений эллиптических функций находим, что

$$\mathrm{sn}(K+iK',k) = 1/k. \tag{22}$$

Сравнивая (20), (21) и (22), получаем

$$F(k,\varphi_4) = K+iK'. \tag{23}$$

Далее, используя формулы (23) и (14), находим

$$F(k,\varphi_1) = F(k,\varphi_4-\pi) = -K+iK'. \tag{24}$$

Так как координаты w_1, w_2, w_3 и w_4 вершин прямоугольника в w-плоскости еще не заданы, то в формуле (4) выберем значение константы $A=1$. Значение константы B выберем таким, чтобы координата вершины $w_1=0$. Учитывая равенства (19), (23) и (24), находим, что высота прямоугольника в w-плоскости равна $2K$, а ширина — K'. При этом формула (4) принимает вид:

$$w = iF(k,\arcsin\zeta) + iK + K'. \tag{25}$$

Обращая формулу (2), выразим теперь переменную ζ через z:

$$\zeta = -\frac{\mathrm{ch}\,(\pi z/h)+1/k}{\mathrm{ch}\,(\pi z/h)+k}. \tag{26}$$

Наконец, после подстановки (26) в (25) находим искомую функцию конформного отображения:

$$f(z) = iF\left(k,\arcsin\left(-\frac{\mathrm{ch}\,(\pi z/h)+1/k}{\mathrm{ch}\,(\pi z/h)+k}\right)\right) + iK + K'. \tag{27}$$

Приступим теперь к решению двумерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{28}$$

полагая, что потенциал нижней и верхней безграничных пластин равен нулю, то есть

$$\varphi(x,y)|_{y=0} = 0, \qquad \varphi(x,y)|_{y=2h} = 0, \tag{29}$$

а потенциал полоскового проводника

$$\varphi(x,y)|_{y=h} = \varphi_0 \qquad (|x| < W/2). \tag{30}$$

Получим сначала решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0 \tag{31}$$

с граничными условиями

$$\varphi(u,v)|_{v=0} = 0, \qquad \varphi(u,v)|_{v=2K} = \varphi_0, \tag{32}$$

которые следуют из условий (29) и (30). Это решение имеет вид

$$\varphi(u,v) = \varphi_0 \frac{v}{2K}. \tag{33}$$

Так как переменные u и v связаны с переменными x и y конформным преобразованием

$$u + iv = f(x + iy), \tag{34}$$

то решение (33) будет и решением уравнения (28).

В формуле (33) выразим переменную v через x и y, используя (34):

$$\varphi(u,v) = \frac{\varphi_0}{2K} \operatorname{Im} f(z). \tag{35}$$

Вычислим вертикальную составляющую электрического поля

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\varphi_0}{2K} \operatorname{Re} f'(z). \tag{36}$$

Найдем теперь поверхностную плотность зарядов. На поверхности проводника поверхностная плотность зарядов связана с нормальной компонентой электрического поля соотношением

$$\varepsilon_0 E_n = \rho_s. \tag{37}$$

Учитывая, что на поверхности полоскового проводника в рассматриваемом октанте поперечного сечения $E_n = -E_y$, получаем поверхностную плотность зарядов

$$\rho_s(x) = \frac{\varepsilon_0 \varphi_0}{2K} \operatorname{Re} f'(z)_{|z=x+ih}. \tag{38}$$

Вычисляем погонную плотность зарядов на всем полосковом проводнике

$$\begin{aligned} \rho_l &= 4 \int_0^{W/2} \rho_s(x)\,dx = 2\frac{\varepsilon_0 \varphi_0}{K} \operatorname{Re} \int_0^{W/2} f'(z)_{|z=x+ih}\,dx = \\ &= 2\frac{\varepsilon_0 \varphi_0}{K} \operatorname{Re}\left[f(z)_{|z=z_3} - f(z)_{|z=z_4} \right] = 2\frac{\varepsilon_0 \varphi_0}{K} K'. \end{aligned} \tag{39}$$

Наконец, вычисляем погонную емкость полоскового проводника

$$C = \frac{\rho_l}{\varphi_0} = \varepsilon_0 \frac{2K'}{K}. \tag{40}$$

Зная погонную емкость C, мы можем рассчитать волновое сопротивление Z воздушной полосковой линии для T-волны. Действительно, согласно общим формулам (16.9), (16.14) и (16.16), фазовая скорость и волновое сопротивление для T-волн в линиях передачи связаны с погонной емкостью C и индуктивностью L формулами

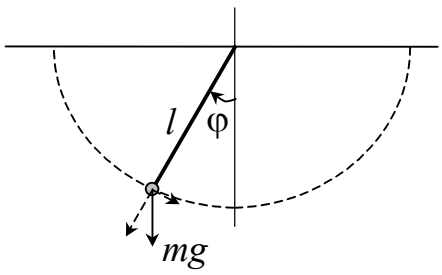
$$v = 1/\sqrt{LC}, \qquad Z = \sqrt{L/C}. \tag{41}$$

В то же время, согласно общей формуле (19.44), фазовая скорость v T-волны в любой воздушной линии передачи равна скорости света c. Отсюда с учетом формул (40) и (41) получаем

$$L = \mu_0 \frac{K}{2K'}, \qquad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{K}{2K'}. \tag{42}$$

3. Колебания маятника

Рассмотрим нелинейные колебания математического маятника при произвольной амплитуде колебания φ_0. Записываем уравнение, выражающее закон сохранения энергии:



$$\frac{m}{2} l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0. \tag{1}$$

Отсюда находим

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2 (\cos\varphi - \cos\varphi_0), \tag{2}$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Извлечем квадратный корень из правой и левой части уравнения (2):

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\omega_0 \sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}, \tag{3}$$

полагая, что $\varphi|_{t=0}=0$ и $t<T/4$, где T – период колебаний. Произведем интегрирование

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=2\omega_0\int_0^t dt\,. \tag{4}$$

Или, вводя обозначение

$$k=1\Big/\sin\frac{\varphi_0}{2}, \tag{5}$$

приходим к уравнению

$$kF(\varphi/2,k)=\omega_0 t. \tag{6}$$

Воспользовавшись тождеством (41.17)–(41.18), перейдем в уравнении (6) к новому эллиптическому интегралу

$$F\left(\arcsin\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\dot{k}}\right),\dot{k}\right)=\omega_0 t\,. \tag{7}$$

со “стандартным” модулем

$$\dot{k}=\sin\frac{\varphi_0}{2}. \tag{8}$$

Так как обратная функция для эллиптического интеграла F есть амплитуда am, то из (7) получаем

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\dot{k}\ \mathrm{sn}\,(\omega_0 t,\dot{k}). \tag{9}$$

Проанализируем формулу (9) для случая малых колебаний, то есть при $|\varphi_0|\ll 1$. В этом случае имеем $\dot{k}\approx\varphi_0/2$ и $\mathrm{sn}\,\omega_0 t\approx\sin\omega_0 t$. Подставляя в (9), получаем известную приближенную формулу для малых колебаний математического маятника

$$\varphi\approx\varphi_0\sin\omega_0 t. \tag{10}$$

Из формулы (9) видно, что период колебания маятника равен периоду функции $\mathrm{sn}\,(\omega_0 t,\dot{k})$. Отсюда, используя формулу (41.13), находим частоту колебания маятника

$$\omega=\frac{\pi}{2K(\dot{k})}\omega_0. \tag{11}$$

Из формул (11) и (8) видно, что с увеличением амплитуды угла отклонения φ_0 от 0 до π частота колебания маятника ω убывает от ω_0 до 0.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.

4. Неганов В. А., Нефедов Е. И., Яровой Г. П. Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайневысоких частот. М.: Педагогика-Пресс, 1998.

5. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.

6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1986.

8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

9. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

#

∇ 3
$\Gamma(\nu)$ 34
$\delta(x)$ 105, 121

A

am 136

C

c 62
$\mathrm{cn}(z,k)$ 136

D

div 4
div grad 4
div rot 4
$\mathrm{dn}(z,k)$ 136

E

$\mathrm{erf}(x)$ 107
$\mathrm{erfc}(x)$ 118

F

$F(k,\varphi)$ 135, 136

G

g 29
g_{ik} 29
grad 3
grad div 4

H

$H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$ 36
$h_0^{(1)}(x), h_0^{(2)}(x)$ 100
h_i 32

I

$I_n(z)$ 77

J

$J_\nu(z)$ 34
$j_n(x)$ 100

K

k 135
k' 136
$K(k)$ 136
k^2 51
$K_n(z)$ 77

N

$N_\nu(z)$ 34
$n_n(x)$ 100

P

$P_n(x)$ 87
$P_{nm}(z)$ 92

R

rot 4
rot grad 4
rot rot 4

S

$\mathrm{sn}(z,k)$ 136

Y

$Y_{nm}(\theta,\varphi)$ 93

Z

$Z_\nu(z)$ 33
$z_n(x)$ 99

А

Аналитическая функция 131
Асимптотическое разложение 36

Б

Биномиальные коэффициенты.....92

В

Волна магнитного типа.....57
Волна основного типа.....60
Волна электрического типа.....57
Волновое сопротивление.....75
Волновое уравнение.....7
Волны высших типов.....60
Вынужденные колебания 20

Г

Гамма-функция.....34
Гармонические функции 94
Гибридная волна.....79
Градиент 3
Граничное условие.....7

Д

Двумерная теория потенциала.. 128
Декартова система координат 28
Дельта-функция.....105, 121
Дивергенция..... 3
Диполь 126
Дипольный момент 126
Дисперсионное уравнение.....68
Дисперсия.....62
Дополнительная функция ошибок 118
Дополнительные модули 136
Дополнительный интеграл вероятностей 118

Е

E-волна.....57
Единичные векторы координатных направлений 3
Единичный линейный заряд 128

З

Задача Дирихле 8
Задача Коши 7
Задача Неймана 8
Задача Штурма-Лиувилля 17
Запаздывающий потенциал..... 45
Зональные сферические функции..... 93

И

Изображение функции 112
Интеграл вероятностей..... 107
Интеграл Шварца-Кристоффеля..... 133
Интегральная теорема о дивергенции 126
Интегральное преобразование.. 112

К

Квазилинейное уравнение..... 5
Колебания отклоненной струны 15
Колебания струны под действием удара..... 16
Комплексная диэлектрическая проницаемость..... 53
Конформное отображение 131
Координатная линия..... 28
Координатная поверхность..... 28
Координатные параметры Ламе. 32
Косинус-преобразование Фурье 113
Краевая задача I рода..... 8
Краевая задача II рода 8
Краевая задача III рода..... 8
Критическая частота..... 59

Л

Лапласиан..... 4
Линейное уравнение..... 5

Линия, свободная от искажений..49
Локальные базисные векторы..... 29
Локальный базис 29

М

Мгновенный точечный источник тепла..... 105
Метод разделения переменных... 12
Метод Фурье 12
Метрический тензор.....29
Модифицированная функция Бесселя 77
Модифицированная функция Ханкеля 77
Модифицированное уравнение Бесселя 77
Модуль эллиптического интеграла 135

Н

Начальное условие 7
H-волна 57
Неоднородное уравнение Гельмгольца 51
Неполный эллиптический интеграл Лежандра первого рода..... 135
Нормированные функции.....18

О

Образ функции..... 112
Обратная волна.....10
Обратное интегральное преобразование 112
Оператор Лапласа Δ 4
Оператор набла ∇ 3
Оригинал интегрального преобразования 112
Ортогональная система координат.....30
Ортогональность функций с весом 18
Особая точка..... 86

П

Полиномы Лежандра 87
Полная система функций 19
Полный эллиптический интеграл Лежандра первого рода 135
Поперечно-магнитная волна..... 57
Поперечно-электрическая волна 57
Поперечно-электромагнитная волна 60
Порядок уравнения 5
Потенциал двойного слоя 127
Потенциал Дебая..... 98
Потенциал единичного точечного заряда..... 125
Потенциал простого слоя..... 127
Правая система координат..... 29
Преобразование Лапласа..... 113
Преобразование Меллина 114
Преобразование Фурье..... 113
Преобразование Ханкеля 114
Присоединенные полиномы Лежандра 93
Производящая функция.....90
Прообраз функции 112
Прямая волна..... 10
Прямое интегральное преобразование.....112

Р

Рекуррентные соотношения..... 35
Рекуррентные формулы 90
Решение Даламбера 10
Ротор..... 4

С

Свободные колебания..... 20
Связанные эллиптические интегралы первого рода.....136
Синус амплитуды.....136

Синус-преобразование Фурье ... 112
Смешанная задача 8
Собственные значения 13, 18
Собственные функции 13, 18
Собственные числа 18
Спектр собственных значений 18
Стационарные волны 55
Сферические функции 91
Сферические функции Бесселя 99

Т

T-волна 60
TE-волна 57
Телеграфное уравнение 48, 50
TEM-волна 60
Тессеральные сферические функции 93
Типы краевых задач 7
TM-волна 57
Трансформанта функции 112

У

Узловые линии 41
Уравнение Бесселя 33
Уравнение Гельмгольца 51
Уравнение гиперболического типа 6
Уравнение Лапласа 6
Уравнение Лежандра 85
Уравнение параболического типа 6
Уравнение Пуассона 6
Уравнение сферических функций 94
Уравнение теплопроводности 7
Уравнение эллиптического типа .. 6
Уравнения Максвелла 52

Ф

Фазовая скорость 62
Физические координаты вектора . 29
Формула Грина 94
Формула Лапласа 90
Формула Лейбница 92
Формула обращения Меллина .. 113
Формула Остроградского-Гаусса 126
Формула Пуассона 41
Формула Родрига 87
Фундаментальное решение уравнения теплопроводности .. 104
Функции Ханкеля 36
Функциональный определитель . 29
Функция амплитуда 136
Функция Бесселя 34
Функция Вебера 34
Функция дельта амплитуды 136
Функция косинус амплитуды ... 136
Функция Макдональда 77
Функция Неймана 34
Функция ошибок 107

Х

Характеристическое сопротивление среды 61

Ц

Цилиндрические волны 43
Цилиндрические функции 33

Ч

Частота отсечки 59

Э

Электродинамические граничные условия 54
Элемент длины дуги 28
Элемент объема 29
Эллиптические функции Якоби 136

Я

Якобиан 29

СОДЕРЖАНИЕ

1. Дифференциальные операторы 3
2. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных 5
3. Классификация краевых задач 7
4. Колебания струны 9
5. Метод Фурье (метод разделения переменных) 12
6. Общая схема метода Фурье. Задача Штурма-Лиувилля 16
7. Вынужденные колебания 19
8. Вынужденные колебания струны с подвижными концами 23
9. Колебания прямоугольной мембраны 25
10. Криволинейные системы координат 28
11. Уравнение Бесселя. Цилиндрические функции 33
12. Свободные колебания круглой мембраны 37
13. Распространение волн в трехмерном безграничном пространстве 41
14. Излучение волн 43
15. Точечный источник 46
16. Телеграфное уравнение 47
17. Уравнение Гельмгольца 50
18. Уравнения Максвелла. Граничные условия 52
19. Волны между идеально проводящими плоскостями 55
20. Волны в круглом волноводе 62
21. Волны в коаксиальной линии 67
22. Волны в диэлектрическом стержне 75
23. Представление электромагнитного поля с помощью двух скалярных функций 82
24. Полиномы Лежандра 85
25. Ортогональность полиномов Лежандра 87
26. Важные формулы для полиномов Лежандра 89
27. Сферические функции 90
28. Ортогональность сферических функций 94
29. Электромагнитные волны в сферической системе координат 96
30. Сферический резонатор 100
31. Распространение тепла в неограниченном стержне 102

32. Распространение тепла в полуограниченном стержне 106
33. Распространение тепла в ограниченном стержне..... 109
34. Интегральные преобразования 112
35. Применение преобразования Лапласа 114
36. Применение преобразований Фурье 118
37. Уравнения Лапласа и Пуассона..... 124
38. Решения уравнений Лапласа и Пуассона как потенциалы 125
39. Двумерная теория потенциала. Логарифмический потенциал 128
40. Применение конформных отображений в теории двумерных потенциалов 131
41. Расчет симметричной полосковой линии..... 134
42. Колебания маятника 140
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ **Ошибка! Закладка не определена**
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ..... 143