

УДК 517.54

Численное решение линейной двумерной динамической задачи для пористых сред

Константин Э. Сорокин*
Холматжон Х. Имомназаров†

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
Лаврентьева 6, Новосибирск, 630090,
Россия

Получена 18.12.2009, окончательный вариант 25.02.2010, принята к печати 10.04.2010

В работе численно решена линейная двумерная динамическая задача для пористых сред, насыщенных жидкостью. За основу взята линеаризованная модель В.Н.Доровского, в которой среда описывается тремя упругими параметрами. Для решения задачи использовался явный разностный метод второго порядка точности. Также использован метод PML (полностью согласованного поглощающего слоя). Проведена серия тестовых численных расчетов для пробной модели среды.

Ключевые слова: пористая среда, метод конечных разностей, шахматная сетка, метод PML.

Постановка задачи

В этом разделе представлено краткое описание и постановка задачи распространения сейсмических волн в пористой среде [1]. Пористая среда, состоящая из заполненной вязкой жидкостью упругодеформируемой матрицы, является реалистической моделью. Данная модель позволяет объяснить эффекты сейсмических исследований свойств горных пород при наличии поровой жидкости. Для численного моделирования, как правило, используется модель Френкеля-Био [2, 3]. Особенность распространения волнового поля в пористых средах — наличие дополнительной второй продольной волны. Скорости распространения сейсмических волн в теории Френкеля-Био есть функции четырех упругих параметров. В 1989 году В.Н. Доровским [4] была построена нелинейная математическая модель для пористых сред. В этой модели, так же как в теории Френкеля-Био, есть три типа звуковых колебаний: поперечное и два продольных. Но при этом среда описывается тремя упругими параметрами [5, 6]. Эти упругие параметры взаимно однозначно выражаются тремя скоростями упругих колебаний. Указанное обстоятельство важно для численного моделирования распространения упругих волн в пористых средах, когда заданными параметрами являются значения скоростей акустических волн, пористости, физических плотностей матрицы и насыщающей жидкости.

Перейдем к математической формулировке модели. Пусть полуплоскость $y > 0$ заполнена пористой средой и насыщенной жидкостью. Тогда распространение сейсмических волн в данной среде при отсутствии потери энергии описывается следующей начально-краевой задачей [5–7]:

*konst_sorokin_85@ngs.ru

†imom@omzg.sscc.ru

$$\begin{aligned}
 \partial_t u_x + \frac{1}{\rho_{0,s}}(\partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{xy}) + \frac{1}{\rho_0} \partial_x p &= F_x, \\
 \partial_t u_y + \frac{1}{\rho_{0,s}}(\partial_x \sigma_{xy} + \partial_y \sigma_{yy}) + \frac{1}{\rho_0} \partial_y p &= F_y, \\
 \partial_t v_x + \frac{1}{\rho_0} \partial_x p &= F_x, \\
 \partial_t v_y + \frac{1}{\rho_0} \partial_y p &= F_y, \\
 \partial_t \sigma_{xx} + 2\mu \partial_x u_x + \left(\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} K - \frac{2}{3}\mu\right)(\partial_x u_x + \partial_y u_y) - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} K(\partial_x v_x + \partial_y v_y) &= 0, \\
 \partial_t \sigma_{xy} + \mu(\partial_y u_x + \partial_x u_y) &= 0, \\
 \partial_t \sigma_{yy} + 2\mu \partial_y u_y + \left(\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} K - \frac{2}{3}\mu\right)(\partial_x u_x + \partial_y u_y) - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} K(\partial_x v_x + \partial_y v_y) &= 0, \\
 \partial_t p - (K - \alpha \rho_0 \rho_{0,s})(\partial_x u_x + \partial_y u_y) + \alpha \rho_0 \rho_{0,l}(\partial_x v_x + \partial_y v_y) &= 0, \\
 u_x|_{t=0} = u_y|_{t=0} = v_x|_{t=0} = v_y|_{t=0} = \sigma_{xx}|_{t=0} = \sigma_{xy}|_{t=0} = \sigma_{yy}|_{t=0} = p|_{t=0} &= 0, \\
 \sigma_{yy} + p|_{y=0} = \sigma_{xy}|_{y=0} = \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} p|_{y=0} &= 0,
 \end{aligned}$$

где $\vec{u} = (u_x, u_y)$ и $\vec{v} = (v_x, v_y)$ — векторы скорости упругого пористого тела с парциальной плотностью $\rho_{0,s}$ и жидкости с парциальной плотностью $\rho_{0,l}$ соответственно; p — поровое давление; $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ — компоненты тензора напряжений; $\vec{F} = (F_x, F_y)$ — вектор массовых сил; $\rho_0 = \rho_{0,l} + \rho_{0,s}$, $\rho_{0,s} = \rho_{0,s}^f(1 - d_0)$, $\rho_{0,l} = \rho_{0,l}^f d_0$, $\rho_{0,s}^f$ и $\rho_{0,l}^f$ — физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно; d_0 — пористость; $K = \lambda + 2\mu/3$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ — коэффициенты Ламе; $\alpha = \rho_0 \alpha_3 + K/\rho_0^2$; $\rho_0^3 \alpha_3 > 0$ — модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды. Упругие модули K, μ, α_3 выражаются через скорость распространения поперечной волны c_s и две скорости продольных волн c_{p1}, c_{p2} следующими формулами [8, 9]:

$$\begin{aligned}
 \mu &= \rho_{0,s} c_s^2, \\
 K &= \frac{\rho_0 \rho_{0,s}}{2 \rho_{0,l}} \left(c_{p1}^2 + c_{p2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} c_s^2 - \sqrt{(c_{p1}^2 - c_{p2}^2) - \frac{64}{9} \frac{\rho_{0,l} \rho_{0,s}}{\rho_0^2} c_s^4} \right), \\
 \alpha_3 &= \frac{1}{2\rho_0^2} \left(c_{p1}^2 + c_{p2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} c_s^2 - \sqrt{(c_{p1}^2 - c_{p2}^2) - \frac{64}{9} \frac{\rho_{0,l} \rho_{0,s}}{\rho_0^2} c_s^4} \right).
 \end{aligned}$$

РМЛ-модель

Рассматривается РМЛ-модель для линейной двумерной динамической задачи. Одним из основных принципов РМЛ-модели является соединение уравнения в левом полупространстве с уравнением в правом таким образом, чтобы граница этих полупространств не порождала искусственных отражений, а волна в правом полупространстве уменьшалась экспоненциально. Соответственно, вводим функцию $d(x)$, равную нулю в левом полупространстве и положительную в правом. Эта функция будет играть роль поглощающего множителя. Уравнения РМЛ-модели можно записать в следующем виде:

$$(\partial_t + d(x))u_x^\perp = -\frac{1}{\rho_{0,s}} \partial_x \sigma_{xx} - \frac{1}{\rho_0} \partial_x p + F_x; \partial_t u_x^\parallel = -\frac{1}{\rho_{0,s}} \partial_y \sigma_{xy} + F_x,$$

$$(\partial_t + d(x))u_y^\perp = -\frac{1}{\rho_{0,s}}\partial_x\sigma_{xy} + F_y; \partial_t u_y^\parallel = -\frac{1}{\rho_{0,s}}\partial_y\sigma_{yy} - \frac{1}{\rho_0}\partial_y p + F_y,$$

$$\begin{aligned} (\partial_t + d(x))\sigma_{xx}^\perp &= -2\mu\partial_x u_x - \left(\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}K - \frac{2}{3}\mu\right)\partial_x u_x + \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}K\partial_x v_x; \partial_t \sigma_{xx}^\parallel = \\ &= -\left(\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}K - \frac{2}{3}\mu\right)\partial_y u_y + \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}K\partial_y v_y, \end{aligned}$$

$$(\partial_t + d(x))\sigma_{xy}^\perp = -\mu\partial_x u_y; \partial_t \sigma_{xy}^\parallel = -\mu\partial_y u_x,$$

$$\begin{aligned} (\partial_t + d(x))\sigma_{yy}^\perp &= -\left(\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}K - \frac{2}{3}\mu\right)\partial_x u_x + \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}K\partial_x v_x; \partial_t \sigma_{yy}^\parallel = \\ &= -2\mu\partial_y u_y - \left(\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}K - \frac{2}{3}\mu\right)\partial_y u_y + \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}K\partial_y v_y, \end{aligned}$$

$$(\partial_t + d(x))v_x^\perp = -\frac{1}{\rho_0}\partial_x p + F_x; \partial_t v_x^\parallel = F_x,$$

$$(\partial_t + d(x))v_y^\perp = F_y; \partial_t v_y^\parallel = -\frac{1}{\rho_0}\partial_y p + F_y,$$

$$(\partial_t + d(x))p^\perp = (K - \alpha\rho_0\rho_{0,s})\partial_x u_x - \alpha\rho_0\rho_{0,l}\partial_x v_x; \partial_t p^\parallel = (K - \alpha\rho_0\rho_{0,s})\partial_y u_y - \alpha\rho_0\rho_{0,l}\partial_y v_y.$$

Дискретная РМЛ-модель

Рассмотрим дискретную РМЛ-модель для приведенной выше задачи распространения. Используем конечно-разностный метод. Схема строится на шахматной сетке [10]. Скорости u_x и v_x считают в точках (i, j) , $(x_i = ih, y_j = jh)$ координатной сетки, u_y и v_y — в точках $\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right)$, σ_{xx} , σ_{yy} , p — в точках $\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$ и σ_{xy} — в $\left(i, j + \frac{1}{2}\right)$. Схема может быть записана следующим образом (ввиду громоздкости ниже приведена разностная аппроксимация только уравнения для компоненты скорости u_x , остальные разностные уравнения строятся по аналогии [10]):

$$(u_x)_{i,j}^n = (u_x^x)_{i,j}^n + (u_x^y)_{i,j}^n,$$

$$\begin{aligned} \frac{(u_x^x)_{i,j}^{n+1} - (u_x^x)_{i,j}^n}{\Delta t} + d_i^x \frac{(u_x^x)_{i,j}^{n+1} + (u_x^x)_{i,j}^n}{2} = \\ = -\frac{(\sigma_{xx})_{i\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - (\sigma_{xx})_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\rho_{0,s}h} - \frac{(p)_{i\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - (p)_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\rho_0 h} + (F_x)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{(u_x^y)_{i,j}^{n+1} - (u_x^y)_{i,j}^n}{\Delta t} + d_i^y \frac{(u_x^y)_{i,j}^{n+1} + (u_x^y)_{i,j}^n}{2} = -\frac{(\sigma_{xy})_{i,j\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (\sigma_{xy})_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\rho_{0,s}h} + (F_x)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}},$$

где используются обозначения $i^k = i + k$ и $j^k = j + k$.

Система уравнений согласована с моделью РМЛ в углах, где поглощение идет в обоих направлениях. Для вычисления решения внутри РМЛ-слоев в направлении x мы используем ту же самую систему уравнений, где берём $d^y = 0$, и для РМЛ-слоев в направлении y мы берём $d^x = 0$ (рис. 1).

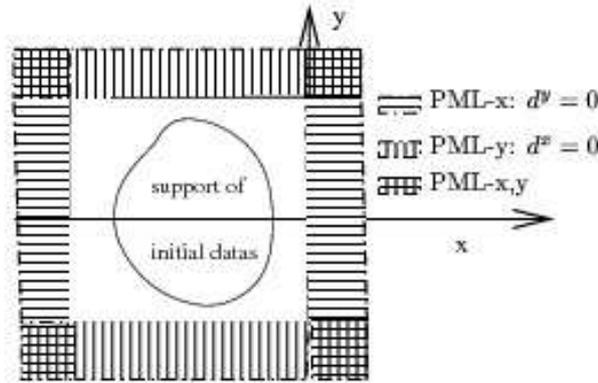


Рис. 1. PML-слои: в углах $d^x > 0$ и $d^y > 0$, в слоях в направлении $x(y)$ считаем $d^y = 0(d^x = 0)$

Численные результаты

В следующем примере мы моделируем распространение сейсмических волновых полей в бесконечной двумерной среде. Представлена однородная, изотропная упруго-пористая среда, заполненная вязкой жидкостью. Материал, заполняющий нашу область, будем характеризовать скоростями продольных и поперечных волн, соответственно $c_{p1} = 2000 \text{ m/s}$, $c_{p2} = 450 \text{ m/s}$, $c_s = 1400 \text{ m/s}$. Определим ограниченную область D квадратной формы со стороной $c = 30 \text{ m}$, в которой заданы нулевые начальные условия, и на каждой из четырех границ есть PML-слой. Зададим сетку с количеством узлов по каждой координате $N = 400$. Временной шаг возьмем равным $\Delta t = 0,9h / (\sqrt{2c_{p1}})$, где $h = c/N$. В наших численных экспериментах взрыв будет происходить в точке $(x_0, y_0) = (7,5\text{m}, 7,5\text{m})$ и задаваться функцией:

$$F_x(t, x, y) = f(t) \frac{\partial \delta(x - x_0)}{\partial x} \delta(y - y_0), F_y(t, x, y) = f(t) \delta(x - x_0) \frac{\partial \delta(y - y_0)}{\partial y},$$

$$f(t) = \begin{cases} -2\pi^2 f_0^2 (t - t_0) e^{-\pi^2 f_0^2 (t - t_0)^2}, & t \leq 2t_0, \\ 0, & t > 2t_0. \end{cases}$$

Здесь $t_0 = 1/f_0$, $f_0 = c_s / (hN_l)$ — средняя частота, $N_l = 20$ — коэффициент, отражающий число точек на длину волны. Поглощающий коэффициент $d(x)$ моделируется следующим образом:

$$d(x) = \tilde{d}_0 \left(\frac{x}{\delta} \right)^2, \tilde{d}_0 = \log \left(\frac{1}{R} \right) \frac{3c_{p1}}{2\delta},$$

где $\delta = 10h$ — толщина нашего слоя, а \tilde{d}_0 — функция коэффициента отражения $R = 0,001$.

Результаты численных расчетов волновых полей на заданной модели среды представлены на рис. 2 – 4. На этих изображениях видно образование дополнительной продольной волны в пористой среде и отсутствие отражений на границе исследуемой области вычислений.

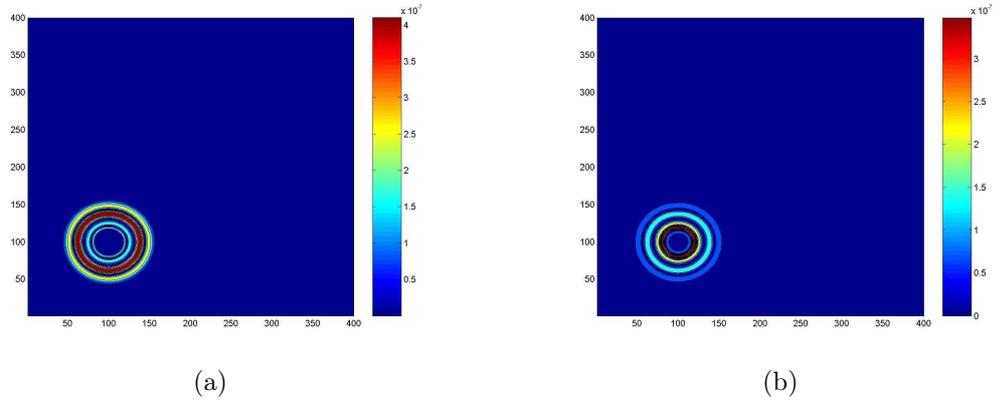


Рис. 2. Поля скорости (a): $\|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$; (b): $\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ при $t = 2,76$ ms

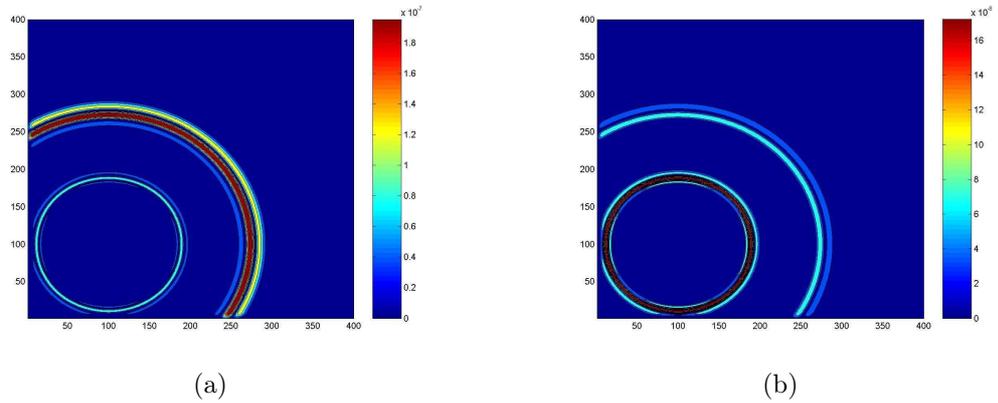


Рис. 3. Поле скорости (a): $\|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$; (b): $\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ при $t = 8,35$ ms

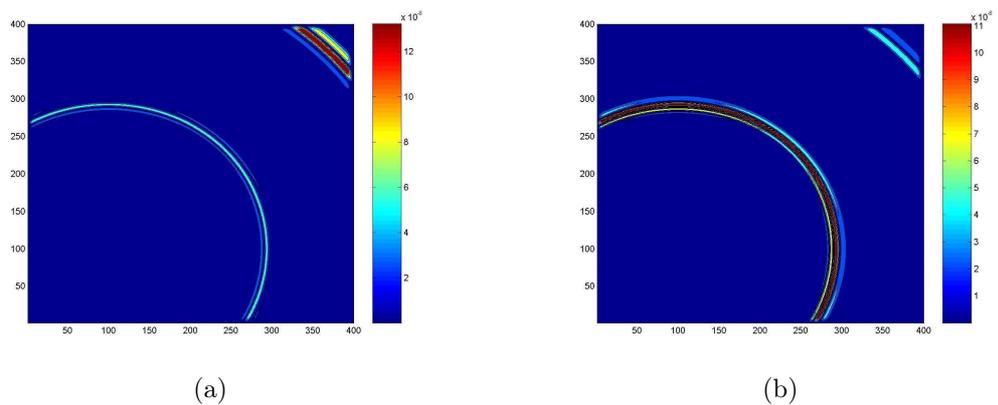


Рис. 4. Поле скорости (a): $\|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$; (b): $\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ при $t = 16,7$ ms

Список литературы

- [1] Х.Х. Имомназаров, А.А. Михайлов, Использование спектрального метода Лагерра для решения линейной двумерной динамической задачи для пористых сред, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **11**(2008), №3(35), 86–95.
- [2] Я.И. Френкель, К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве, *Изв. АН СССР, сер. География и геофизика*, **8**(1944), №4, 133–146.
- [3] М.А. Biot, Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, *J. Acoustic. Soc. America*, **28**(1956), 168–178.
- [4] В.Н. Доровский, Континуальная теория фильтрации, *Геология и геофизика*, (1989), №7, 39–45.
- [5] В.Н. Доровский, Ю.В. Перепечко, Е.И. Роменский, Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах, *Физика горения и взрыва.*, (1993), №1, 100–111.
- [6] А.М. Blokhin, V.N. Dorovsky, *Mathematical Modelling in the Theory of Multivelocitity Continuum*, N. Y., Nova Science, 1995.
- [7] Kh.Kh. Imomnazarov, A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium. I. Excitation of oscillation of the magnetic field by the surface rayleigh wave, *Math. Comput. Modelling.*, **24**(1996), №1, 79–84.
- [8] Х.Х. Имомназаров, Несколько замечаний о системе уравнений Био, *Докл. РАН*, **373**(2000), №4, 536–537.
- [9] Kh.Kh. Imomnazarov, Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium, *Appl. Math. Lett.*, **13**(2000), №3, 33–35.
- [10] Fr. Collino, Ch. Tsogka, Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media, *Rapport de recherché*, №3471, Aout 1998.

Numerical Solving of the Liner Two-dimensional Dynamic Problem in Liquid-filled Porous Media

**Konstantin E. Sorokin
Kholmatjon Kh. Imomnazarov**

In this paper the linear two-dimensional dynamic problem in a liquid-filled porous media is numerically solved. As the foundation we use the V.N. Dorovsky linearized model in which the media is described by three elastic parameters. To solve this problem we use a finite-differences scheme of the second order of accuracy. The PML model is also used in this paper. We present several numerical results for a test media which show the efficiency of this model.

Keywords: porous media, finite-difference schem, staggered grid, PML-model.