Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(4), 432-448

УДК 515.1

Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла

Леонид Н.Кривоносов
Вячеслав А.Лукьянов*
Нижегородский государственный технический университет им. Алексеева,
Минина 24, Н.Новгород, ГСП-41, 603950
Россия

Получена 12.06.2009, окончательный вариант 11.11.2009, принята к печати 20.11.2009

В статье показано, что уравнения Янга-Миллса на 4-мерном многообразии конформной связности без кручения сводятся к трем группам уравнений: 10-ти уравнениям Эйнштейна, 8-ми уравнениям Максвелла и 9-ти уравнениям движения вещества. В данной работе осуществлено успешное объединение гравитации и электромагнетизма в модели пространства конформной связности без кручения. Это делает оптимистичной идею объединения всех четырех видов взаимодействий в Природе в рамках 4-мерного многообразия конформной связности ***с кручением****.*

Ключевые слова: кривизна связности, кручение связности, оператор Ходжа, тождества Бианки, уравнения Эйнштейна, уравнения Максвелла, уравнения Янга-Миллса, 4-мерное многообразие конформной связности.

1. Введение

Изучение уравнений Янга-Миллса на 4-мерных многообразиях конформной связности преследует единственную цель — получение реалистической модели пространства-времени. Квадратная матрица 6-го порядка кривизны Φ такого многообразия состоит из 15 существенных компонент, представляющих собой внешние дифференциальные формы 2-го порядка от четырех локальных координат. На любом 4-многообразии конформной связности определен линейный оператор Ходжа $*$, действующий на множестве всех внешних дифференциальных 2-форм. В частности, матрице кривизны Φ он ставит в соответствие матрицу $*\Phi$. Так как матрица Φ удовлетворяет тождествам Бианки $d\Phi + \Omega \wedge \Phi - \Phi \wedge \Omega = 0$, то, потребовав, чтобы выполнялись уравнения Янга-Миллса $d * \Phi + \Omega \wedge *\Phi - *\Phi \wedge \Omega = 0$, мы наделяем многообразие двойственностью, которая реализует наблюдаемую в Природе двойственность элементарных частиц. Количества компонент матрицы Φ кривизны конформной связности достаточно, чтобы моделировать все 4 известных в Природе фундаментальных взаимодействия. В частности, форма Φ^0_0 моделирует электромагнитное взаимодействие, а формы Φ^1, Φ^2, Φ^3 и Φ^4 — слабое взаимодействие. Для сопоставления этой модели с реальностью необходимо найти хотя бы одно полное решение системы уравнений Янга-Миллса, представляющей собой в развернутом виде 60 нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка на 60 искомых функций. Даже с помощью вычислительных машин решить такую задачу в настоящее время не представляется возможным.

Но ситуация кардинально меняется, если пренебречь слабым взаимодействием, положив $\Phi^i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ (такое пространство конформной связности называется пространством

*e-mail: oxyzt@ya.ru

без кручения). Количество искомых функций в этом случае уменьшается вдвое: 10 коэффициентов угловой метрики $\psi = \eta_{ij}\omega^i\omega^j$, трактуемой как потенциал гравитационного поля; 16 коэффициентов пфаффовых форм ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, которые можно разбить на 10 коэффициентов квадратичной формы $\omega_i\omega^i$ и 6 компонент внешней формы $\omega_i \wedge \omega^i$, задающих соответственно распределение вещества и напряжений в нем, и 4 коэффициента пфаффовой формы ω_0^0, которую авторы назвали калибровочным потенциалом.

С помощью калибровочного преобразования нормализации можно уменьшить число искомых функций до 26, обратив в нуль пфаффову форму ω_0^0. В этом случае систему уравнений Янга-Миллса удается свести к трем группам: 10-ти уравнениям Эйнштейна, 8-ми уравнениям Максвелла и 10-ти уравнениям движения вещества. Последние уравнения связаны линейной алгебраической зависимостью, поэтому всего уравнений 27. Система переопределенная, но иначе и быть не могло, т.к. переопределенность — характерное свойство уравнений Максвелла. Как известно, от нее можно избавиться, если вместо 6-компонентного тензора электромагнитного поля перейти к 4-вектору потенциала. Тогда первая группа уравнений Максвелла $d\Phi_0^0 = 0$ становится тождеством, и вместо 8 остаются лишь 4 уравнения. В случае отсутствия электромагнитного поля переопределенности уже нет: остаются 19 уравнений чистой гравитации на 20 функций.(Результаты, касающиеся уравнений чистой гравитации, опубликованы авторами в [1]). Не всякое гравитационное поле допускает ненулевое электромагнитное поле. Метрика пространств Эйнштейна, а также метрика нулевой вейлевой кривизны не допускают электромагнитного поля. Чтобы показать существование решений уравнений Янга-Миллса с ненулевым электромагнитным полем, в статье выведены уравнения, в которых искомые функции зависят только от времени, и указано их явное решение в элементарных функциях.

В канонической калибровке (при $\omega_0^0 = 0$) уравнения Максвелла являются чисто полевыми (ток отсутствует). Отметим, что для реального наблюдателя каноническая калибровка глобально неосуществима, т.к. для этого надо знать ω_0^0 во все времена и во всем пространстве, но локально возможна. При $\omega_0^0 \neq 0$ электромагнитное поле Φ_0^0 является суммой калибровочного поля и поля напряжений:

$$\Phi_0^0 = d\omega_0^0 + \omega_i \wedge \omega^i.$$

Калибровочный потенциал ω_0^0 удовлетворяет уже уравнениям Максвелла самого общего вида

$$d * d\omega_0^0 = -d * \left(\omega_i \wedge \omega^i\right).$$

Так как правая часть уравнений Максвелла, записанная в таком виде, трактуется в электродинамике как электрический ток, приходим к неожиданному выводу, что электрический ток есть чисто калибровочное явление: в канонической калибровке ток исчезает.

В данной статье решается чисто математическая задача: как свести систему уравнений Янга-Миллса в пространстве конформной связности без кручения к указанным трем группам уравнений, и эта задача оказалась далеко не тривиальной. Но, поскольку возникшие в процессе решения этой задачи уравнения Максвелла и Эйнштейна являются объектами изучения физической теории, использование физической терминологии в истолковании полученных результатов является логической необходимостью.

Уравнения Янга-Миллса на 4-многообразии конформной связности воплотили в себе три основные идеи, применявшиеся при построении единой теории поля. Во-первых, идею Г.Вейля расширения группы движений до группы подобия, но группа подобия оказалась недостаточно широкой, а, главное, не простой. Наименьшей простой группой, содержащей группу движений пространства Минковского, является конформная группа. Во-вторых, идею Калуцы о переходе в 5-мерное пространство. Эта идея оказалась частично верной: хотя рассматриваемое нами многообразие конформной связности 4-мерное, но оно является базой расслоенного многообразия с 5-мерным проективным слоем, содержащим квадрику. Идея Калуцы долгое время привлекала внимание А.Эйнштейна, он развивал ее в целой серии статей. В частности, в [2] он, совместно с В.Майером, применил идею рассмотрения расслоенного многообразия с 4-мерной базой и 5-мерным векторным слоем, но все же этого оказалось недостаточно.

Главное, чего не хватало для решения задачи о единой теории поля в период наиболее интенсивных поисков, — это наличия уравнений Янга-Миллса. А когда в 1954 году появилась знаменитая статья Ч.Янга и Р.Л.Миллса, интерес к построению единых теорий несколько поостыл, а позднее поиски пошли по пути использования суперсимметрии.

2. Пространства конформной связности

Пространства конформной связности введены Э.Картаном [3, раздел 3]). Дифференцируемое 4-мерное многообразие называется пространством *конформной связности* сигнатуры $(4,2)$, если на каждой локальной карте задана матричная *форма связности*

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1^0 & ... & \omega_5^0 \\ \omega_0^1 & \omega_1^1 & ... & \omega_5^1 \\ ... & ... & ... & ... \\ \omega_0^5 & \omega_1^5 & ... & \omega_5^5 \end{pmatrix},$$

где все матричные элементы являются пфаффовыми формами от координат карты, связанные соотношениями

$$\begin{gathered} \eta_{ik}\omega_j^k + \eta_{jk}\omega_i^k = 0; \qquad \omega_i^5 + \eta_{ij}\omega_0^j = 0; \qquad \eta_{ij}\omega_5^j + \omega_i^0 = 0; \\ \omega_5^0 = \omega_0^5 = 0; \qquad \omega_5^5 = -\omega_0^0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь и далее все индексы пробегают значения $1, ..., 4$; по одноименным верхним и нижним индексам предполагается суммирование;

$$(\eta_{ij}) = \left(\eta^{ij}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \tag{2}$$

тензор пространства Минковского; формы ω_0^1; ω_0^2; ω_0^3 и ω_0^4 считаются линейно независимыми. В дальнейшем в двухиндексных внешних формах мы для удобства будем опускать индекс 0, если он входит один раз, т.е. считать $\omega_0^j = \omega^j$, $\omega_i^0 = \omega_i$ и т.д. Используя (1), форму связности Ω можно записать в виде

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & 0 \\ \omega^1 & 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & \omega_1^4 & \omega_1 \\ \omega^2 & \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^3 & -\omega_2^4 & -\omega_2 \\ \omega^3 & \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 & -\omega_3^4 & -\omega_3 \\ \omega^4 & \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & 0 & -\omega_4 \\ 0 & \omega^1 & -\omega^2 & -\omega^3 & -\omega^4 & -\omega_0^0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Координатные преобразования для пересекающихся локальных карт должны порождать *калибровочные преобразования* матрицы коэффициентов связности

$$\widetilde{\Omega} = S^{-1}dS + S^{-1}\Omega S,$$

где S в каждой точке пересечения локальных карт является квадратной матрицей 6-го порядка, переводящей квадратичную форму

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_0x_5 = 0$$

в себя. *Форма кривизны* конформной связности (3) задается формулой

$$\Phi = d\Omega + \Omega \wedge \Omega. \tag{4}$$

Здесь $d\Omega$ — это матрица, состоящая из продифференцированных внешне элементов матрицы Ω, символом $\wedge$ обозначено внешнее умножение, а в матрице $\Omega \wedge \Omega$ элементы получаются по правилу обычного умножения матриц. Из (3) и (4) следует, что

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0^0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & 0 \\ \Phi^1 & 0 & \Phi_1^2 & \Phi_1^3 & \Phi_1^4 & \Phi_1 \\ \Phi^2 & \Phi_1^2 & 0 & -\Phi_2^3 & -\Phi_2^4 & -\Phi_2 \\ \Phi^3 & \Phi_1^3 & \Phi_2^3 & 0 & -\Phi_3^4 & -\Phi_3 \\ \Phi^4 & \Phi_1^4 & \Phi_2^4 & \Phi_3^4 & 0 & -\Phi_4 \\ 0 & \Phi^1 & -\Phi^2 & -\Phi^3 & -\Phi^4 & -\Phi_0^0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Внешним дифференцированием (4) получаются *тождества Бианки*:

$$d\Phi + \Omega \wedge \Phi - \Phi \wedge \Omega = 0. \tag{6}$$

3. Конформное 4-многообразие без кручения

Пространство конформной связности называется пространством *без кручения*, если в матрице Φ конформной кривизны (5) внешние формы

$$\Phi^i = 0. \tag{7}$$

В любом пространстве конформной связности путем калибровочного преобразования нормализации

$$\begin{cases} \widetilde{\omega_0^0} = \omega_0^0 - \lambda_k\omega^k, \\ \widetilde{\omega^i} = \omega^i, \\ \widetilde{\omega_i^j} = \omega_i^j + \lambda_i\omega^j - \lambda^j\eta_{ik}\omega^k, \\ \widetilde{\omega}_i = \omega_i + d\lambda_i - \lambda_k\omega_i^k + \lambda_i\omega_0^0 - \lambda_i\lambda_k\omega^k + \frac{1}{2}\lambda\eta_{ik}\omega^k; \end{cases} \tag{8}$$

можно добиться равенства $\widetilde{\omega_0^0} = 0$, если взять в качестве λ_i коэффициенты разложения пфаффовой формы ω_0^0 по формам ω^i. Поэтому поначалу будем проводить рассуждения, предполагая

$$\omega_0^0 = 0. \tag{9}$$

С учетом этого равенства подробная запись формулы (4) такова:

$$\begin{gathered} \Phi_0^0 = \omega_i \wedge \omega^i; \qquad \Phi^i = d\omega^i + \omega_j^i \wedge \omega^j; \qquad \Phi_i = d\omega_i + \omega_j \wedge \omega_i^j; \\ \Phi_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega^i \wedge \omega_j + \eta^{im}\eta_{jn}\omega_m \wedge \omega^m. \end{gathered} \tag{10}$$

Отсюда равенства (7) равносильны

$$d\omega^i + \omega^i_j \wedge \omega^j = 0. \tag{11}$$

Эти равенства, совместно с первой группой равенств (1), означают, что пфаффовы формы ω^i_j являются *формами Кристоффеля* квадратичной формы

$$\psi = \eta_{ij}\omega^i\omega^j, \tag{12}$$

называемой *угловой метрикой* пространства конформной связности.

Мы будем использовать символ ∇ ковариантного внешнего дифференцирования относительно аффинной связности, задаваемой системой пфаффовых форм ω^i_j, а внешние формы *кривизны аффинной связности* будем обозначать

$$R^i_j \stackrel{def}{=} d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j.$$

В этих обозначениях последние три формулы (10) с учетом (7) примут вид

$$\nabla\omega^i = 0; \qquad \Phi_i = \nabla\omega_i;$$
$$\Phi^i_j = R^i_j + \omega^i \wedge \omega_j + \eta^{im}\eta_{jn}\omega_m \wedge \omega^n. \tag{13}$$

Поскольку в пространстве конформной связности без кручения формы ω^i_j однозначно определяются квадратичной формой (12), то матрица связности (3) такого пространства будет полностью определена заданием 10-ти коэффициентов квадратичной формы (12) и 16-ти коэффициентов разложения пфаффовых форм ω_i по базисным формам ω^i:

$$\omega_i = b_{ij}\omega^j. \tag{14}$$

На самом деле неявно присутствуют еще 4 коэффициента разложения формы ω^0_0, которые мы, согласно (9), временно исключили преобразованием нормализации. Таким образом, матрица (3) пространства конформной связности без кручения определяется заданием 30-ти функций.

Подставляя (14) в (10), найдем:

$$\Phi^0_0 = \tfrac{1}{2}b_{[ij]}\omega^j \wedge \omega^i; \tag{15}$$
$$\Phi_i = \tfrac{1}{2}b_{i[j|k]}\omega^k \wedge \omega^j. \tag{16}$$

Заключение индексов в квадратные скобки означает кососимметрирование по ним, т.е. $b_{[ij]} = b_{ij} - b_{ji}$, а вертикальная черта перед индексом означает ковариантную производную относительно связности ω^i_j в базисе ω^i, т.е. коэффициенты разложения

$$\nabla b_{ij} \stackrel{def}{=} db_{ij} - b_{ik}\omega^k_j - b_{kj}\omega^k_i = b_{ij|m}\omega^m.$$

Запишем подробно тождества Бианки (6) с учетом (7), (9) и символа ∇ ковариантного внешнего дифференцирования:

$$d\Phi^0_0 - \Phi_i \wedge \omega^i = 0; \tag{17}$$
$$\Phi^0_0 \wedge \omega^i - \Phi^i_j \wedge \omega^j = 0; \tag{18}$$
$$\nabla\Phi_i + \omega_k \wedge \Phi^k_i - \Phi^0_0 \wedge \omega_i = 0;$$
$$\nabla\Phi^i_j + \omega^i \wedge \Phi_j - \eta^{im}\eta_{jn}\Phi_m \wedge \omega^m = 0. \tag{19}$$

4. Уравнения Янга-Миллса

Введем величины $\varepsilon_{ij}^{kl} = \delta_{1234}^{klmn}\eta_{mi}\eta_{nj}$, где δ_{1234}^{klmn} — символ Кронекера. В подробной записи это означает, что

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_{12}^{34} = -1; & \varepsilon_{13}^{24} = 1; & \varepsilon_{14}^{23} = -1; \\ \varepsilon_{23}^{14} = 1; & \varepsilon_{24}^{13} = -1; & \varepsilon_{34}^{12} = 1. \end{array} \tag{20}$$

Величины ε_{kl}^{ij} порождают линейный оператор $*$, который определяется формулой

$$\theta = a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \longrightarrow *\theta = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{kl}^{ij}a_{ij}\omega^k \wedge \omega^l. \tag{21}$$

Оператор $*$ называется *оператором Ходжа.* Полагаем, по определению, $*\Phi \overset{def}{=} \left(*\Phi_i^j\right)$.

Уравнением Янга-Миллса в пространстве конформной связности называется уравнение

$$d * \Phi + \Omega \wedge *\Phi - *\Phi \wedge \Omega = 0. \tag{22}$$

Пространство конформной связности мы называем *пространством Янга-Миллса*, если его матрица конформной кривизны удовлетворяет уравнению Янга-Миллса (22). В подробной записи они имеют вид

$$d * \Phi_0^0 - *\Phi_i \wedge \omega^i = 0; \tag{23}$$

$$*\Phi_0^0 \wedge \omega^i - *\Phi_j^i \wedge \omega^j = 0; \tag{24}$$

$$\nabla * \Phi_i + \omega_k \wedge *\Phi_i^k - *\Phi_0^0 \wedge \omega_i = 0; \tag{25}$$

$$\nabla * \Phi_j^i + \omega^i \wedge *\Phi_j - \eta^{im}\eta_{jn} * \Phi_m \wedge \omega^n = 0. \tag{26}$$

5. Компонентная запись формул (18) и (24)

1. Пусть компоненты формы кривизны определяются разложением

$$\Phi_k^i = \tfrac{1}{2}\Phi_{kpq}^i\omega^p \wedge \omega^q. \tag{27}$$

Очевидно, функции Φ_{kpq}^i кососимметричны по последним двум индексам. Остальные свойства следуют из вида матрицы (5). Из (15) и (18) получим:

$$\Phi_{kpq}^i\omega^p \wedge \omega^q \wedge \omega^k = b_{[qp]}\omega^p \wedge \omega^q \wedge \omega^i. \tag{28}$$

При $i = 1$, приравнивая к нулю коэффициенты при линейно независимых 3-формах, запишем 4 равенства:

$$\Phi_{[23]1}^1 = b_{[32]}; \qquad \Phi_{[24]1}^1 = b_{[42]}; \qquad \Phi_{[34]1}^1 = b_{[43]}; \qquad \Phi_{(234)}^1 = 0.$$

Заключение индексов в круглые скобки означает сумму слагаемых, полученных круговой перестановкой индексов, т.е.

$$\Phi_{(jkl)}^i = \Phi_{jkl}^i + \Phi_{ljk}^i + \Phi_{klj}^i, \qquad b_{(ij)} = b_{ij} + b_{ji}$$

и т. д. Записывая тождества (28) при $i = 2, 3, 4$, получим систему равенств:

$$\Phi_{[ij]k}^k = b_{[ji]} \text{ (нет суммирования по } k\text{)}; \tag{29}$$

$$\Phi_{(jkl)}^i = 0 \text{ (все индексы различны)}. \tag{30}$$

2. С учетом (15), из равенства (24) следует, что

$$\Phi^i_{kmn}\varepsilon^{mn}_{pq}\omega^p\wedge\omega^q\wedge\omega^k = b_{[kj]}\varepsilon^{kj}_{pq}\omega^p\wedge\omega^q\wedge\omega^i.$$

   При $i=1$ увидим, что:

$$\begin{array}{cc} \Phi^2_{142}+\Phi^3_{143}=b_{[41]}; & \Phi^2_{132}+\Phi^4_{134}=b_{[31]}; \\ \Phi^3_{123}+\Phi^4_{124}=b_{[21]}; & \Phi^2_{112}+\Phi^3_{113}+\Phi^4_{114}=0. \end{array} \tag{31}$$

   Обозначим свертку Φ^i_{kpq} по верхнему и последнему нижнему индексам $\Phi^k_{ijk}\stackrel{def}{=}\Phi_{ij}$. Тогда система уравнений (31) запишется в виде $\Phi_{1j}=b_{[j1]}$. Придавая индексу i значения 2,3,4, получим, что

$$\Phi_{ij}+b_{[ij]}=0 \tag{32}$$

   при любых значениях индексов.

6. Главные формулы пространства конформной связности Янга-Миллса без кручения

Справедливы равенства:

$$\begin{array}{ccc} *\Phi^2_1=-\Phi^4_3; & *\Phi^3_1=\Phi^4_2; & *\Phi^4_1=-\Phi^3_2; \\ *\Phi^3_2=\Phi^4_1; & *\Phi^4_2=-\Phi^3_1; & *\Phi^4_3=\Phi^2_1. \end{array} \tag{33}$$

Покажем, например, что $*\Phi^2_1=-\Phi^4_3$. Из (27) и (21) следует, что

$$*\Phi^2_1=\frac{1}{4}\Phi^2_{1mn}\varepsilon^{mn}_{pq}\omega^p\wedge\omega^q; \qquad -\Phi^4_3=-\frac{1}{2}\Phi^4_{3pq}\omega^p\wedge\omega^q.$$

Т.е. достаточно показать, что для любых значений p и q верно равенство

$$\frac{1}{2}\Phi^2_{1mn}\varepsilon^{mn}_{pq}=-\Phi^4_{3pq}.$$

1. Рассмотрим, например, случай, когда $p=1$, а $q=2$. Так как, согласно (20), $\varepsilon^{34}_{12}=-1$, то нужно доказать, что $\Phi^2_{134}=\Phi^4_{312}$. Если сложить уравнения (30) при $i=1,2,3$ и вычесть равенство (30) при $i=4$, то как раз и получим требуемое равенство.

2. Пусть теперь $p=1$, а $q=3$. Теперь нужно доказать, что $\Phi^2_{124}=-\Phi^4_{313}$ или $\Phi^2_{142}+\Phi^3_{413}=0$. Из (29) делаем вывод, что $\Phi^2_{142}=\Phi^2_{412}+b_{[41]}$, но тогда по (32)

$$\Phi^2_{142}+\Phi^3_{413}=\Phi^2_{412}+b_{[41]}+\Phi^3_{413}=\Phi_{41}+b_{[41]}=0,$$

   что и требовалось доказать.

Остальные случаи рассматриваются аналогично, поэтому формулы (33) доказаны. Отметим, что они являются подробной записью общей формулы

$$*\Phi^j_k=\frac{1}{2}\varepsilon^{jp}_{kq}\Phi^q_p.$$

Это главная формула пространства конформной связности Янга-Миллса без кручения.

7. Компонентная запись формул (17) и (23)

1. Из (15) имеем $d\Phi_0^0 = \frac{1}{2} b_{[ij]|k}\omega^k \wedge \omega^j \wedge \omega^i$. Поэтому приведенными компонентами 3-формы $d\Phi_0^0$ являются
$$\tfrac{1}{6} b_{([ij]|k)}. \tag{34}$$
Из (16) и (34) получаем компонентную запись уравнений (17):
$$b_{(i[j|k])} = b_{([ij]|k)}, \qquad i, j, k - \text{различные}. \tag{35}$$

2. Из (15), (16) и (21) имеем
$$*\Phi_0^0 = \tfrac{1}{4} b_{[ij]}\varepsilon^{ij}_{pq}\omega^p \wedge \omega^q, \qquad *\Phi_i = \tfrac{1}{4} b_{i[q|p]}\varepsilon^{pq}_{kl}\omega^k \wedge \omega^l. \tag{36}$$
Тогда $d * \Phi_0^0 = \frac{1}{4} b_{[ij]|k}\varepsilon^{ij}_{pq}\omega^k \wedge \omega^p \wedge \omega^q$. Поэтому приведенными компонентами 3-формы $d * \Phi_0^0$ являются
$$\tfrac{1}{12} b_{[ij]|(k}\varepsilon^{ij}_{pq)} = \tfrac{1}{6}\eta^{ij} b_{[pi]|j}, \tag{37}$$
а приведенными компонентами 3-формы $*\Phi_i \wedge \omega^i$ являются
$$\tfrac{1}{6}\eta^{ij} b_{i[j|p]}. \tag{38}$$
Отсюда компонентная запись (23):
$$\eta^{ij} b_{[pi]|j} = \eta^{ij} b_{i[j|p]}. \tag{39}$$

8. Равносильность уравнений Янга-Миллса (24) и уравнений Эйнштейна

Обозначим $S^i_j \stackrel{def}{=} \omega^i \wedge \omega_j + \eta^{im}\eta_{jn}\omega_m \wedge \omega^n$. Пусть $S^i_j = \frac{1}{2} S^i_{jmn}\omega^m \wedge \omega^n$, тогда из (14) получаем компонентные равенства
$$S^i_{jmn} = b_{jn}\delta^i_m - b_{jm}\delta^i_n + \eta^{ip} b_{pm}\eta_{nj} - \eta^{ip} b_{pn}\eta_{mj}. \tag{40}$$
В новых обозначениях равенство (13) примет вид $\Phi^i_j = R^i_j + S^i_j$ или в компонентах
$$\Phi^i_{jmn} = R^i_{jmn} + S^i_{jmn}. \tag{41}$$
Свернув по индексам i и n, получим:
$$\Phi_{jm} = R_{jm} + S_{jm}. \tag{42}$$
Здесь R_{jm} — *тензор Риччи* квадратичной формы (12). Из (40) имеем:
$$S_{jm} = -2b_{jm} - b\eta_{jm}, \tag{43}$$
где $b \stackrel{def}{=} \eta^{ij} b_{ij}$. Так как, по доказанному выше, уравнения Янга-Миллса (24) равносильны (32) то, в силу (42) и (43), они равносильны *уравнениям Эйнштейна*
$$R_{jm} = b_{(jm)} + b\eta_{jm}. \tag{44}$$
Итак, **уравнения Янга-Миллса (24) равносильны уравнениям Эйнштейна (44).** В силу симметрии индексов, здесь не 16 уравнений, а только 10.

9. Связь уравнений Янга-Миллса (26) и уравнений Максвелла

Используя первую из формул (33), получим, что $\nabla\left(*\Phi_1^2+\Phi_3^4\right)=0$. С учетом (19) и (26) это равенство преобразуется в

$$*\Phi_2\wedge\omega^1+*\Phi_1\wedge\omega^2-\Phi_4\wedge\omega^3+\Phi_3\wedge\omega^4=0.$$

Из (16) и (36) будем иметь:

$$\tfrac{1}{4}b_{2[l|k]}\varepsilon^{kl}_{pq}\omega^p\wedge\omega^q\wedge\omega^1+\tfrac{1}{4}b_{1[l|k]}\varepsilon^{kl}_{pq}\omega^p\wedge\omega^q\wedge\omega^2-\tfrac{1}{2}b_{4[l|k]}\omega^k\wedge\omega^l\wedge\omega^3+\tfrac{1}{2}b_{3[l|k]}\omega^k\wedge\omega^l\wedge\omega^4=0.$$

Собирая коэффициенты при линейно независимых 3-формах, получим:

$$b_{(2[1|4])}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3+b_{(1[2|3])}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^4+\eta^{ij}b_{i[j|2]}\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega^4+\eta^{ij}b_{i[j|1]}\omega^1\wedge\omega^3\wedge\omega^4=0.$$

Используем (35) и (39):

$$b_{([21]|4)}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3+b_{([12]|3)}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^4+\eta^{ij}b_{[2i]|j}\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega^4+\eta^{ij}b_{[1i]|j}\omega^1\wedge\omega^3\wedge\omega^4=0.$$

Согласно (34) и (37), коэффициенты этого уравнения есть компоненты 3-форм $d\Phi_0^0$ и $d*\Phi_0^0$. Эти компоненты должны быть равны нулю. Аналогичным образом получим равенство нулю всех остальных компонент $d\Phi_0^0$ и $d*\Phi_0^0$. Поэтому уравнения (26) сводятся к системе:

$$d\Phi_0^0=0;\qquad d*\Phi_0^0=0.$$

Это *уравнения Максвелла.* Т.е. **уравнения Янга-Миллса (26) сводятся к уравнениям Максвелла.**

Итак, система уравнений Янга-Миллса (23)–(26) свелась к

$$\begin{gathered}*\Phi_i\wedge\omega^i=0;\\ *\Phi_0^0\wedge\omega^i-*\Phi_j^i\wedge\omega^j=0;\\ \nabla*\Phi_i+\omega_k\wedge*\Phi_i^k-*\Phi_0^0\wedge\omega_i=0;\\ d\Phi_0^0=0;\qquad d*\Phi_0^0=0.\end{gathered}\tag{45}$$

10. Упрощение системы (45)

Здесь мы покажем, что если выполняется второе уравнение системы (45) (уравнение Эйнштейна), то первое уравнение этой системы и уравнения Максвелла $d*\Phi_0^0=0$ равносильны.

Из (38) делаем вывод, что уравнение $*\Phi_i\wedge\omega^i=0$ равносильно

$$\eta^{ij}b_{i[j|k]}=0\tag{46}$$

или $\eta^{ij}b_{ij|k}-\eta^{ij}b_{ik|j}=0$. Выделим во втором слагаемом симметрическую часть $b_{(ik)}$ и кососимметрическую часть $b_{[ik]}$ и учтем, что $\eta^{ij}b_{ij}=b$:

$$\left(b_{|k}-\tfrac{1}{2}\eta^{ij}b_{(ik)|j}\right)-\tfrac{1}{2}\eta^{ij}b_{[ik]|j}=0.\tag{47}$$

Свернув уравнения Эйнштейна (44) с η^{jm}, получим, что

$$R=6b,\tag{48}$$

где $R \stackrel{def}{=} \eta^{ij}R_{ij}$. Из (44) можно также получить, что $R_{ik|j} = b_{(ik)|j} + \eta_{ik}b_{|j}$. Свернем это равенство с η^{ij}:

$$\eta^{ij}R_{ik|j} = \eta^{ij}b_{(ik)|j} + b_{|k}.$$

Используем теперь известное тождество для тензора Риччи $\eta^{ij}R_{ik|j} = \frac{1}{2}R_{|k}$ ([4], с. 105) и придем к

$$\tfrac{1}{2}R_{|k} = \eta^{ij}b_{(ik)|j} + b_{|k}.$$

В силу (48) получим, что

$$b_{|k} - \tfrac{1}{2}\eta^{ij}b_{(ik)|j} = 0, \tag{49}$$

т.е. в равенстве (47) слагаемое в скобках равно нулю, поэтому первое уравнение системы (45) равносильно $\eta^{ij}b_{[ik]|j} = 0$. Но это, согласно (37), есть компонентная запись уравнений Максвелла $d * \Phi_0^0 = 0$. Таким образом, в системе (45) первое уравнение можно отбросить, и она перепишется в виде

$$\begin{gathered} *\Phi_0^0 \wedge \omega^i - *\Phi_j^i \wedge \omega^j = 0; \\ \nabla * \Phi_i + \omega_k \wedge *\Phi_i^k - *\Phi_0^0 \wedge \omega_i = 0; \\ d\Phi_0^0 = 0; \qquad d * \Phi_0^0 = 0. \end{gathered} \tag{50}$$

Компонентная запись этой системы такова:

$$\begin{gathered} R_{jm} = b_{(jm)} + b\eta_{jm}; \\ \eta^{mn}\left(-b_{i[j|m]n} + b_{im}b_{[jn]} + b_{km}\Phi^k_{ijn}\right) = 0; \\ b_{(i[j|k])} = 0; \\ \eta^{ij}b_{i[j|k]} = 0. \end{gathered} \tag{51}$$

11. Преобразование кососимметрической части уравнения $\eta^{mn}\left(-b_{i[j|m]n} + b_{im}b_{[jn]} + b_{km}\Phi^k_{ijn}\right) = 0$

Кососимметрическая часть второго уравнения системы (51) имеет вид

$$\eta^{mn}\left(-b_{i[j|m]n} + b_{j[i|m]n} + b_{im}b_{[jn]} - b_{jm}b_{[in]} + b_{km}\Phi^k_{[ij]n}\right) = 0. \tag{52}$$

Применяя третью формулу системы (51) к первой части этого уравнения

$$A_{ij} \stackrel{def}{=} \eta^{mn}\left(-b_{i[j|m]n} + b_{j[i|m]n}\right) = \eta^{mn}\left(-b_{i[j|m]n} - b_{j[m|i]n}\right),$$

получим:

$$A_{ij} = \eta^{mn}b_{m[i|j]n} = \eta^{mn}\left(b_{mi|[jn]} - b_{mj|[in]} + b_{mi|nj} - b_{mj|ni}\right).$$

К последним двум слагаемым применим последнюю формулу (51):

$$A_{ij} = \eta^{mn}\left(b_{mi|[jn]} - b_{mj|[in]} + b_{mn|[ij]}\right). \tag{53}$$

Для дважды ковариантного тензора b_{ij} справедливо правило двойного косого дифференцирования [4, с. 42]

$$b_{ij|[mn]} = b_{pj}R^p_{imn} + b_{ip}R^p_{jmn}. \tag{54}$$

Кроме этого, вторая косая производная от скалярной функции всегда равна нулю: $\eta^{mn} b_{mn|[ij]} = b_{|[ij]} = 0$. Поэтому (53) можно записать в виде

$$A_{ij} = \eta^{mn} \left(-b_{pi} R^p_{mni} - b_{mp} R^p_{inj} + b_{pj} R^p_{mni} + b_{mp} R^p_{jni} \right). \tag{55}$$

Применим к 2-му и 4-му слагаемым известное тождество $R^p_{(mni)} = 0$ и учтем, что

$$\eta^{mn} R^p_{mni} = R^p_{\cdot i} = \eta^{ps} R_{si}. \tag{56}$$

Тогда (55) запишется в виде

$$A_{ij} = -b_{pi} \eta^{ps} R_{sj} + b_{pj} \eta^{ps} R_{si} + \eta^{mn} b_{mp} R^p_{nji}.$$

Подставив в первые два слагаемых выражения из первого равенства (51), окончательно получим:

$$A_{ij} = -b b_{[ji]} - \eta^{mn} \left(b_{mi} b_{jn} - b_{im} b_{nj} \right) + \eta^{mn} b_{mp} R^p_{nji}. \tag{57}$$

Теперь преобразуем среднюю часть уравнения (52):

$$B_{ij} \overset{def}{=} \eta^{mn} \left(b_{im} b_{[jn]} - b_{jm} b_{[in]} \right) = \eta^{mn} \left(b_{mi} b_{jn} - b_{im} b_{nj} \right). \tag{58}$$

Наконец, преобразуем последнюю часть уравнений (52):

$$C_{ij} \overset{def}{=} \eta^{mn} b_{km} \Phi^k_{[ij]n} = \eta^{mn} b_{km} \left(\Phi^k_{ijn} + \Phi^k_{jni} \right).$$

Для этого используем тождество $\Phi^k_{(ijn)} = \delta^k_{(n} b_{[ji])}$, справедливость которого следует из формул (29) и (30). Тогда

$$C_{ij} = \eta^{mn} b_{km} \Phi^k_{nji} + \eta^{mn} b_{km} \delta^k_{(n} b_{[ji])} = \eta^{mn} b_{km} \Phi^k_{nji} + b b_{[ji]} - \eta^{mn} \left(b_{mi} b_{jn} - b_{im} b_{nj} \right).$$

С помощью (41) представим $\Phi^k_{nji} = R^k_{nji} + S^k_{nji}$ и вычислим по формуле (40)

$$\eta^{mn} b_{km} S^k_{nji} = \eta^{mn} \left(b_{mi} b_{jn} - b_{im} b_{nj} \right).$$

Тогда C_{ij} примет вид

$$C_{ij} = b b_{[ji]} + \eta^{mn} b_{pm} R^p_{nji}. \tag{59}$$

Складывая (57), (58) и (59), получим преобразованное уравнение (52): $\eta^{mn} b_{(mp)} R^p_{nji} = 0$. Это равенство выполняется тождественно, т.к.

$$\eta^{mn} b_{(mp)} R^p_{nji} = b_{(mp)} R^{pm}_{\cdot\cdot ji},$$

и мы имеем свертку симметрического тензора $b_{(mp)}$ и кососимметрического по верхним двум индексам тензора $R^{pm}_{\cdot\cdot ji}$. Таким образом, все 6 уравнений (52) являются следствием уравнений Эйнштейна и Максвелла.

12. Преобразование симметрической части уравнения $\eta^{\mathbf{mn}} \left(-\mathbf{b}_{\mathbf{i}[\mathbf{j}|\mathbf{m}]\mathbf{n}} + \mathbf{b}_{\mathbf{im}} \mathbf{b}_{[\mathbf{jn}]} + \mathbf{b}_{\mathbf{km}} \mathbf{\Phi}^{\mathbf{k}}_{\mathbf{ijn}} \right) = 0$

Симметрическая часть второго уравнения системы (51) имеет вид

$$\eta^{mn} \left(-b_{i[j|m]n} - b_{j[i|m]n} + b_{im} b_{[jn]} + b_{jm} b_{[in]} + b_{km} \Phi^k_{(ij)n} \right) = 0. \tag{60}$$

Обозначим первую часть $A \overset{def}{=} \eta^{mn} \left(-b_{i[j|m]n} - b_{j[i|m]n} \right)$. Имеем:

$$\begin{gathered}A=\eta^{mn}\left(-b_{ij|mn}+b_{im|jn}-b_{ji|mn}+b_{jm|in}\right)=\\=\eta^{mn}\left(-b_{(ij)|mn}+b_{(im)|jn}-b_{mi|jn}+b_{(jm)|in}-b_{mj|in}\right)=\\=\eta^{mn}\left(-b_{(ij)|mn}+b_{(im)|jn}+b_{(jm)|in}-b_{mi|[jn]}-b_{mj|[in]}-b_{mi|nj}-b_{mj|ni}\right).\end{gathered}$$

К двум последним слагаемым применим последнюю формулу (51):

$$\eta^{mn}\left(b_{mi|nj}+b_{mj|ni}\right)=\eta^{mn}\left(b_{mn|ij}+b_{mn|ji}\right)=b_{|(ij)},$$

а к 4-му и 5-му слагаемым — формулу (54). Тогда с помощью (56) получим:

$$A=\eta^{mn}\left(-b_{(ij)|mn}+b_{(im)|jn}+b_{(jm)|in}-b_{mp}R^{p}_{(ij)n}\right)+b_{pi}R^{p}_{\cdot j}+b_{pj}R^{p}_{\cdot i}-b_{|(ij)}.$$

В силу (49), (56) и (54) второе и третье слагаемые в скобках запишутся так:

$$\begin{gathered}\eta^{mn}b_{(im)|jn}=\eta^{mn}\left(b_{(im)|[jn]}+b_{(im)|nj}\right)=\\=\eta^{mn}\left(b_{(ip)}R^{p}_{mjn}+b_{(pm)}R^{p}_{ijn}\right)+2b_{|ij}=-b_{(ip)}R^{p}_{\cdot j}+\eta^{mn}b_{(pm)}R^{p}_{ijn}+2b_{|ij};\\\eta^{mn}b_{(jm)|in}=-b_{(jp)}R^{p}_{\cdot i}+\eta^{mn}b_{(pm)}R^{p}_{jin}+2b_{|ji}.\end{gathered}$$

Подставив эти формулы в выражение для A, после упрощений получим:

$$A=\eta^{mn}\left(-b_{(ij)|mn}+b_{pm}R^{p}_{(ij)n}\right)+b_{|(ij)}-b_{ip}R^{p}_{\cdot j}-b_{jp}R^{p}_{\cdot i}.$$

Воспользовавшись (56) и первой формулой (51) для записи последних двух слагаемых, окончательно будем иметь:

$$A=\eta^{mn}\left(-b_{(ij)|mn}+b_{pm}R^{p}_{(ij)n}-b_{im}b_{(nj)}-b_{jm}b_{(ni)}\right)-bb_{(ij)}+b_{|(ij)}. \tag{61}$$

Теперь преобразуем среднюю часть (60):

$$B\stackrel{def}{=}\eta^{mn}\left(b_{im}b_{[jn]}+b_{jm}b_{[in]}\right)=\eta^{mn}\left(2b_{im}b_{jn}-b_{im}b_{nj}-b_{jm}b_{ni}\right). \tag{62}$$

Наконец, последняя часть (60) преобразуется с помощью формул (41) и (40):

$$\begin{gathered}C\stackrel{def}{=}\eta^{mn}b_{pm}\Phi^{p}_{(ij)n}=\eta^{mn}b_{pm}R^{p}_{(ij)n}+\eta^{mn}b_{pm}S^{p}_{(ij)n}=\\=\eta^{mn}b_{pm}R^{p}_{(ij)n}+\eta^{mn}b_{pm}\left(b_{in}\delta^{p}_{j}-b_{ij}\delta^{p}_{n}+\eta^{pk}b_{kj}\eta_{ni}-\eta^{pk}b_{kn}\eta_{ji}\right)+\\+\eta^{mn}b_{pm}\left(b_{jn}\delta^{p}_{i}-b_{ji}\delta^{p}_{n}+\eta^{pk}b_{ki}\eta_{nj}-\eta^{pk}b_{kn}\eta_{ij}\right).\end{gathered}$$

Обозначив $Q\stackrel{def}{=}\eta^{ij}\eta^{mn}b_{im}b_{jn}$, после упрощений получим:

$$C=\eta^{mn}\left(b_{pm}R^{p}_{(ij)n}+2b_{im}b_{jn}+2b_{mi}b_{nj}\right)-bb_{(ij)}-2Q\eta_{ij}. \tag{63}$$

Так как (60) равносильно $A+B+C=0$, складывая (61), (62) и (63), придем к

$$\eta^{mn}\left(-b_{(ij)|mn}+2b_{pm}R^{p}_{(ij)n}+2b_{[im]}b_{[jn]}\right)-2bb_{(ij)}+b_{|(ij)}-2Q\eta_{ij}=0. \tag{64}$$

Второе слагаемое в скобках можно записать в виде

$$2\eta^{mn}b_{pm}R^{p}_{(ij)n}=\eta^{mn}b_{(pm)}R^{p}_{(ij)n}+\eta^{mn}b_{[pm]}R^{p}_{(ij)n}.$$

Используя известное свойство компонент тензора кривизны

$$R^{p}_{ijn}=\eta^{ps}R_{sijn}=\eta^{ps}R_{njis},$$

легко установить, что $\eta^{mn} b_{[pm]} R^p_{(ij)n} = 0$. Поэтому (64) окончательно запишем так:

$$\eta^{mn}\left(-b_{(ij)|mn} + b_{(pm)} R^p_{(ij)n} + 2b_{[im]} b_{[jn]}\right) - 2b b_{(ij)} + b_{|(ij)} - 2Q\eta_{ij} = 0. \tag{65}$$

В итоге получили, что второе уравнение (51) равносильно 10-ти уравнениям (65). Свертывая (65) с η^{ij}, после преобразований получаем тождественный нуль, поэтому из 10 уравнений (65) независимых только 9. Итак, (51) - это система 10+9+4+4=27 уравнений на 26 неизвестных: 16 функций b_{im} и 10 коэффициентов квадратичной формы (12).

В случае пространства Эйнштейна, когда $R_{ij} = \varkappa\eta_{ij}$, из первого уравнения (51) получим $b_{(ij)} = \frac{1}{3}\varkappa\eta_{ij}$. Так как $\varkappa$ — константа, $b_{(ij)|mn} = b_{|(ij)} = 0$, поэтому после упрощений (65) придем к

$$\eta^{mn} b_{[im]} b_{[jn]} = \tfrac{1}{4}\eta^{mn}\eta^{pq} b_{[mp]} b_{[nq]} \eta_{ij}. \tag{66}$$

Записывая это алгебраическое уравнение в компонентах, убеждаемся, что оно имеет только нулевое решение. Делаем вывод: **пространства Эйнштейна электромагнитного поля не допускают.**

13. Уравнения Янга-Миллса на конформном многообразии нулевой вейлевой кривизны

Тензор Вейля имеет следующее выражение через тензор кривизны квадратичной формы [4, с.115]:

$$C^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \tfrac{1}{2}\left(\delta^i_m R_{jn} - \delta^i_n R_{jm} + \eta^{ip}\left(\eta_{jn} R_{pm} - \eta_{jm} R_{pn}\right)\right) + \tfrac{R}{6}\left(\delta^i_n \eta_{jm} - \delta^i_m \eta_{jn}\right). \tag{67}$$

Как известно [4, с.115], он удовлетворяет соотношению

$$C^p_{ijk|p} = \tfrac{1}{2}\left(R_{ij|k} - R_{ik|j} + \tfrac{1}{6}\left(\eta_{ik} R_{|j} - \eta_{ij} R_{|k}\right)\right).$$

Если $C^i_{jmn} = 0$, получаем

$$R_{ij|k} = R_{ik|j} - \tfrac{1}{6}\left(\eta_{ik} R_{|j} - \eta_{ij} R_{|k}\right). \tag{68}$$

Воспользовавшись первым уравнением (51) и равенством (48), убедимся, что (68) равносильно $b_{(ij)|k} = b_{(ik)|j}$. С помощью этого равенства преобразуем первое слагаемое в уравнении (65).

$$\eta^{mn} b_{(ij)|mn} = \eta^{mn} b_{(im)|jn} = \eta^{mn}\left(b_{(im)|[jn]} + b_{(im)|nj}\right).$$

Теперь воспользуемся (54), (49) и (56):

$$\begin{gathered}\eta^{mn} b_{(ij)|mn} = \eta^{mn}\left(b_{(pm)} R^p_{ijn} + b_{(ip)} R^p_{mjn}\right) + 2b_{|ij} = \\ = \eta^{mn} b_{(pm)} R^p_{ijn} - \eta^{mn} b_{(ip)} R^p_{mnj} + 2b_{|ij} = \eta^{mn} b_{(pm)} R^p_{ijn} - \eta^{pq} b_{(ip)} R_{qj} + 2b_{|ij}.\end{gathered}$$

Тогда первые два слагаемых в (65) примут вид

$$\eta^{mn}\left(-b_{(ij)|mn} + b_{(pm)} R^p_{(ij)n}\right) = \eta^{mn} b_{(pm)} R^p_{jin} + \eta^{pq} b_{(ip)} R_{qj} - 2b_{|ij}. \tag{69}$$

Из равенств (67), (48), а также из $C^i_{jmn} = 0$ имеем

$$R^i_{jmn} = -\tfrac{1}{2}\left(\delta^i_m R_{jn} - \delta^i_n R_{jm} + \eta^{ip}\eta_{jn} R_{pm} - \eta^{ip}\eta_{jm} R_{pn}\right) - b\left(\delta^i_n \eta_{jm} - \delta^i_m \eta_{jn}\right).$$

Подставив это выражение, а также первое равенство (51) в (69), после упрощений получим

$$\eta^{mn}\left(-b_{(ij)|mn}+b_{(pm)}R^{p}_{(ij)n}\right)=2bb_{(ij)}-2b_{|ij}+\tfrac{1}{2}\eta^{ps}\eta^{mn}b_{pm}b_{sn}.$$

В силу этого равенства, уравнение (65) преобразуется в (66), которое выполняется только при $b_{[ij]}=0$. Делаем вывод: **уравнения Максвелла несовместимы с метрикой нулевой вейлевой кривизны.**

14. Уравнения Янга-Миллса с ненулевой пфаффовой формой ω_0^0

Относительно калибровочного преобразования нормализации (8) компоненты матрицы конформной кривизны при отсутствии кручения преобразуются следующим образом:

$$\widetilde{\Phi_0^0}=\Phi_0^0;\qquad \widetilde{\Phi_j^i}=\Phi_j^i;\qquad \widetilde{\Phi}_i=\Phi_i-\lambda_k\Phi_i^k+\lambda_i\Phi_0^0. \tag{70}$$

В силу (8), $\widetilde{\omega}^i=\omega^i$, поэтому из равенств (70) получаем:

$$\begin{gathered}*\widetilde{\Phi_0^0}=*\Phi_0^0;\qquad *\widetilde{\Phi_j^i}=*\Phi_j^i;\\ *\widetilde{\Phi}_i=*\Phi_i-\lambda_k*\Phi_i^k+\lambda_i*\Phi_0^0.\end{gathered} \tag{71}$$

Таким образом, и при $\omega_0^0\neq 0$ система уравнений Янга-Миллса (50) почти без изменений сводится к

$$\begin{gathered}*\widetilde{\Phi_0^0}\wedge\omega^i-*\widetilde{\Phi_j^i}\wedge\omega^j=0;\\ \nabla*\widetilde{\Phi_i}+*\widetilde{\Phi_i^k}\wedge\omega_k-*\widetilde{\Phi_0^0}\wedge\omega_i+*\widetilde{\Phi_i}\wedge\omega_0^0=0;\\ d\widetilde{\Phi_0^0}=0;\qquad d*\widetilde{\Phi_0^0}=0.\end{gathered} \tag{72}$$

В п. 10 было показано, что при $\omega_0^0=0$ еще одна группа системы уравнений Янга-Миллса (45), $*\Phi_i\wedge\omega^i=0$, является следствием двух других уравнений этой системы. Этот же факт имеет место и при $\omega_0^0\neq 0$. В самом деле, в силу (71),

$$*\widetilde{\Phi_i}\wedge\omega^i=*\Phi_i\wedge\omega^i-\lambda_k*\Phi_i^k\wedge\omega^i+\lambda_i*\Phi_0^0\wedge\omega^i.$$

Первое слагаемое правой части равно нулю (п. 10), а если вместо $*\Phi_i^k\wedge\omega^i$ подставить его выражение из (45), последние два слагаемых взаимно уничтожатся.

15. Калибровочное поле

Каноническая калибровка, в которой $\omega_0^0=0$, всегда осуществима математически, но недостижима для реального наблюдателя, так как для этого надо знать форму ω_0^0 во всем пространстве и во все времена. Для наблюдателя же она известна лишь в некоторой окрестности точки его пребывания. Поэтому реальный наблюдатель видит окружающий мир сквозь "призму" калибровочного поля $d\omega_0^0$, задаваемого калибровочным потенциалом ω_0^0. Из равенства

$$\Phi_0^0=d\omega_0^0+\omega_i\wedge\omega^i,$$

которое является общим случаем первой формулы (10), мы видим, что калибровочное поле есть разность между электромагнитным полем Φ_0^0 и полем калибровочных напряжений $\omega_i\wedge\omega^i$.

Калибровочный потенциал удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$d * d\omega_0^0 + d * \left(\omega_i \wedge \omega^i\right) = 0 \tag{73}$$

во всей их общности. Согласно общепринятой трактовке составных частей уравнений Максвелла для потенциала, внешнюю 3-форму

$$I \overset{def}{=} -d * \left(\omega_i \wedge \omega^i\right)$$

следует называть током. Из (73) получим, что

$$I = d * d\omega_0^0. \tag{74}$$

Внешнее дифференцирование этого равенства приводит к уравнению сохранения тока $dI = 0$. Так как правая часть (74) в канонической калибровке равна нулю, то и ток равен нулю. Таким образом, ток — явление чисто калибровочное.

Отметим, что как уравнения Максвелла для калибровочного потенциала, так и уравнения Эйнштейна остаются в силе и в *свободном* пространстве конформной связности ($\Phi = 0$).

16. Неоднозначность канонической калибровки

Предположим, что осуществлена каноническая калибровка ($\omega_0^0 = 0$), и пусть μ — произвольная функция. Совершим сначала преобразование нормализации с параметрами $\lambda_i = \mu_{|i}$, а затем — преобразование перенормировки

$$\omega^i \to e^{\mu}\omega^i; \qquad \omega_i \to e^{-\mu}\omega_i; \qquad \omega_0^0 \to \omega_0^0 + d\mu; \qquad \omega_i^k \to \omega_i^k.$$

В результате этого комбинированного калибровочного преобразования пфаффова форма ω_0^0 остается нулевой, а остальные формы изменяются следующим образом:

$$\begin{gathered} \widetilde{\omega_i} = e^{-\mu}\left(\omega_i + \nabla\mu_{|i} - \mu_{|i}\mu_{|j}\omega^j + \tfrac{1}{2}\eta^{km}\mu_{|k}\mu_{|m}\eta_{ij}\omega^j\right); \\ \widetilde{\omega^i} = e^{\mu}\omega^i; \qquad \widetilde{\omega_i^k} = \omega_i^k + \mu_{|i}\omega^k - \eta^{kj}\mu_{|j}\eta_{im}\omega^m. \end{gathered} \tag{75}$$

Полагая $\nabla\mu_{|i} = \mu_{|ij}\omega^j$ и $\widetilde{\omega_i} = \widetilde{b_{ij}}\widetilde{\omega^j}$, из (75) найдем

$$\widetilde{b_{ij}} = e^{-2\mu}\left(b_{ij} + \mu_{|ij} - \mu_{|i}\mu_{|j} + \tfrac{1}{2}\eta^{km}\mu_{|k}\mu_{|m}\eta_{ij}\right).$$

Отсюда, свертывая с η^{ij}, получим

$$\eta^{ij}\widetilde{b_{ij}} \overset{def}{=} \widetilde{b} = e^{-2\mu}\left(b + \eta^{ij}\mu_{|ij} + \eta^{ij}\mu_{|i}\mu_{|j}\right).$$

Отыскивая μ из дифференциального уравнения

$$b + \eta^{ij}\left(\mu_{|ij} + \mu_{|i}\mu_{|j}\right) = 0,$$

добьемся равенства $\widetilde{b} = 0$. Но и это условие не делает каноническую калибровку однозначной. Все еще можно, оставаясь в пределах канонической калибровки, осуществлять комбинированное калибровочное преобразование с параметром μ, удовлетворяющим дифференциальному уравнению $\eta^{ij}\left(\mu_{|ij} + \mu_{|i}\mu_{|j}\right) = 0$. Эта неустранимость калибровки подчеркивает важную роль нефундаментального калибровочного потенциала ω_0^0.

17. Пример чисто временного решения уравнений Янга-Миллса в пространстве без кручения

Пусть угловая метрика (12) имеет вид

$$\psi = -dt^2 + a^2\left(dx_1\right)^2 + b^2\left(dx_2\right)^2 + c^2\left(dx_3\right)^2,$$

где функции a, b, c зависят только от времени t. Производную по t мы будем обозначать точкой. Тогда

$$\omega^1 = dt, \qquad \omega^2 = adx_1, \qquad \omega^3 = bdx_2, \qquad \omega^4 = dx_3.$$

Вычисления показывают, что компоненты тензора Риччи таковы:

$$R_{11} = \frac{\ddot a}{a} + \frac{\ddot b}{b} + \frac{\ddot c}{c}, \qquad R_{22} = -\frac{\ddot a}{a} - \frac{\dot a}{a}\frac{\dot b}{b} - \frac{\dot a}{a}\frac{\dot c}{c},$$
$$R_{33} = -\frac{\ddot b}{b} - \frac{\dot c}{c}\frac{\dot b}{b} - \frac{\dot a}{a}\frac{\dot b}{b}, \qquad R_{44} = -\frac{\ddot c}{c} - \frac{\dot a}{a}\frac{\dot c}{c} - \frac{\dot c}{c}\frac{\dot b}{b}.$$

Отсюда

$$R = \eta^{ij}R_{ij} = -2\left(\frac{\ddot a}{a} + \frac{\ddot b}{b} + \frac{\ddot c}{c} + \frac{\dot a}{a}\frac{\dot b}{b} + \frac{\dot a}{a}\frac{\dot c}{c} + \frac{\dot c}{c}\frac{\dot b}{b}\right).$$

Считаем, что $\omega_0^0 = 0$. Запишем (44) в виде $b_{(jm)} = R_{jm} - \frac{1}{6}R\eta_{jm}$ и получим:

$$\begin{gathered} b_{(ij)} = 0 \text{ при } i \neq j; \\ b_{11} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\ddot a}{a} + \frac{\ddot b}{b} + \frac{\ddot c}{c}\right) - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\dot a}{a}\frac{\dot b}{b} + \frac{\dot a}{a}\frac{\dot c}{c} + \frac{\dot c}{c}\frac{\dot b}{b}\right) \overset{def}{=} b_1; \\ b_{22} = -\tfrac{1}{3}\left(\frac{\ddot a}{a} + \frac{\dot a}{a}\frac{\dot b}{b} + \frac{\dot a}{a}\frac{\dot c}{c}\right) + \tfrac{1}{6}\left(\frac{\ddot b}{b} + \frac{\ddot c}{c} + \frac{\dot c}{c}\frac{\dot b}{b}\right) \overset{def}{=} b_2; \\ b_{33} = -\tfrac{1}{3}\left(\frac{\ddot b}{b} + \frac{\dot a}{a}\frac{\dot b}{b} + \frac{\dot c}{c}\frac{\dot b}{b}\right) + \tfrac{1}{6}\left(\frac{\ddot a}{a} + \frac{\ddot c}{c} + \frac{\dot a}{a}\frac{\dot c}{c}\right) \overset{def}{=} b_3; \\ b_{44} = -\tfrac{1}{3}\left(\frac{\ddot c}{c} + \frac{\dot a}{a}\frac{\dot c}{c} + \frac{\dot c}{c}\frac{\dot b}{b}\right) + \tfrac{1}{6}\left(\frac{\ddot a}{a} + \frac{\ddot b}{b} + \frac{\dot a}{a}\frac{\dot b}{b}\right) \overset{def}{=} b_4. \end{gathered} \tag{76}$$

Положим

$$\begin{aligned} \omega_1 &= b_1\omega^1 + b_{12}\omega^2; \qquad & \omega_2 &= -b_{12}\omega^1 + b_2\omega^2; \\ \omega_3 &= b_3\omega^3 + b_{34}\omega^4; \qquad & \omega_4 &= -b_{34}\omega^3 + b_4\omega^4. \end{aligned}$$

Уравнения Максвелла приведут к $b_{12}bc = M$ и $b_{34}bc = N$, где M и N — константы.

Третья группа уравнений Янга-Миллса (45) даст нам 4 уравнения:

$$-\frac{\dot a}{a}\left(\dot b_2 + \left(b_1 + b_2\right)\frac{\dot a}{a}\right) - \frac{\dot b}{b}\left(\dot b_3 + \left(b_1 + b_3\right)\frac{\dot b}{b}\right) - \frac{\dot c}{c}\left(\dot b_4 + \left(b_1 + b_4\right)\frac{\dot c}{c}\right) +$$
$$+2\left(b_{12}\right)^2 + 2\left(b_{34}\right)^2 + b_2\left(\frac{\ddot a}{a} + b_2 - b_1\right) + b_3\left(\frac{\ddot b}{b} + b_3 - b_1\right) + b_4\left(\frac{\ddot c}{c} + b_4 - b_1\right) = 0;$$

$$\left(\dot b_2 + \left(b_1 + b_2\right)\frac{\dot a}{a}\right)^{\cdot} + \left(\dot b_2 + \left(b_1 + b_2\right)\frac{\dot a}{a}\right)\left(\frac{\dot b}{b} + \frac{\dot c}{c}\right) - 2\left(b_{12}\right)^2 - 2\left(b_{34}\right)^2$$
$$+b_1\left(\frac{\ddot a}{a} + b_2 - b_1\right) + b_3\left(-\frac{\dot a\dot b}{ab} - b_3 - b_2\right) + b_4\left(-\frac{\dot a\dot c}{ac} - b_2 - b_4\right) = 0;$$

$$\left(\dot{b_3} + (b_1 + b_3)\,\frac{\dot{b}}{b}\right)^{\cdot} + \left(\dot{b_3} + (b_1 + b_3)\,\frac{\dot{b}}{b}\right)\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c}\right) + 2\,(b_{12})^2 + 2\,(b_{34})^2 +$$
$$+ b_1\left(\frac{\ddot{b}}{b} + b_3 - b_1\right) + b_2\left(-\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - b_3 - b_2\right) + b_4\left(-\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} - b_3 - b_4\right) = 0;$$
$$\left(\dot{b_4} + (b_1 + b_4)\,\frac{\dot{c}}{c}\right)^{\cdot} + \left(\dot{b_4} + (b_1 + b_4)\,\frac{\dot{c}}{c}\right)\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}\right) + 2\,(b_{12})^2 + 2\,(b_{34})^2 +$$
$$+ b_1\left(\frac{\ddot{c}}{c} + b_4 - b_1\right) + b_2\left(-\frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - b_2 - b_4\right) + b_3\left(-\frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} - b_3 - b_4\right) = 0.$$

Из них независимыми являются только три, т.к., складывая три последних и вычитая первое, получим тождественный нуль. Можно указать несколько частных решений этой системы в элементарных функциях. Например, $a = \dfrac{2P^2}{T - Lt}$; $b = c = \dfrac{T - Lt}{2P}$, L, T, P — константы. При этом $b_{12} = \dfrac{M}{b^2}$, $b_{34} = \dfrac{N}{b^2}$, где M и N — константы, связанные соотношением $M^2 + N^2 = \dfrac{L^4}{12P^4}$. Согласно (76),

$$b_1 = \frac{5L^2}{6\,(T - Lt)^2}; \qquad b_2 = b_3 = b_4 = \frac{L^2}{6\,(T - Lt)^2}.$$

Список литературы

[1] Л.Н.Кривоносов, В.А.Лукьянов, Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна, *Известия вузов. Математика*, (2009), №9, 69-74.

[2] А.Эйнштейн, Единая теория гравитации и электричества, Собрание научных трудов, Т. 2, М., Наука, 1966.

[3] Э.Картан, Пространства аффинной, проективной и конформной связности, Казань, Издательство Казанского университета, 1962.

[4] Л.П.Эйзенхарт, Риманова геометрия, М., ИЛ, 1948.

Connection of Young-Mills Equations with Einstein and Maxwell's Equations

Leonid N.Krivonosov
Vyacheslav A.Luk'yanov

In this article it is shown that Young-Mills equations on a 4-dimensional conformally connected manifold without torsion may be reduced to three groups of equations: 10 Einstein equations, 8 Maxwell's equations and 9 equations of substance movement. In the given work successful unification of gravitation and electromagnetism in the model of conformally connected manifold without torsion is carried out. It makes the idea of unification of all four kinds of interactions in the Nature within the framework of the 4-dimensional conformally connected manifold with torsion optimistic.

Keywords: curvature of the connection, torsion of the connection, Hodge operator, Bianchi identity, Einstein equations, Maxwell's equations, Young-Mills equations, 4-dimensional conformally connected manifold.