УДК 517.956.25+532.51

Дуальная задача к задаче М.А.Гольдштика с произвольной завихренностью

Исаак И. Вайнштейн*

Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет,
Киренского, 26, Красноярск, 660074,
Россия

Получена 18.06.2010, окончательный вариант 25.07.2010, принята к печати 10.08.2010

В работе доказано существование решения дуальной задачи к задаче М.А.Гольдштика с произвольной завихренностью. На модельном примере установлен эффект неединственности решения.

Ключевые слова: вихревые и потенциальные течения, интегральное уравнение, функция Грина, уравнение Лиувилля.

В теории вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости известны две дуальные задачи: в ограниченной плоской области D с границей Γ требуется найти непрерывно дифференцируемые решения уравнений

$$\Delta\Psi = \begin{cases} \omega, & \text{если } \Psi < 0, \\ 0, & \text{если } \Psi > 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$\Delta\Psi = \begin{cases} \omega, & \text{если } \Psi > 0, \\ 0, & \text{если } \Psi < 0 \end{cases} \tag{2}$$

при краевом условии

$$\Psi|_\Gamma = \varphi(s) \geqslant 0, \quad \omega = \mathrm{const} > 0. \tag{3}$$

$\Psi(x, y)$ — функция тока [1–4].

Задача (1),(3) описывает схему отрывных течений М.А.Лаврентьева, согласно которой зона отрыва отделена от внешнего потока нулевой линией тока. Внутри зоны течение полагается вихревым с постоянной завихренностью ω и потенциальным вне зоны [1–4].

Задача (2),(3) описывает модель плоского течения идеальной жидкости в поле кориолисовых сил [2–4]. Модель на расчетном примере, применительно к озеру Байкал, обосновала возможность существования в озере непроточной зоны, что может привести к его существенному загрязнению.

Гармоническая в области D функция $\Psi_0(x, y)$, удовлетворяющая условию (3), положительна в области D и является решением задачи (1),(3). Это решение назовем тривиальным.

В [1] доказано существование нетривиального (с областью отрицательности) решения задачи (1),(2) при достаточно большом значении величины ω. В [3,5] получено неравенство

$$\omega \geqslant \frac{4Ke}{R^2}, \tag{4}$$

при котором существует нетривиальное решение задачи, где R — радиус наибольшего по площади круга, который можно вписать в область D, $K = \max \varphi(s)$.

*isvain@mail.ru

© Siberian Federal University. All rights reserved

В задаче (2),(3) предполагается выполнение неравенства

$$\omega > \min \frac{2\pi\psi_0}{\iint\limits_D G(x,y,\xi,\eta)\ d\xi\ d\eta} = L,$$

где G — функция Грина задачи Дирихле оператора Лапласа для области D. При выполнении неравенства $\omega > L$ область D разбивается на две зоны: проточную, где $\Psi > 0$ и непроточную, где жидкость покоится ($\Psi = 0$). В случае $\omega < L$ непроточная зона отсутствует. Этот случай можно считать тривиальным. В [2] доказано существование и единственность решения задачи (2),(3).

Разницу в свойствах решений дуальных задач можно объяснить разным поведением правых частей уравнений (1),(2). В уравнении (1) правая часть не возрастает, а в (2) — не убывает по Ψ.

В задаче (1),(3) предполагается, что завихренность ω постоянна. В общем случае вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости завихренность является произвольной функцией от функции тока ψ, $\omega = F(\Psi)$ [4].

Рассмотрим дуальные задачи для случая $\omega = F(\Psi) > 0$.

$$\Delta\Psi = \begin{cases} F(\Psi), & \text{если } \Psi < 0, \\ 0, & \text{если } \Psi > 0. \end{cases} \tag{5}$$

$$\Delta\Psi = \begin{cases} F(\Psi), & \text{если } \Psi > 0, \\ 0, & \text{если } \Psi < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Гармоническая функция $\Psi_0(x,y)$, так же как и для задачи (1),(3), является тривиальным решением задачи (5),(3). В [6],[7] получены условия существования нетривиального решения задачи (5),(3). Например, если функция $F(\Psi)$ непрерывно дифференцируема по Ψ и

$$0 < \omega_0 \leqslant F(\Psi) \leqslant M, \tag{7}$$

то при условии

$$\omega_0 \geqslant \frac{4Ke}{R^2}, \tag{8}$$

аналогичному (4), задача (6),(3) имеет отличное от тривиального решение [7].

В работах М.Г.Красносельского, А.В.Покровского, В.Н.Павленко, М.Г.Лепчинского и др. строится теория краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с разрывной нелинейностью относительно решения в правой части уравнения [8]. Важным моментом в этих работах является аппроксимация краевой задачи с разрывной нелинейностью, последовательностью краевых задач с "гладкими" правыми частями. Далее устанавливается сходимость последовательности решений аппроксимирующих краевых задач к решению исходной краевой задачи. Впервые идея такой аппроксимации была рассмотрена в [2–5].

Задачи существования течения по схеме М.А.Лаврентьева в неограниченной области при произвольной завихренности рассматривались в [9–11].

Одной из нерешенных проблем в задаче (1),(3), даже в случае постоянной завихренности, является количество нетривиальных решений.

Рассмотрим задачу (6), (3). Для доказательства существования ее решения рассмотрим последовательность задач

$$\Delta\Psi_n = \operatorname{th}(\Psi_n n)\ F(\Psi_n), \tag{9}$$

$$\Psi_n|_\Gamma = \varphi(s). \tag{10}$$

Граница Γ достаточно гладкая.

Пусть $F(\Psi)$ непрерывно дифференцируема и $F(\Psi) \leqslant M$. При каждом n решение задачи (9),(10) существует [12]. Ее решение не может быть отрицательным ни в одной точке. Если в некоторой точке $\Psi_n < 0$, то найдется подобласть $D' \subset D$, содержащая эту точку, на границе которой $\Psi_n = 0$, а внутри $\Psi_n \leqslant 0$. Учитывая еще, что $\Delta\Psi_n \leqslant 0$ в D', заключаем, что $\Psi_n \equiv 0$ в D'.

Функции Ψ_n удовлетворяют интегральному уравнению

$$\Psi_n = \Psi_0 - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D \operatorname{th}(\Psi_n n)\ F(\Psi_n)\ G(x, y, \xi, \eta)\ d\xi\ d\eta. \tag{11}$$

Из представления (11) и из свойств интеграла типа потенциала вытекает, что последовательность Ψ_n компактна в пространстве $C^1(D)$. Пусть подпоследовательность Ψ_{n_k} сходится к непрерывно дифференцируемой функции Ψ, $\Psi \geqslant 0$.

Следуя [2],[4], покажем, что открытое множество точек B, в которых $\Psi > 0$, является областью, если множество точек γ границы Γ, в которых $\varphi(s) > 0$ связно. Предельная функция Ψ непрерывна вплоть до границы. Следовательно, в окрестности дуги γ найдется область $\beta \subset B$. Предположим, что имеется точка $m_0 \subset B$, которую нельзя соединить с точками области β. Возьмем компоненту $M \subset B$, содержащую точку m_0. Покажем, что во всех точках ее границы $\Psi = 0$. Если в некоторой ее точке m $\Psi > 0$, то $m \in \Gamma$, ибо в противном случае $m \in M$. И тогда точка m_0 может быть соединена с областью $\beta \subset B$ через окрестность точки m. Функция Ψ, как равномерный предел субгармонических функций $\Delta\Psi_{n_k} = \operatorname{th}(\Psi_{n_k} n_k)\ F(\Psi_{n_k} n_k) \geqslant 0$, субгармонична в области M. В силу принципа максимума $\Psi \equiv 0$, что противоречит определению M.

Докажем, что предельная функция Ψ является решением уравнения $\Delta\Psi = F(\Psi)$ в области B. Возьмем произвольно точку $m_0 \subset B$ и круговую окрестность $B_\epsilon \subset B$ точки m_0, в которой, начиная с некоторого номера, $\Psi_{n_k} > 0$. В B_ϵ рассмотрим последовательность задач

$$\Delta V_{n_k} = \operatorname{th}(\Psi_{n_k} n_k) F(\Psi_{n_k}), \tag{12}$$

$$V_{n_k}|_{\Gamma_{B_\epsilon}} = \Psi_{n_k}|_{\Gamma_{B_\epsilon}} > 0. \tag{13}$$

За V_{n_k} возьмем Ψ_{n_k}. $V_{n_k} \to \Psi > 0$. В замкнутой области B_ϵ: $\operatorname{th}(\Psi_{n_k} n_k)\ F(\Psi_{n_k}) \to F(\Psi)$ равномерно, и в уравнении (12) можно перейти к пределу при $n_k \to \infty$. После чего получаем $\Delta\Psi = F(\Psi)$ в B_ϵ.

Получим условие, при котором предельная функция Ψ обращается в ноль в области D. Предположим, что $\Psi > 0$ во всех точках области D. В соответствии с (6)

$$\Psi = \Psi_0 - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D F(\Psi)\ G(x, y, \xi, \eta)\ d\xi\ d\eta. \tag{14}$$

Пусть

$$F(\Psi) \geqslant \omega_0 > 0 \quad \text{для всех } \Psi \geqslant 0. \tag{15}$$

Из (14), (15)

$$\Psi \leqslant \Psi_0 - \frac{\omega_0}{2\pi} \iint\limits_D G(x, y, \xi, \eta)\ d\xi\ d\eta. \tag{16}$$

Отсюда при

$$\omega_0 > \min \frac{2\pi\psi_0}{\iint\limits_D G(x, y, \xi, \eta)\ d\xi\ d\eta}$$

в области D найдутся точки, в которых $\Psi < 0$.

Пусть R — радиус наибольшего по площади круга C_R, который можно вписать в область D (можно считать, что его центр находится в начале координат), и G_R — функция Грина оператора Лапласа для круга C_R задачи Дирихле. Рассмотрим функцию

$$W = \frac{\omega_0}{2\pi}\iint\limits_D G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - \frac{\omega_0}{2\pi}\iint\limits_{C_R} G_R(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

$\Delta W = 0$ внутри круга C_R. На его границе $W \geqslant 0$. Из принципа экстремума для гармонических функций следует, что W>0 внутри C_R. Таким образом, в C_R

$$\frac{\omega_0}{2\pi}\iint\limits_D G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta > \frac{\omega_0}{2\pi}\iint\limits_{C_R} G_R(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Из (16) в C_R

$$\Psi \leqslant K - \frac{\omega_0}{2\pi}\iint\limits_{C_R} G_R(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \quad K = \max\varphi(s). \tag{17}$$

Введем функцию

$$U = K - \frac{\omega_0}{2\pi}\iint\limits_{C_R} G_R(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \quad \Psi \leqslant U. \tag{18}$$

Функция U в круге C_R удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U = \omega_0$ и на его границе равняется константе $K > 0$. Это дает возможность выписать ее в явном виде:

$$U = K + \frac{\omega_0}{4}\,(r^2 - R^2),\ r^2 = x^2 + y^2.$$

Если

$$R^2 - \frac{4K}{\omega_0} \geqslant 0,\ \left(\omega_0 \geqslant \frac{4K}{R^2}\right),$$

то $U \leqslant 0$ в C_{R_1}, $\quad R_1 = \sqrt{R^2 - \frac{4K}{\omega_0}}$. Отсюда и из (18) ($\Psi \leqslant U$) следует, что $\Psi \leqslant 0$ в C_{R_1}. А это противоречит предположению, что Ψ строго больше нуля в C_R.

Таким образом, доказана

Теорема. *Если функция $F(\Psi)$ непрерывно дифференцируема и*

$$0 < F(\Psi) \leqslant M, \tag{19}$$

то задача (6),(3) имеет решение, причем при выполнении неравенств

$$0 < \omega_0 \leqslant F(\Psi)\ \textit{при}\ \Psi > 0, \quad \omega_0 \geqslant \frac{4K}{R^2}, \tag{20}$$

решение обращается в ноль в точках области D.

Рассмотрим модельную задачу: $\omega = F(\Psi) = e^{\lambda\psi}$, D — круг радиуса R и $\varphi(s) = K > 0$. Условия теоремы не выполняются. Имеем

$$\Delta\Psi = \begin{cases} e^{\lambda\psi}, & \text{если } \Psi > 0, \\ 0, & \text{если } \Psi < 0, \end{cases} \tag{21}$$

$$\Psi|_{r=R} = K > 0. \tag{22}$$

Ищем решение задачи, зависящее только от r. В этом случае задачу (21), (22) можно переписать в виде

$$\Delta\Psi = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant r < a, \\ e^{\lambda\Psi}, & \text{если } a < r < R, \end{cases} \tag{23}$$

$$\Psi(R) = K, \Psi(a) = 0, \ \frac{d\Psi(r)}{dr}|_{r=a} = 0. \tag{24}$$

Ищем значение величины a.

Для эллиптического уравнения Лиувилля $\Delta\Psi = e^{\lambda\Psi}$ известны формулы представления решений:

при $\lambda > 0$

$$\Psi = \frac{1}{\lambda}\ \ln\frac{2(v_x^2+v_y^2)}{\lambda\ v^2(x,y)}, \quad \Psi = \frac{1}{\lambda}\ \ln\frac{2(v_x^2+v_y^2)}{\lambda\ \operatorname{sh}^2 v(x,y)}, \quad \Psi = \frac{1}{\lambda}\ \ln\frac{2(v_x^2+v_y^2)}{\lambda\ \sin^2 v(x,y)}, \tag{25}$$

при $\lambda < 0$

$$\Psi = \frac{1}{|\lambda|}\ \ln\frac{|\lambda|\operatorname{ch}^2 v(x,y)}{2(v_x^2+v_y^2)}, \tag{26}$$

$v(x,y)$ — произвольная гармоническая функция [13].

Рассмотрим случай $\lambda < 0$. В этом случае правая часть уравнения $\Delta\Psi = F(\Psi)$ не гарантирует единственность решения задачи Дирихле $\left(\dfrac{dF(\Psi)}{d\Psi} < 0\right)$. Перейдем к $\lambda_1 = -\lambda, \quad \lambda_1 > 0$. Решение задачи ищем в виде

$$\Psi(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant r \leqslant a, \\ \dfrac{1}{\lambda_1}\ \ln\dfrac{\lambda_1\ r^2\ \operatorname{ch}^2(c_1\ \ln r + c_2)}{2c_1^2}, & a \leqslant r \leqslant R. \end{cases} \tag{27}$$

Здесь взяли формулу (26) и за гармоническую функцию $v(r) = c_1 \ln r + c_2$. Удовлетворяем условиям (24):

$$\frac{\lambda_1 R^2 \operatorname{ch}^2(c_1 \ln R + c_2)}{2c_1^2} = e^{\lambda_1 K},\ \frac{\lambda_1 a^2 \operatorname{ch}^2(c_1 \ln a + c_2)}{2c_1^2} = 1,\ 1 + c_1 \operatorname{th}(c_1 \ln a + c_2) = 0. \tag{28}$$

Из второго и третьего уравнения (28)

$$c_1 \ln a + c_2 = \operatorname{arcth}\left(-\frac{1}{c_1}\right) = \frac{1}{2}\ \ln\frac{c_1-1}{c_1+1}, \quad |c_1| > 1, \tag{29}$$

$$\frac{\lambda_1 a^2 \operatorname{ch}^2(\frac{1}{2}\ln\frac{c_1-1}{c_1+1})}{2c_1^2} = 1, \quad \frac{\lambda_1 a^2}{2(c_1^2-1)} = 1, \quad c_1 = \sqrt{1+\frac{\lambda_1 a^2}{2}}. \tag{30}$$

Взяли c_1 со знаком плюс, так как изменение знака на минус не изменяет соотношения (27), (28),(30).

Подставляя $c_1,\ c_2$ из (30),(29) в первое уравнение (28), получаем уравнение для определения величины a.

$$\frac{\lambda_1 R^2 \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{1+\frac{\lambda_1 a^2}{2}}\ \ln\frac{R}{a} + \operatorname{arcth}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda_1 a^2}{2}}}\right)\right)}{2(1+\frac{\lambda_1 a^2}{2})} = e^{\lambda_1 K}. \tag{31}$$

Введем функцию

$$y(a) = \frac{\lambda_1 R^2 \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{1+\frac{\lambda_1 a^2}{2}}\ \ln\frac{R}{a} + \operatorname{arcth}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda_1 a^2}{2}}}\right)\right)}{2(1+\frac{\lambda_1 a^2}{2})}, \quad 0 < a \leqslant R. \tag{32}$$

Имеем

$$\lim_{a\to 0} y(a) = \lim_{a\to 0} \frac{\lambda_1 R^2 \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{1+\frac{\lambda_1 a^2}{2}}\ \ln\frac{R}{a} + \frac{1}{2}\ \ln\frac{\sqrt{1+\frac{\lambda_1 a^2}{2}}-1}{\sqrt{1+\frac{\lambda_1 a^2}{2}}+1}\right)}{2(1+\frac{\lambda_1 a^2}{2})} =$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{\lambda_1 R^2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{R^2}{a^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda_1 a^2}{8}\right)}{2} = \left(\frac{R^2\lambda_1}{8}+1\right)^2 > 1, \quad y(R) = 1. \tag{33}$$

Пусть $M = \max y(a)$, доопределив $y(0) = \left(\frac{R^2\lambda_1}{8}+1\right)^2$. Из вида уравнения (31) следует, что при выполнении неравенства

$$e^{\lambda_1 K} \leqslant M \tag{34}$$

оно имеет решение, и тем самым модельная задача (21),(22) при $\lambda < 0$ имеет решение с двумя различными зонами течения. В одной из них жидкость покоится.

Не проводя тщательного анализа, на конкретных примерах можно увидеть, что задача может иметь несколько решений. Например, при $R = 6, \lambda_1 = 2$ график функции $y(a)$ имеет вид, как на рис. 1. Прямая $y = e^{\lambda_1 K}$ может пересечь кривую $y(a)$ уже в двух точках.

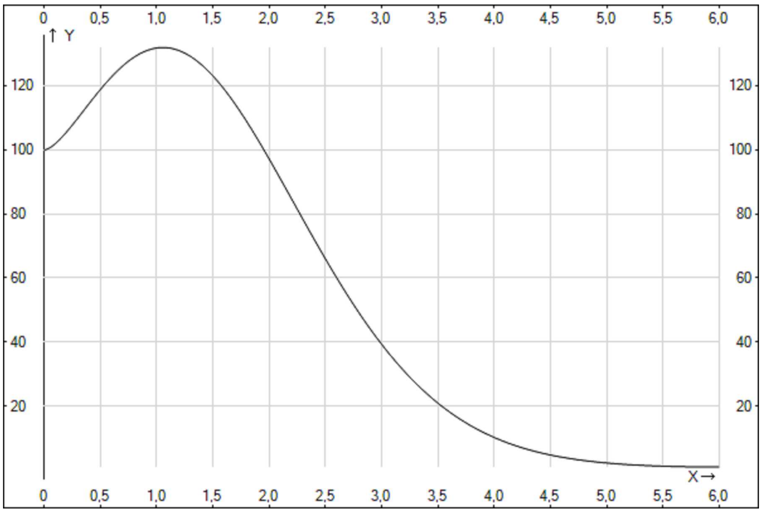

Рис. 1. График функции $y(a)$, $R = 6$, $\lambda = 2$

Список литературы

[1] М.А Гольдштик, Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости, *Докл. АН СССР*, **8**(1962), №6, 1310–1313.

[2] И.И.Вайнштейн, М.А. Гольдштик, О движении идеальной жидкости в поле кориолисовых сил, *Докл. АН СССР*, **6**(1967), №6, 1277–1230.

[3] И.И.Вайнштейн, О движении идеальной жидкости с завихренными зонами, Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Новосибирск, 1972, 12 с.

[4] М.А Гольдштик, Вихревые потоки, Новосибирск, Наука, 1961.

[5] И.И.Вайнштейн, В.К.Юровский, Об одной задаче сопряжения вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости, *Ж. прикл. мех. и техн. физ.*, (1976), №6, 98–100.

[6] И.И.Вайнштейн, П.С.Литвинов, Модель М.А.Лаврентьева о склейке вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости, *Вестник СибГАУ*, **24**(2009), №3, 7–9.

[7] П.С.Литвинов, Математическое моделирование двухслойных потоков в подшипниках скольжения, сепараторах и течениях по схеме М.А.Лаврентьева, Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Красноярск, 2009, 24 с.

[8] М.Г.Лепчинский, Существование и устойчивость краевых задач с разрывными нелинейностями, Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Екатеринбург, 2008, 24 с.

[9] А.Б.Шабат, О двух задачах на склеивание, *Докл. АН СССР*, **150**(1963), №6, 1242–1245.

[10] С.Н.Антонцев, В.Д.Лелюх, *Динамика сплошной среды*, (1969), №1, 131–153.

[11] П.И.Плотников, О разрешимости одного класса задач на склеивание вихревых и потенциальных течений, *Динамика сплошной среды,* (1969), №3, 61–69

[12] Р.Курант, Уравнения с частными производными, М., Наука,1964.

[13] Э.И.Семенов, О новых точных решениях неавтономного уравнения Лиувилля, *Сиб. матем. журн.*, **49**(2008), №1, 207–216.

The Dual Problem to M.A.Goldshtik Problem with Arbitrary Vorticity

Isaak I. Vainshtein

The existence of solutions of the dual problem to M.A.Goldshtik problem with arbitrary vorticity was proved in this paper. The effect of non-uniqueness of the solution was determined on a model example.

Keywords: vortex and potential flows, integral equation, Green function, Liouville equation.