

УДК 512.54

Условия переноса тепла и массы на границе раздела жидкость-газ при диффузионном испарении

Владимир В. Кузнецов*

Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН,
Лаврентьева 15, 630090, Новосибирск,
Новосибирский государственный университет,
Пирогова 2, 630090, Новосибирск,
Россия

Получена 18.01.2010, окончательный вариант 25.03.2010, принята к печати 10.04.2010

Из законов сохранения выведены соотношения, которым удовлетворяют поля температуры, концентрации, скоростей и давлений на границе раздела двух областей, занятых жидкостью и газом. Вещество жидкости может испаряться (конденсироваться) и в состоянии пара переноситься в газовой среде как примесь. Полученные условия отличаются от традиционно используемых тем, что в уравнениях баланса сил и баланса потоков энергии появляются дополнительные члены, отвечающие за те физические явления на границе раздела, которыми обычно пренебрегают, и не всегда обоснованно. Имеются в виду такие эффекты, как динамическое воздействие на жидкость испаряющегося (конденсирующегося) вещества, затраты энергии на деформацию границы, на преодоление поверхностного натяжения и т.п. Само наличие этих явлений на границе раздела сомнений не вызывает. В качестве примера рассмотрена задача испарения шарового слоя жидкости. Проведены примеры расчетов. Отмечено, что дополнительные члены в некоторых условиях могут играть заметную роль при расчете параметров процесса.

Ключевые слова: тепломассообмен на поверхности раздела; концентрация пара; насыщение, жидкий шаровой слой.

Введение

Известно очень большое число работ, в которых рассмотрены задачи, содержащие границы раздела жидкость-пар (см., например, работы [1–6] и цитируемые там источники). Во всех таких работах при построении математических моделей движения и тепломассопереноса на межфазной границе ставятся четыре группы условий: 1) кинематические условия, в записи которых не участвуют ускорения, а только скорости; 2) динамические условия, задающие баланс сил на границе; 3) условие баланса потоков энергии и 4) термодинамические условия. Кинематические условия для несмешивающихся вязких жидкостей записываются в виде "условия прилипания", т.е. непрерывности вектора скорости. При наличии испарения (конденсации) условие прилипания остается справедливым только для касательной составляющей вектора скорости и дополнительно ставится условие сохранения массы. Формулировка кинематических условий проблем не вызывает. Так же обстоит дело и с термодинамическими условиями, если можно допускать локальное термодинамическое равновесие. В этом случае они сводятся к условиям непрерывности на границе раздела температуры и

*kuznetsov@hydro.nsc.ru

© Siberian Federal University. All rights reserved

химического потенциала испаряющегося вещества. В случаях резко неравновесных, "взрывных" процессов используются подходы неравновесной термодинамики или молекулярной физики. Возникающие при этом проблемы выходят за рамки данной работы и здесь обсуждаться не будут. Коснемся балансовых условий для сил и для потоков энергий. В работе [7] они были выведены из законов сохранения для стационарного движения несмешивающихся жидкостей, а в работе [8] было проведено их обобщение на случай нестационарных течений, но тоже при отсутствии переноса вещества через границу раздела. В работе [9] выведено балансовое условие для потоков энергии, исходя из закона сохранения. Но при выводе допущены ошибки, что привело к искажению полученных условий. Так, к части поверхности раздела была применена теорема переноса, которая не выполняется при наличии через поверхность потоков вещества. В других работах, в которых учитывалось испарение (конденсация), авторами из физических соображений вводились в балансовые условия дополнительные члены, отвечающие за те явления, вклад которых представлялся существенным. Как правило, дополнительно учитывался только расход тепла на парообразование, обусловленный изменением удельной внутренней энергии веществ при фазовом переходе и совершаемой при этом работе. Этот подход зачастую был вполне оправдан, т.к. у ряда жидкостей, у воды например, удельный расход тепла на парообразование очень велик. Но тем не менее на границе пар-жидкость имеют место также и другие физические явления и эффекты, для которых весьма затруднительно вычисление их вклада в балансовые соотношения, исходя только из физических соображений. Это динамическое воздействие на жидкость испаряющегося (конденсирующегося) вещества, затраты энергии на деформацию границы, на изменение ее температуры (граница имеет внутреннюю энергию и поэтому обладает теплоемкостью), работа при испарении (конденсации) вещества жидкости вследствие изменения удельного объема, затраты энергии на преодоление поверхностного натяжения, изменение кинетической энергии вещества при фазовых превращениях. При некоторых условиях эти эффекты могут оказывать ощутимое влияние на изучаемые процессы. Поэтому упрощения, основанные на пренебрежении перечисленными выше явлениями, должны обосновываться порядковыми расчетами или оценками.

В данной работе балансовые условия на границе раздела жидкость-газ выведены из законов сохранения массы, импульса и энергии. В полученных соотношениях для каждого слагаемого указано, какому физическому эффекту оно отвечает. Сформулированные условия позволяют, в частности, в конкретных задачах получать оценки вклада в общий баланс того или иного явления и проводить обоснованные упрощения. В качестве примера решена задача об испарении сферического слоя жидкости, ограниченного с одной стороны газом, а с другой — твердой шаровой поверхностью. Первоначально система находится в равновесии, но затем температура твердой поверхности начинает возрастать по заданному закону, достигая своего предельного значения. Для этого процесса в работе сформулирована нестационарная одномерная задача. Проведены численные расчеты, в которых варьировались некоторые безразмерные параметры данной задачи. В частности, рассчитывалось время, за которое жидкий слой испаряется. Установлено, что входящие в баланс энергии члены, связанные с капиллярностью, могут заметно влиять на время испарения слоя.

1. Условия на границе раздела

Введем ряд обозначений (рис. 1). Пусть Γ — движущаяся (вообще говоря) поверхность, разделяющая области, занятые жидкостью и газом, а ω — некоторый произвольный объем, состоящий из непустых подобластей ω_1 , ω_2 , лежащих в жидкой и газовой фазах соответственно. Пусть Σ — часть границы Γ , лежащая внутри объема ω . Через Σ_1 , Σ_2 обозначим границы областей ω_1 , ω_2 , из которых вычтена их общая часть Σ . Внешние нормали к границам Σ_1 , Σ_2 обозначим $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$. Границы областей предполагаются движущимися произвольным образом. Пусть нормаль $\vec{n}$ к границе Γ направлена из жидкости в газ, а через $\vec{n}_\Gamma$ обозначим единичный вектор, ортогональный к границе $\partial\Sigma$ участка границы раздела Σ и лежащий в плоскости, касательной к поверхности Γ .

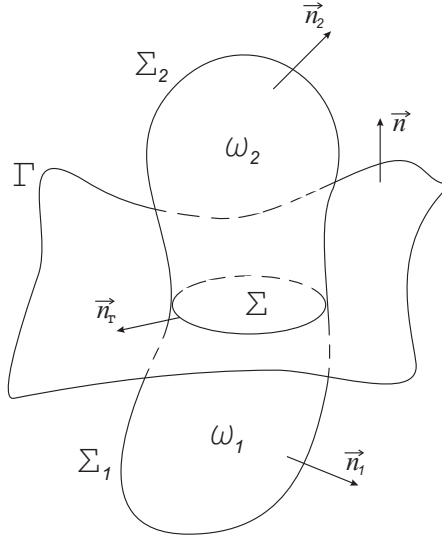


Рис. 1. Схема выделенного объема, векторов и границ

Будем полагать (только для упрощения изложения), что газ не растворим в жидкости, т.е. через границу раздела нет переноса вещества газа:

$$\vec{v}_g \cdot \vec{n} - V_n = 0, \quad (1)$$

и пусть, кроме того, диффузия испарившейся жидкости подчинена закону Фика, согласно которому диффузионный поток вещества $\vec{J}_c$ равен

$$\vec{J}_c = -D\nabla c. \quad (2)$$

Здесь и далее c — массовая концентрация в газе испарившегося вещества жидкости, V_n , V_{n_1} , V_{n_2} , — скорости движения границ Γ , Σ_1 , Σ_2 в направлении своих нормалей $\vec{n}$, $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ соответственно, а ϱ , ϱ_g , $\vec{v}$, $\vec{v}_g$ — плотности и скорости в жидкости и в газе. Будем также считать, что касательная компонента скорости непрерывна на границе раздела (условие прилипания для вязких сред):

$$\vec{v} - \vec{n}(\vec{v} \cdot \vec{n}) = \vec{v}_g - \vec{n}(\vec{v}_g \cdot \vec{n}). \quad (3)$$

Применим к объему ω закон сохранения массы вещества жидкости вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\omega_1} \varrho d\omega + \int_{\omega_2} c d\omega \right] + \int_{\Sigma_1} \varrho(\vec{v} \cdot \vec{n}_1 - V_{n_1}) d\Sigma + \int_{\Sigma_2} c(\vec{v}_g \cdot \vec{n}_2 - V_{n_2}) d\Sigma = - \int_{\Sigma_2} \vec{J}_c \cdot \vec{n}_2 d\Sigma. \quad (4)$$

Если к левой части (4) добавить и отнять от нее одну и ту же величину $\int_{\Sigma} \varrho(\vec{v} \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma + \int_{\Sigma} c(\vec{v}_g \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma$, а к правой части — величину $\int_{\Sigma} \vec{J}_c \cdot \vec{n} d\Sigma$, и применить к каждому из объемов ω_1, ω_2 по отдельности закон сохранения массы, то получим соотношение

$$- \int_{\Sigma} \varrho(\vec{v} \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma + \int_{\Sigma} c(\vec{v}_g \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma = - \int_{\Sigma} \vec{J}_c \cdot \vec{n} d\Sigma. \quad (5)$$

Так как объем ω выбирался произвольно, то и участок поверхности раздела Σ можно считать произвольным. Поэтому из (5) следует условие

$$\varrho(\vec{v} \cdot \vec{n} - V_n) = \vec{J}_c \cdot \vec{n}, \quad (6)$$

и если диффузионный поток задан законом (2), получаем

$$\varrho(\vec{v} \cdot \vec{n} - V_n) = -D \nabla c \cdot \vec{n}. \quad (7)$$

Применим к объему ω закон сохранения количества движения вида

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\omega_1} \varrho \vec{v} d\omega + \int_{\omega_2} (\varrho_g + c) \vec{v}_g d\omega \right] + \int_{\Sigma_1} \varrho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}_1 - V_{n_1}) d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \varrho_g \vec{v}_g(\vec{v}_g \cdot \vec{n}_2 - V_{n_2}) d\Sigma = \\ & = \int_{\omega_1} \varrho \vec{g} d\omega + \int_{\omega_2} (\varrho_g + c) \vec{g}_g d\omega + \int_{\Sigma_1} P \cdot \vec{n}_1 d\Sigma + \int_{\Sigma_2} P_g \cdot \vec{n}_2 d\Sigma + \oint_{\partial \Sigma} \sigma \vec{n}_\Gamma dl - \int_{\Sigma_2} \vec{v}_g(\vec{J}_c \cdot \vec{n}_2) d\Sigma. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $P, P_g, \vec{g}, \vec{g}_g$ — тензоры напряжений и векторы ускорений массовых сил в жидкости и в газе, а σ — коэффициент поверхностного натяжения. Прибавим к левой части (8) и отнимем от нее одну и ту же величину $\int_{\Sigma} \varrho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma + \int_{\Sigma} (\varrho_g + c) \vec{v}_g(\vec{v}_g \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma$, а к правой части — величину $\int_{\Sigma} P \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{\Sigma} P_g \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{\Sigma} \vec{v}_g(\vec{J}_c \cdot \vec{n}_2) d\Sigma$, и применим к каждому из объемов ω_1, ω_2 по отдельности закон сохранения количества движения. Получим соотношение

$$\begin{aligned} & - \int_{\Sigma} \varrho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma + \int_{\Sigma} (\varrho_g + c) \vec{v}_g(\vec{v}_g \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma = \\ & = - \int_{\Sigma} P \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{\Sigma} P_g \cdot \vec{n} d\Sigma + \oint_{\partial \Sigma} \sigma \vec{n}_\Gamma dl - \int_{\Sigma} \vec{v}_g(\vec{J}_c \cdot \vec{n}) d\Sigma \end{aligned} \quad (9)$$

Так как $\oint_{\partial \Sigma} \sigma \vec{n}_\Gamma dl = \int_{\Sigma} \text{div}_\Gamma(\sigma G_\Gamma) d\Sigma$, то из (9) получаем соотношение

$$-(\vec{v} - \vec{v}_g)(\vec{J}_c \cdot \vec{n}) = -(P - P_g) \cdot \vec{n} + \text{div}_\Gamma(\sigma G_\Gamma), \quad (10)$$

где div_Γ — поверхностная дивергенция, ассоциированная с поверхностным градиентом $\nabla_\Gamma = \nabla - \vec{n}(\vec{n} \cdot \nabla)$, а $G_\Gamma = I - \vec{n} \otimes \vec{n}$ — фундаментальный тензор поверхности Γ . В работе [8]

показано, что $\operatorname{div}_\Gamma(\sigma G_\Gamma) = 2\sigma K\vec{n} + \nabla_\Gamma\sigma$, поэтому из (3), (6), (10) окончательно получаем динамическое условие на поверхности раздела

$$(P - P_g) \cdot \vec{n} = 2\sigma K\vec{n} + \nabla_\Gamma\sigma + \frac{D^2}{\varrho} \left(\frac{\partial c}{\partial n} \right)^2 \vec{n}. \quad (11)$$

Здесь K — средняя кривизна поверхности Γ . Условие (11) отличается наличием третьего слагаемого в правой части от выведенных в [7] динамических условий для случая отсутствия переноса массы через границу раздела. Это слагаемое задает динамическое воздействие потока испаряющегося (конденсирующегося) вещества на границу раздела.

Применим теперь к объему ω закон сохранения энергии вида

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\omega_1} \varrho \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \varepsilon \right) d\omega + \int_{\omega_2} \varrho_g \left(\frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon_g \right) d\omega + \int_{\omega_2} c \left(\frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon_p \right) d\omega + \int_{\Sigma} u d\Sigma \right] + \\ & + \int_{\Sigma_1} \varrho \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \varepsilon \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}_1 - V_{n_1}) d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \varrho_g \left(\frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon_g \right) (\vec{v}_g \cdot \vec{n}_2 - V_{n_2}) d\Sigma + \\ & + \int_{\Sigma_2} c \left(\frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon_p \right) (\vec{v}_g \cdot \vec{n}_2 - V_{n_2}) d\Sigma = \int_{\omega_1} \varrho \vec{v} \cdot \vec{g} d\omega + \int_{\omega_2} (\varrho_g + c) \vec{v}_g \cdot \vec{g} d\omega + \int_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot P \cdot \vec{n}_1 d\Sigma + \\ & + \int_{\Sigma_2} \vec{v}_g \cdot P_g \cdot \vec{n}_2 d\Sigma + \oint_{\partial\Sigma} \sigma \vec{v} \cdot \vec{n}_\Gamma dl - \int_{\Sigma_1} \vec{q} \cdot \vec{n}_1 d\Sigma - \int_{\Sigma_2} \vec{q}_g \cdot \vec{n}_2 d\Sigma - \int_{\Sigma_2} \left(\frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon_p \right) (\vec{J}_c \cdot \vec{n}_2) d\Sigma. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь ε , ε_g , ε_p — плотности удельной внутренней энергии жидкости, газа и пара, $\vec{q}$, $\vec{q}_g$ — векторы потоков тепла в жидкости и в газе, а u — внутренняя энергия единицы площади поверхности раздела. Прибавим к левой части (12) и отнимем от нее одну и ту же величину

$$\int_{\Sigma} \varrho \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \varepsilon \right) (\vec{v} \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma + \int_{\Sigma} \varrho_g \left(\frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon_g \right) (\vec{v}_g \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma + \int_{\Sigma} c \left(\frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon_p \right) (\vec{v}_g \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma,$$

а к правой части — величину

$$\int_{\Sigma} \vec{v} \cdot P \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{\Sigma} \vec{v}_g \cdot P_g \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{\Sigma} \vec{q}_g \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon_p \right) (\vec{J}_c \cdot \vec{n}) d\Sigma,$$

и применим к каждому из объемов ω_1 , ω_2 по отдельности закон сохранения энергии. Получим, с учетом (1), соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} u d\Sigma - \int_{\Sigma} \varrho \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \varepsilon \right) (\vec{v} \cdot \vec{n} - V_n) d\Sigma = - \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot P \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{\Sigma} \vec{v}_g \cdot P_g \cdot \vec{n} d\Sigma + \\ & + \oint_{\partial\Sigma} \sigma \vec{v} \cdot \vec{n}_\Gamma dl + \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma - \int_{\Sigma} \vec{q}_g \cdot \vec{n} d\Sigma - \int_{\Sigma} \varrho_g \left(\frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon_p \right) (\vec{J}_c \cdot \vec{n}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $\oint_{\partial\Sigma} \sigma \vec{v} \cdot \vec{n}_\Gamma dl = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_\Gamma[\sigma \vec{v} - \sigma(\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}] d\Sigma$, и $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} u d\Sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_0} u W d\xi d\eta = \int_{\Sigma_0} \left(W \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial W}{\partial t} \right) d\xi d\eta = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u W^{-1} \frac{\partial W}{\partial t} \right) d\Sigma$, из (13) получаем соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u W^{-1} \frac{\partial W}{\partial t} - \varrho \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \varepsilon \right) (\vec{v} \cdot \vec{n} - V_n) = -\vec{v} \cdot P \cdot \vec{n} + \vec{v}_g \cdot P_g \cdot \vec{n} +$$

$$+ \operatorname{div}_\Gamma [\sigma \vec{v} - \sigma (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n}] + \vec{q} \cdot \vec{n} - \vec{q}_g \cdot \vec{n} - \left(\frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon_p \right) (\vec{J}_c \cdot \vec{n}). \quad (14)$$

Здесь W — детерминант первой квадратичной формы поверхности Γ , причем для его вычисления параметризация $\vec{x} = \vec{x}(\xi, \eta)$ поверхности раздела выбрана так, что область параметров Σ_0 не зависит от времени.

Заметим далее, что в силу (3), (4) имеют место равенства

$$\begin{aligned} \varrho \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \varepsilon \right) (\vec{v} \cdot \vec{n} - V_n) - \left(\frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon_p \right) (\vec{J}_c \cdot \vec{n}) &= D \frac{\partial c}{\partial n} \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 - \frac{1}{2} |\vec{v}_g|^2 + \varepsilon - \varepsilon_p \right) = \\ &= -(\varepsilon_g - \varepsilon) D \frac{\partial c}{\partial n} + \frac{1}{2} D \frac{\partial c}{\partial n} (\vec{v} - \vec{v}_g) \cdot (\vec{v} + \vec{v}_g) = -\lambda_0 D \frac{\partial c}{\partial n} - \frac{1}{2} \frac{D^2}{\varrho} \left(\frac{\partial c}{\partial n} \right)^2 (2\vec{v} - (\vec{v} - \vec{v}_g)) \cdot \vec{n} = \\ &= -\lambda D \frac{\partial c}{\partial n} + \frac{D^2}{\varrho^2} \left(\frac{\partial c}{\partial n} \right)^2 \left(\frac{D}{2} \frac{\partial c}{\partial n} - \varrho V_n \right). \end{aligned}$$

Здесь $\lambda = (\varepsilon_p - \varepsilon)$ — удельная теплота парообразования. Кроме того, как показано в [8], $\operatorname{div}_\Gamma [\sigma \vec{v} - \sigma (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n}] = \sigma \operatorname{div}_\Gamma \vec{v} + 2\sigma K \vec{v} \cdot \vec{n} + \vec{v} \cdot \nabla_\Gamma \sigma$.

Будем считать, что поверхность раздела — однопараметрическая среда, т.е. ее термодинамические параметры зависят только от температуры T . Согласно Гиббсу, будем отождествлять коэффициент поверхностного натяжения σ с удельной свободной энергией поверхности. Тогда $u = \sigma + Ts$, где s — удельная энтропия поверхности, и, используя известную формулу Гиббса-Дюгема $d\sigma/dT = -s$, получим равенство $\partial u/\partial t = -T\sigma'' \partial T/\partial t$. Кроме того, $-\vec{v} \cdot P \cdot \vec{n} + \vec{v}_g \cdot P_g \cdot \vec{n} = -\vec{v} \cdot (P - P_g) \cdot \vec{n} - (\vec{v} - \vec{v}_g) \cdot P_g \cdot \vec{n} = -\vec{v} \cdot \left[2\sigma K \vec{n} + \nabla_\Gamma \sigma + \frac{D^2}{\varrho} \left(\frac{\partial c}{\partial n} \right)^2 \vec{n} \right] + \frac{D}{\varrho} \frac{\partial c}{\partial n} \vec{n} \cdot P_g \cdot \vec{n}$.

Примем также, что кондуктивный теплоперенос в жидкости и в газе подчинен закону Фурье $\vec{q} = -\kappa \nabla T$, $\vec{q}_g = -\kappa_g \nabla T_g$, где κ, κ_g — коэффициенты теплопроводности в жидкости и в газе.

Подставив полученные соотношения в (14), получим следующее условие теплового баланса на границе раздела фаз:

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial T}{\partial n} - \kappa_g \frac{\partial T}{\partial n} &= \lambda D \frac{\partial c}{\partial n} + \sigma \operatorname{div}_\Gamma \vec{v} + T\sigma'' \frac{\partial T}{\partial t} - (\sigma - T\sigma') W^{-1} \frac{\partial W}{\partial t} + \\ &+ \frac{D^3}{2\varrho^2} \left(\frac{\partial c}{\partial n} \right)^3 + \frac{D}{\varrho} \frac{\partial c}{\partial n} \vec{n} \cdot P_g \cdot \vec{n}. \end{aligned} \quad (15)$$

В условии (15) левая часть представляет собой дефект тепла при его переносе через границу раздела; слагаемые в правой части задают вклад в него отдельных физических явлений, создающих этот дефект: первое слагаемое задает расход тепла на парообразование, второе — на преодоление поверхностного натяжения при переносе вещества через границу раздела, третье — на изменение температуры границы (граница раздела не имеет массы, но обладает внутренней энергией и поэтому теплоемкостью), четвертое — на деформацию границы, пятое — на изменение кинетической энергии вещества при фазовом переходе и последнее — на совершаемую работу вследствие изменения удельного объема при испарении (конденсации). Если перенос вещества через границу отсутствует, тогда (15) совпадает с условием баланса энергии на границе двух несмешивающихся жидкостей, выведенным в [8].

Кроме балансовых соотношений поставим на границе раздела условия локального термодинамического равновесия. Будем считать, что при переходе через границу температура меняется непрерывно:

$$T = T_g, \quad (16)$$

а также не терпит разрыва химический потенциал (удельная свободная энергия Гиббса):

$$f = f_g. \quad (17)$$

Таким образом, на поверхности раздела жидкость-пар выполняются кинематические условия (1), (3), (7), динамические условия (11), условие баланса энергии (15) и условия термодинамического равновесия (16), (17). Во многих важных для приложений случаях условие термодинамического равновесия (17) можно записать в виде

$$c = c_*(T). \quad (18)$$

Равенство (18) означает, что при равновесии концентрация пара насыщена. Рассмотрим следующий пример.

2. Испарение шарового слоя

Пусть в отсутствие силы тяжести на твердом шаре радиуса покоится шаровой слой жидкости с начальным внешним радиусом b_0 , находящейся в термодинамическом равновесии с окружающим нейтральным газом с температурой T_0 . В момент времени $t = 0$ в шаре включается нагреватель, в результате чего температура твердой поверхности шара начинает изменяться по некоторому закону $T_a = T_a(t)$, причем $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} T_a(t) = T_1$. Вследствие начавшегося испарения (конденсации) будет меняться внешний радиус жидкого слоя, и в газе начнется как движение основного нейтрального газа, так и перераспределение концентрации пара. Пусть r — расстояние до центра шара. Тогда для определения неизвестных температур $T(t, r)$, $T_g(t, r)$ жидкости и газа, концентрации пара в газе $c(t, r)$, внешнего радиуса жидкого слоя $b(t)$, давлений в жидкости и газе $p(t)$, $p_g(t, r)$, радиальной скорости движения газа $v_g(t, r)$ (в жидком слое движение отсутствует) получаем следующую задачу.

При $0 < r < b(t)$ температура удовлетворяет уравнению

$$\rho c_p T_t = \kappa(T_{rr} + \frac{2}{r}T_r), \quad (19)$$

при $b(t) < r < \infty$ имеем систему уравнений

$$(r^2 v_g)_r = 0, \quad (20)$$

$$\rho_g c_{vg}(T_{gt} + v_g T_{gr}) = \kappa_g(T_{grr} + \frac{2}{r}T_{gr}), \quad (21)$$

$$\rho_g(v_{gt} + v_g v_{gr}) = -p_{gr} + \mu_g(v_{grr} + \frac{2}{r}v_{gr} - \frac{2}{r^2}v_g), \quad (22)$$

$$c_t + v_g c_r = D(c_{rr} + \frac{2}{r}c_r), \quad (23)$$

с начальными условиями при $t = 0$

$$T = T_g = T_0, \quad c = c_0, \quad b = b_0, \quad v_g = 0, \quad (24)$$

условием на поверхности твердого шара при $r = a$

$$T = T_a(t), \quad (25)$$

условиями на границе раздела $r = b(t)$

$$v_g = \dot{b}, \quad (26)$$

$$\varrho \dot{b} = Dc_r, \quad (27)$$

$$-p + p_g - 2\mu_g v_{gr} = -\frac{2\sigma}{b} + \frac{D^2}{\varrho}(c_r)^2, \quad (28)$$

$$T = T_g, \quad (29)$$

$$\kappa T_r - \kappa_g T_{gr} = T\sigma''T_t - 2(\sigma - T\sigma')\frac{\dot{b}}{b} + \lambda Dc_r + \frac{D^3}{2\varrho^2}(c_r)^3 + \frac{2\mu_g D}{\varrho}v_{gr}c_r, \quad (30)$$

$$c = c_*(T), \quad (31)$$

и условиями вдали от жидкого слоя при $r \rightarrow \infty$

$$T \rightarrow T_0, \quad p_g \rightarrow p_0, \quad c \rightarrow c_0 \quad v_g \rightarrow 0. \quad (32)$$

Уравнение (20) легко решить; учитывая граничные условия (26), (32), получаем

$$v_g = \frac{b^2 \dot{b}}{r^2}. \quad (33)$$

Заметим, что уравнение (22) вместе с граничным условием (28) и вторым из условий (32) служит лишь для определения распределений давления в газовой фазе $p_g(t, r)$ и давления в жидкости $p(t)$. Здесь мы не будем находить эти функции, и указанные соотношения ниже не рассматриваются. Для большей определенности будем считать, что функции $\sigma(T)$, $c_*(T)$ являются квадратичными, т.е.

$$\sigma(T) = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0) + \frac{\sigma_{TT}}{2}(T - T_0)^2, \quad c_*(T) = c_0 + c_T(T - T_0) + \frac{c_{TT}}{2}(T - T_0)^2, \quad (34)$$

где σ_0 , σ_T , σ_{TT} , c_0 , c_T , $c_{TT} = \text{const}$. В задаче (19)-(32) перейдем к безразмерным переменным $\hat{t}$, $\hat{r}$, $\hat{c}$, θ , θ_g , θ_a , $\hat{b}$ с помощью формул: $t = \frac{a^2}{\nu_g} \hat{t}$, $r = a + (b - a)\hat{r}$, $b = a + a\hat{b}$, $c = c_0 + c_T(T_1 - T_0)\hat{c}$, $T = T_0 + (T_1 - T_0)\theta$, $T_g = T_0 + (T_1 - T_0)\theta_g$, $T_a = T_0 + (T_1 - T_0)\theta_a$.

Тогда с учетом (33), (34) в безразмерных переменных задача примет следующий вид (крюшечки над переменными ниже везде опускаем).

При $0 < r < 1$:

$$k_2 \mathbf{Pr} \left(\theta_t - \frac{r\dot{b}}{b} \theta_r \right) = \frac{1}{b^2} \theta_{rr} + \frac{2}{b(1+rb)} \theta_r, \quad (35)$$

при $1 < r < \infty$:

$$\mathbf{Pr}_g \left(\theta_{gt} - \frac{r\dot{b}}{b} \theta_{gr} + \frac{\dot{b}b^2}{(1+rb)^2} \theta_{gr} \right) = \frac{1}{b^2} \theta_{grr} + \frac{2}{b(1+rb)} \theta_{gr}, \quad (36)$$

$$\mathbf{Sh} \left(c_t - \frac{r\dot{b}}{b} c_r + \frac{\dot{b}b^2}{(1+rb)^2} c_r \right) = \frac{1}{b^2} c_{rr} + \frac{2}{b(1+rb)} c_r, \quad (37)$$

с начальными условиями при $t = 0$

$$\theta = \theta_g = 0, \quad c = 0, \quad b = (b_0 - a)/a, \quad (38)$$

условием на поверхности твердого шара при $r = 0$

$$\theta = \theta_a(t), \quad (39)$$

условиями на границе раздела $r = 1$

$$\mathbf{Sh} b \dot{b} = k_1 c_r, \quad (40)$$

$$\theta = \theta_g, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{Pr}}(\theta_r - k_3 \theta_{g_r}) &= \frac{k_2 k_6 \mathbf{E}}{\mathbf{Ca}} b(\theta_0 + \theta) \theta_t - \frac{2 \mathbf{E}}{b \mathbf{Ca}} \frac{k_1 k_2}{\mathbf{Sh}} (1 + k_5 \theta_0 - k_6 \theta_0 \theta - \frac{k_6 \theta^2}{2}) c_r + \\ &+ \frac{k_1 k_2}{\mathbf{Sh}} \mathbf{L} c_r + \frac{\mathbf{E}}{2 b^2} \left(\frac{k_1 k_2}{\mathbf{Sh}} \right)^3 (c_r)^3 - \frac{4 k_4 \mathbf{E}}{b} \left(\frac{k_1 k_2}{\mathbf{Sh}} \right)^2 (c_r)^2, \end{aligned} \quad (42)$$

$$c = \theta + k_7 \theta^2 / 2, \quad (43)$$

и условиями вдали от жидкого слоя при $r \rightarrow \infty$

$$\theta \rightarrow 0, \quad c \rightarrow 0. \quad (44)$$

Здесь безразмерные критерии подобия — числа Прандтля в жидкости и в газе $\mathbf{Pr}, \mathbf{Pr}_g$, число Эккерта $\mathbf{E}$, число Шмидта $\mathbf{Sh}$, число испарения $\mathbf{L}$, капиллярное число $\mathbf{Ca}$ и коэффициенты отношения материальных постоянных $k_1 - k_7$ и θ_0 задаются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr} &= \frac{\nu}{\chi}, \quad \mathbf{Pr}_g = \frac{\nu_g}{\chi_g}, \quad \mathbf{E} = \frac{\nu^2}{a^2 c_p (T_1 - T_0)}, \quad \mathbf{Sh} = \frac{\nu_g}{D}, \quad \mathbf{L} = \frac{\lambda}{c_p (T_1 - T_0)}, \quad \mathbf{Ca} = \frac{\rho \nu^2}{a \sigma_0}, \\ k_1 &= \frac{c_T (T_1 - T_0)}{\varrho}, \quad k_2 = \frac{\nu_g}{\nu}, \quad k_3 = \frac{\varkappa_g}{\varkappa}, \quad k_4 = \frac{\varrho_g}{\varrho}, \quad k_5 = \frac{\sigma_T (T_1 - T_0)}{\sigma_0}, \\ k_6 &= \frac{\sigma_{TT} (T_1 - T_0)^2}{\sigma_0}, \quad k_7 = \frac{c_{TT} (T_1 - T_0)}{c_T}, \quad \theta_0 = \frac{T_0}{T_1 - T_0}. \end{aligned}$$

Задача (35)–(44) решалась численно. При этом решение задачи в неограниченной по r области заменялось решением в области $\{r \in (0, r_1), t > 0\}$. Начальные условия (38), условие на твердом шаре (39) и условия на границе раздела (40)–(43) сохраняют свой вид, а условия (44) переносятся на новые границы так:

$$\theta|_{r=r_1} = 0, \quad c|_{r=r_1} = 0. \quad (45)$$

Введя шаги τ по времени, шаги по радиальному направлению $h_1 = 1/n$, $h_2 = (r_1 - 1)/m$, построим разностный аналог системы уравнений (35)–(37) вида

$$k_2 \mathbf{Pr} \left(\frac{\theta_i^k - \theta_i^{k-1}}{\tau} - \frac{r_i (b^k - b^{k-1})}{\tau b^k} \Lambda_1 \theta_i^k \right) = \frac{1}{(b^k)^2} \Lambda_{11} \theta_i^k + \frac{2}{b^k (1 + r_i b^k)} \Lambda_1 \theta_i^k, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}_g \left(\frac{\theta_{j+n-1}^k - \theta_{j+n-1}^{k-1}}{\tau} - \frac{r_j (b^k - b^{k-1})}{\tau b^k} \Lambda_1^g \theta_{j+n-1}^k + \frac{(b^k)^2 (b^k - b^{k-1})}{\tau (1 + r_j b^k)^2} \Lambda_1^g \theta_{j+n-1}^k \right) = \\ = \frac{1}{(b^k)^2} \Lambda_{11}^g \theta_{j+n-1}^k + \frac{2}{b^k (1 + r_j b^k)} \Lambda_1^g \theta_{j+n-1}^k, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\mathbf{Sh} \left(\frac{c_j^k - c_j^{k-1}}{\tau} - \frac{r_j (b^k - b^{k-1})}{\tau b^k} \Lambda_1^g c_j^k + \frac{(b^k)^2 (b^k - b^{k-1})}{\tau (1 + r_j b^k)^2} \Lambda_1^g c_j^k \right) =$$

$$= \frac{1}{(b^k)^2} \Lambda_{11}^g c_j^k + \frac{2}{b^k(1+r_j b^k)} \Lambda_1^g c_j^k, \quad (48)$$

где $i = 2, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, m-1$, $k = 2, 3, \dots$. Поскольку в силу условия (41) температура — непрерывная функция, а на границе раздела терпит разрыв только производная температуры по радиальному направлению, здесь введена единая сеточная функция температуры, для которой условие непрерывности температуры выполнено автоматически. Для начальных условий получаем разностные аналоги

$$\theta_i^1 = 0, \quad \theta_{n+j-1}^1 = 0, \quad c_j^1 = 0, \quad b^1 = (b_0 - a)/a, \quad (49)$$

и аналоги граничных условий

$$\theta_1^k = \theta_a^k, \quad (50)$$

$$\mathbf{Sh} b^{k-1} \frac{b^k - b^{k-1}}{\tau} = k_1 \frac{c_2^k - c_1^k}{h_2}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{Pr}} \left(\frac{\theta_n^k - \theta_{n-1}^k}{h_1} - k_3 \frac{\theta_{n+1}^k - \theta_n^k}{h_2} \right) &= \frac{k_2 k_6 \mathbf{E}}{\mathbf{Ca}} b^k (\theta_0 + \theta_n^{k-1}) \frac{\theta_n^k - \theta_n^{k-1}}{\tau} - \\ - \frac{2\mathbf{E}}{b\mathbf{Ca}} \frac{k_1 k_2}{\mathbf{Sh}} \left(1 + k_5 \theta_0 - k_6 \theta_0 \theta_n^k - \frac{k_6 \theta_n^{k-1} \theta_n^k}{2} \right) \frac{c_2^k - c_1^k}{h_2} &+ \frac{k_1 k_2}{\mathbf{Sh}} \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{L}} \frac{c_2^k - c_1^k}{h_2} + \\ + \frac{\mathbf{E}}{2b^2} \left(\frac{k_1 k_2}{\mathbf{Sh}} \right)^3 \left(\frac{c_2^k - c_1^k}{h_2} \right)^3 - \frac{4k_4 \mathbf{E}}{b} \left(\frac{k_1 k_2}{\mathbf{Sh}} \right)^2 \left(\frac{c_2^k - c_1^k}{h_2} \right)^2, \end{aligned} \quad (53)$$

$$c_1^k = \theta_n^{k-1} + k_7 (\theta_n^{k-1})^2 / 2, \quad (54)$$

$$\theta_{n+m-1}^k = 0, \quad c_m^k = 0. \quad (55)$$

Здесь операторы Λ_1 , Λ^g , Λ_{11} , Λ_{11}^g над сеточными функциями задаются с помощью формул: $\Lambda_1 f_i^k = \frac{f_{i+1}^k - f_{i-1}^k}{2h_1}$, $\Lambda_1^g f_j^k = \frac{f_{j+1}^k - f_{j-1}^k}{2h_2}$, $\Lambda_{11} f_i^k = \frac{f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k}{h_1^2}$, $\Lambda_{11}^g f_j^k = \frac{f_{j+1}^k - 2f_j^k + f_{j-1}^k}{h_2^2}$.

Разностные уравнения (46)–(54) на каждом шаге по времени $k = 2, 3, \dots$ представляют собой систему линейных уравнений. Эта система решалась следующим образом. Сначала решались уравнения (48) с условиями (53), (54). Затем из условия (51) находилось значение b^k и решались остальные линейные уравнения.

При расчетах значения безразмерных постоянных выбирались следующим образом. Исходя из данных [11], [12] можно заметить, что для многих жидкостей (спирт, вода и т.д.) имеют следующие порядки величин: $\mathbf{Pr}, \mathbf{Pr}_g \sim 10^{-1} - 10^2$, $\mathbf{Sh} \sim 10^{-2} - 10^2$, $\mathbf{L} \sim 1 - 10^2$, $k_2 \sim 10^2 - 10^4$, $k_3 \sim 10^{-1} - 10^1$, $k_4 \sim 10^{-4} - 10^{-2}$.

Остальные безразмерные величины зависят не только от свойств жидкости и газа, но и от управляющих параметров: радиуса твердого шара, толщины слоя, перепада температуры.

Для температурных перепадов в десятки градусов и толщин жидкого слоя в доли сантиметра число Эккерта $\mathbf{E}$ оказывается очень маленьким: $\mathbf{E} \sim 10^{-7} - 10^{-9}$, и поэтому вклад

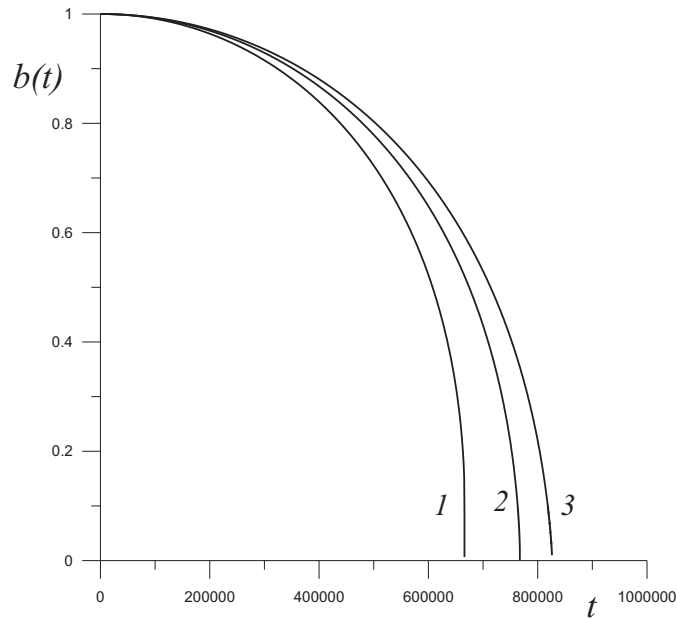


Рис. 2. Зависимость толщины жидкого слоя от времени: линия 1 — $\text{Ca} = 0.2 \cdot 10^{-4}$, линия 2 — $\text{Ca} = 0.5 \cdot 10^{-4}$, линия 3 — $\text{Ca} = 0.1 \cdot 10^{-2}$

в балансовое соотношение (42) членов, задающих работу газа, пренебрежимо мал. Но члены, определяющие затраты энергии, связанные с капиллярностью, могут конкурировать с теплотой испарения.

На рис. 2 представлен расчет толщины слоя в зависимости от времени (величины безразмерные). Здесь брали значения $k_1 = 0.3 \cdot 10^{-3}$, $k_2 = 0.2 \cdot 10^3$, $k_3 = 0.15$, $k_4 = 0.2 \cdot 10^{-2}$, $k_5 = 0.2$, $k_6 = 0.7 \cdot 10^{-2}$, $k_7 = 0.35 \cdot 10^1$, $\text{Pr} = 0.2 \cdot 10^2$, $\text{Pr}_g = 0.8$, $\text{E} = 0.3 \cdot 10^{-7}$, $\text{Sh} = 0.1 \cdot 10^1$, $\text{E} = 0.5 \cdot 10^1$, $\theta_0 = 0.7 \cdot 10^1$.

Значение капиллярного числа варьировалось: линия 1 соответствует значению $\text{Ca} = 0.2 \cdot 10^{-4}$, линия 2 — значению $\text{Ca} = 0.5 \cdot 10^{-4}$ и линия 3 рассчитана при $\text{Ca} = 0.1 \cdot 10^{-2}$. Заметим, что время испарения всего слоя заметным образом зависит от значения капиллярного числа при его вариации в разумных физических пределах.

3. Выводы

Из законов сохранения массы, количества движения и энергии выведены условия, которым должны удовлетворять поля скоростей, давлений, концентраций и температур в жидкой и газовой фазах на разделяющей эти фазы границе. При этом жидкость может испаряться и переноситься в газе как примесь. В полученных соотношениях установлено, какому физическому явлению соответствует каждый из входящих в него слагаемых. В качестве примера рассмотрена задача испарения подогреваемого шарового слоя жидкости. Проведены примеры расчетов. Установлено, что связанные с капиллярностью явления могут оказывать на процесс испарения заметное влияние.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы интеграционных проектов

СО РАН (Грант №64).

Список литературы

- [1] Р.И. Нигматулин, Динамика многофазных сред, ч. 1, М., Наука, 1987.
- [2] Р.И. Нигматулин, Динамика многофазных сред, ч. 2, М., Наука, 1987.
- [3] И.О. Протодьяконов, И.Е. Люблинская, Гидродинамика и массообмен в системах газ-жидкость, Л., Наука, 1990.
- [4] K. Fukagataa, N. Kasagia, P. Ua-Arayaporna, T. Himeno, Numerical simulation of gas-liquid two-phase flow and convective heat transfer in a micro tube, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **28**(2007), №1, 72–82.
- [5] A. Biesheuvel, L. Van Wijngaarden, Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid, *Journal of Fluid Mechanics*, **148**(1984), 301–318.
- [6] А.В. Козырев, А.Г. Ситников, Испарение сферической капли в газе среднего давления *Успехи физических наук*, **171**(2001), №7 765–774.
- [7] L.G. Napolitano, Thermodynamics and Dynamics of Pure Interfaces, *Acta Astronaut*, **5**(1978), 655–670.
- [8] В.В. Пухначев, Движение вязкой жидкости со свободными границами, Уч. пособие, Новосибирск, НГУ, 1989.
- [9] S. Das Kausik, C.A. Ward, Surface Thermal Capacity and its Effects on the Boundary Conditions at Fluid-Fluid Interfaces, *Physical Review E*, **75**(2007), 065303(R), 1–4.
- [10] Таблицы физических величин, Справочник, Под ред. акад. И.К. Кикоина, М., Атомиздат, 1976.
- [11] Справочник химика, т. 1, М., Химия, 1966.

Heat and Mass Transfer at the Liquid-gas Interface under Diffusion Evaporation

Vladimir V. Kuznetsov

The relations for the fields of temperature, concentration, speeds and pressure at the interface of two regions occupied by a liquid and gas phases are derived from the conservation laws. The substance of a liquid can evaporate (condense) and the vapor is transferred in the gas phase as an impurity. The obtained conditions differ from the conditions traditionally used because the additional terms appear in the equations of forces balance and energy streams balance. These additional terms are responsible for the physical phenomena at interface such as dynamic influence on a liquid of evaporating (condensed) substance, the waste of energy on deformation of the boundary, on overcoming of the surface tension etc. Usually these terms are neglected, but it is not always correct. As an example the problem of evaporation of a spherical layer of a liquid is considered. The calculations are carried out. It should be noted that the additional terms in some conditions can play a significant role at calculation of the process parameters.

Keywords: interfacial heat mass transfer, vapor concentration, evaporation.