МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕЖВУЗОВСКОЕ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Поверхности функций комплексного переменного

Методические указания

Красноярск 2004

УДК 517.2

Составители: Ю.В.Захаров, К.Г. Охоткин, Л.С. Титов

Поверхности функций комплексного переменного: Метод. указания. Изд. 2-е, исправ. и доп. / Краснояр. гос. ун-т; Сост.: Ю.В. Захаров, К.Г. Охоткин, Л.С. Титов. Красноярск, 2004. 39 с.

Печатается по решению редакционно-издательских советов
Красноярского государственного университета и
Сибирского государственного аэрокосмического университета.

Предназначено для студентов специальности 010400 «Физика» физического факультета КГУ и МИФО.

Издано при поддержке ФЦП «Интеграция», проект № Б0017

Введение

В теории функций комплексного переменного ставится задача распространения на комплексную плоскость обычных функций вещественного переменного. При этом функции очень часто приобретают новые свойства – монотонные функции становятся периодическими, такие функции, как $\sin z$, оказываются неограниченными и т.п. Поведение функций полностью можно описать аналитическими формулами, но не зря говорят, что "лучше один раз увидеть..." Поэтому для наглядности изображают функции как поверхности над комплексной плоскостью (x, y) – рисуют "рельефы" функций или поверхности модуля в пространстве (x, y, u) с уравнением $u = |f(z)|$.

Такой метод изображения ввел Ф. Эмде. Приведем здесь поучительную цитату из предисловия Ф. Эмде 1933 года ко 2-му изданию его книги:

"При этом представлении, примененном здесь впервые, функция показывается во всей полноте. В то время как прежде нужно было мысленно сочетать разрозненные и независимые свойства и особенности функции, теперь их удалось соединить в одно обозримое целое. К сожалению, время не позволило представить все функции таким образом. Остается еще многое сделать. Я надеюсь, что математические институты продолжат начатую работу. По существу это скорее дело учебников, чем таблиц функций. Если в каждом учебнике дифференциального исчисления поведение простых функций в действительной области иллюстрируется посредством кривых, то тем более это необходимо сделать для более сложных функций и функций в комплексной области".

Спустя годы мы видим, насколько был прав Ф. Эмде. Такие рельефы сразу выявляют новые свойства элементарных функций; они незаменимы для представления поведения функций в окрестности особых точек. И, конечно, в полной мере раскрывается значение таких рельефов при изучении свойств специальных функций, таких, как функции Бесселя, двоякопериодические функции и т.п.

Но главной целью, к которой следует стремиться при изучении "методом пристального всматривания" таких поверхностей, является, по нашему мнению, воспитание навыков образного мышления. Эта задача всегда была весьма важной. Мы приведем здесь только три примера, иллюстрирующих такую важность и характеризующих проникновение геометрических представлений в естественные науки.

В конце 50-х началась активная работа по экспериментальному определению и построению т.н. поверхностей Ферми, характеризующих в пространстве скоростей электронные состояния в металлах и имеющих иногда такой сложный вид, что название "монстр" кажется обыденным.

В 70-е годы была построена теория катастроф, геометрический подход в которой опирается на анализ структуры и изменения поверхностей, описываемых небольшим числом многочленов.

В середине 80-х годов были открыты кластеры углерода C_{60}, но не удавалось объяснить их высокую устойчивость и понять, как расположены атомы углерода в этой молекуле. Так было, пока один из авторов, физико-химик профессор Ричард Смолли, в 1985 году однажды ночью не вспомнил о детском конструкторе и тут же из бумажных шестиугольников и пятиугольников собрал сферическую фигуру. А утром декан математического факультета пояснил ему, что собрал он усеченный икосаэдр. Новая форма углерода C_{60} получила название бакминстерфуллерена или просто фуллерена и широко исследуется во всем мире. Профессору Р. Смолли 2 мая 1996 года была вручена медаль Франклина, а 7 декабря 1996 г. Р. Смолли, Р. Керл и Г. Крото были удостоены Нобелевской премии по химии.

В наши дни задача воспитания образного мышления становится особенно актуальной в связи с возрастающим количеством нелинейных задач, возникающих в современной физике и технике, решения которых выводятся на экран компьютеров в виде сложных изображений, проекций иногда многомерных фигур и иных визуализаций результатов численных расчетов и экспериментов. К образному мышлению пользователя обращаются и информационные системы, использующие multi-media технологии. И вне компьютерного мира оперируют образами, визуальными формами такие мыслительные процессы человека, как научно-теоретическое изучение явлений и их связей, инженерное проектирование, и, конечно, архитектура, которая дала яркие примеры поверхностей – геодезические купола Б. Фуллера и здание в т.н. «оберточном стиле» на Елисейских полях в Париже, открытое в феврале 2004 г.

Студенты могут получить знания о проблемах образного мышления из первых рук в Красноярском госуниверситете у профессора В.И. Жуковского.

Обучение навыкам образного мышления является большой и серьезной задачей. В данном пособии делается некоторый шаг в этом направлении.

Здесь приводятся поверхности и графики некоторых элементарных и специальных функций. Часть рисунков публиковалась ранее в книгах, указанных в списке литературы. Но число таких книг невелико, и в наши дни они, к сожалению, малодоступны.

В настоящее время поверхности функций можно легко построить с помощью современных математических пакетов Maple или Matlab.

На каждой странице даются очень краткие сведения о функции, о формулах, по которым вычислялась поверхность, и приводится рисунок. На всех рисунках в особых точках все бесконечные пики обрезались. В указаниях буквой z обозначается любые комплексные переменные, а буквами x, y – реальные и мнимые части комплексных чисел или действительные переменные.

Это издание подготовлено преподавателями кафедры теоретической физики КрасГУ Ю.В. Захаровым, Л.С. Титовым и кафедры технической физики СибГАУ К.Г. Охоткиным и является одним из результатов сотрудничества в рамках Межвузовского инженерно-физического отделения.

Мы благодарны всем, помогавшим изданию работы.

1. Элементарные функции. Особые точки

1.1. Синус комплексного аргумента

$$F(z) = \sin z.$$

Реальная и мнимая части синуса комплексного аргумента имеют вид

$$\operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y,$$

$$\operatorname{Im}(\sin z) = \cos x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Рельеф (т.е. поверхность модуля $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y}$) строится как функция двух переменных. Видно, что график тригонометрической функции $\sin x$ получаем сечением поверхности $\sin z$ вертикальной плоскостью OX, а график гиперболической функции $\operatorname{sh} y$ – сечением плоскостью OY. Поверхность модуля показана на рис. 1.

Тригонометрические и гиперболические функции связаны соотношениями

$$\sin z = -i\operatorname{sh} iz, \qquad \cos z = \operatorname{ch} iz.$$

Поверхность модуля гиперболического синуса $\operatorname{sh} z$ можно получить из поверхности $\sin z$ поворотом на 90^0.

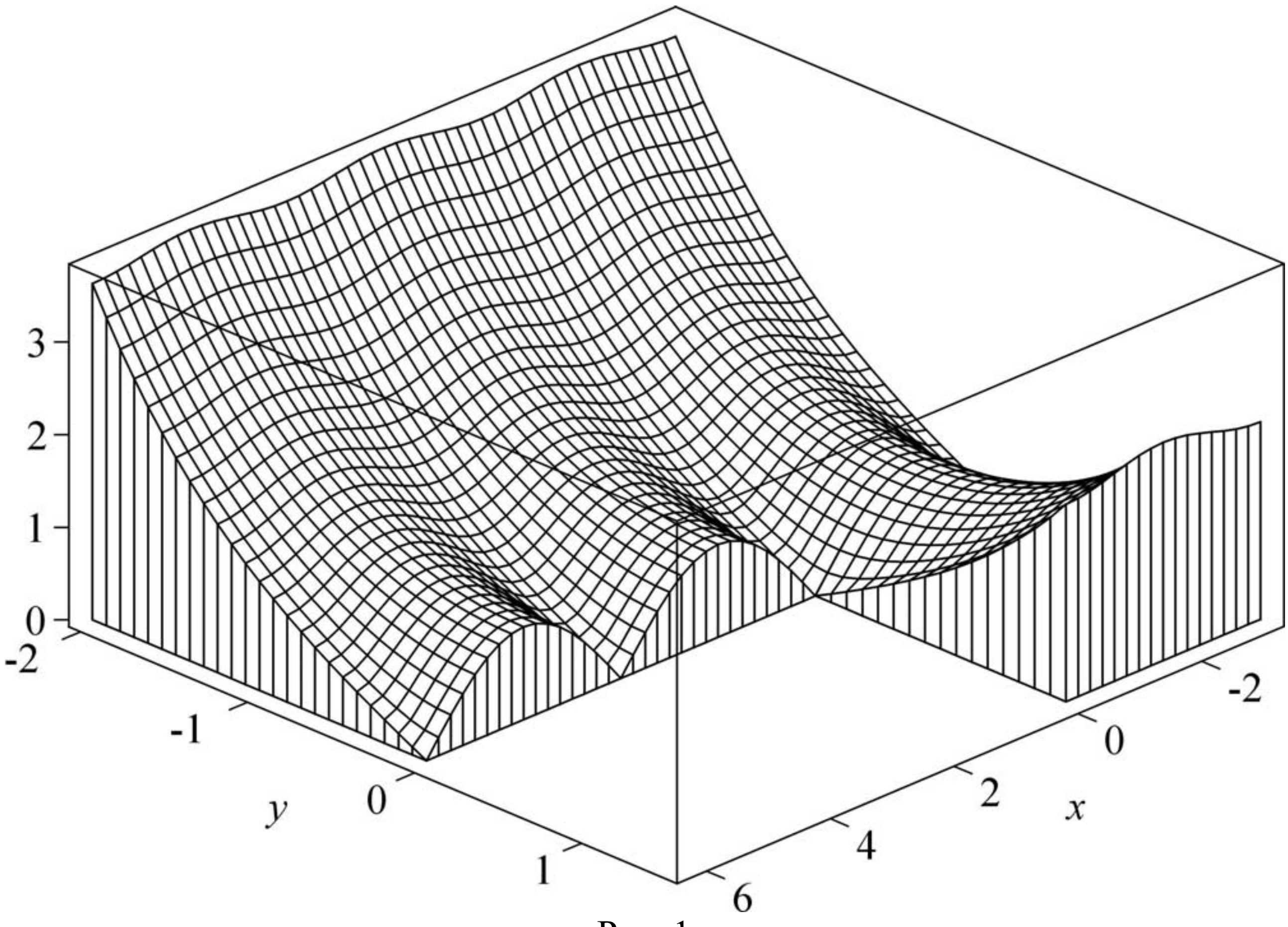


Рис. 1

1.2. Простой полюс

$$F(z)=\frac{1}{z}.$$

Функция имеет полюс первого порядка при $z = 0$. Модуль функции

$$|F(z)|=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Рельеф функции показан на рис. 2. В нуле функция уходит в бесконечность, поэтому её поверхность сверху обрезана.

Подобную особенность имеют многие функции комплексного переменного. Приведем разложение в ряд Лорана в окрестностях нуля, например, для функции

$$\mathrm{ctg}z=\frac{1}{z}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}-...,$$

также имеющей полюс первого порядка в нуле.

Вычет обеих функций в точке $z = 0$ равен 1.

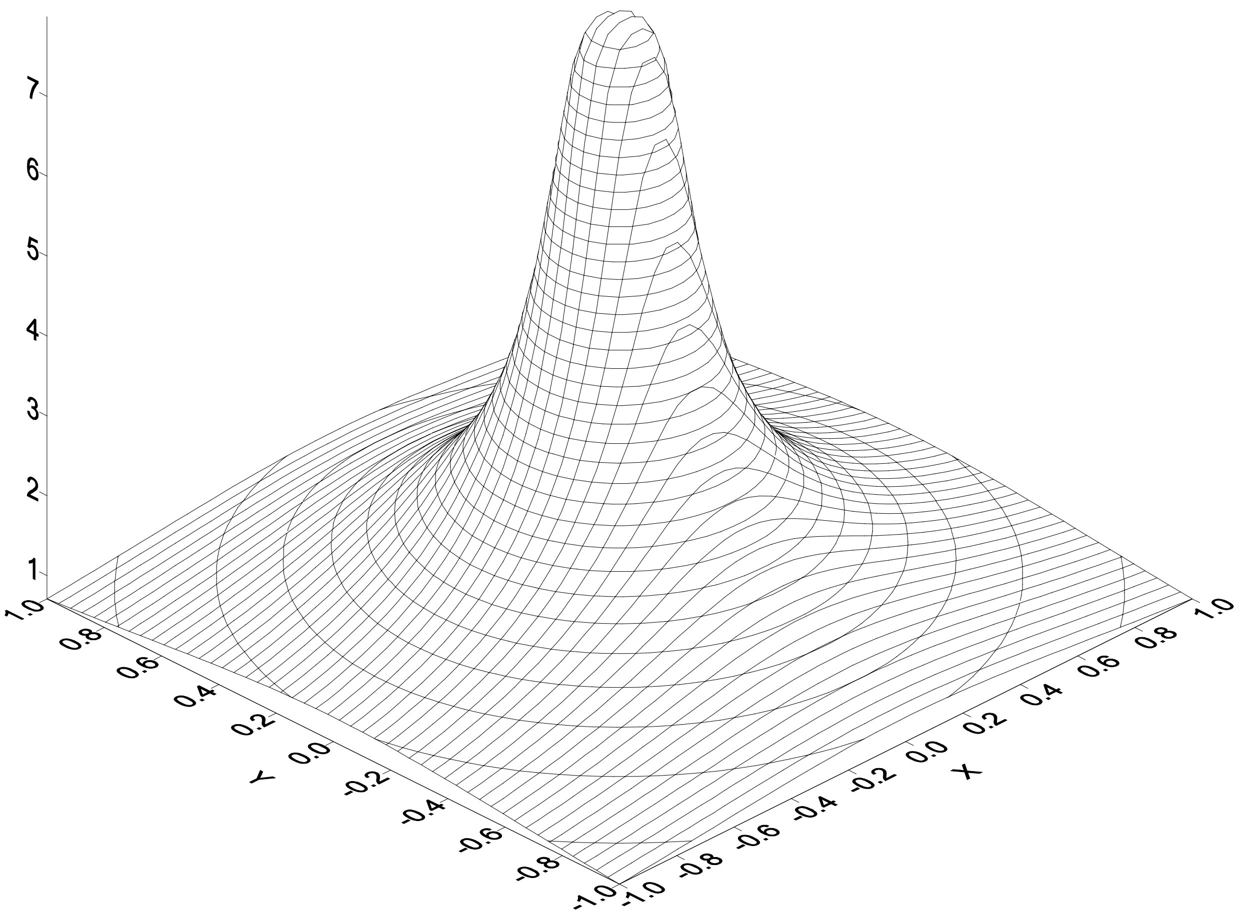


Рис. 2

1.3. Полюс четвёртого порядка

$$F(z) = \frac{1}{z^4}.$$

Функция имеет полюс четвёртого порядка при $z = 0$. Модуль функции

$$|F(x, y)| = \frac{1}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Рельеф приведён на рис. 3 в том же масштабе, что и для предыдущей функции.

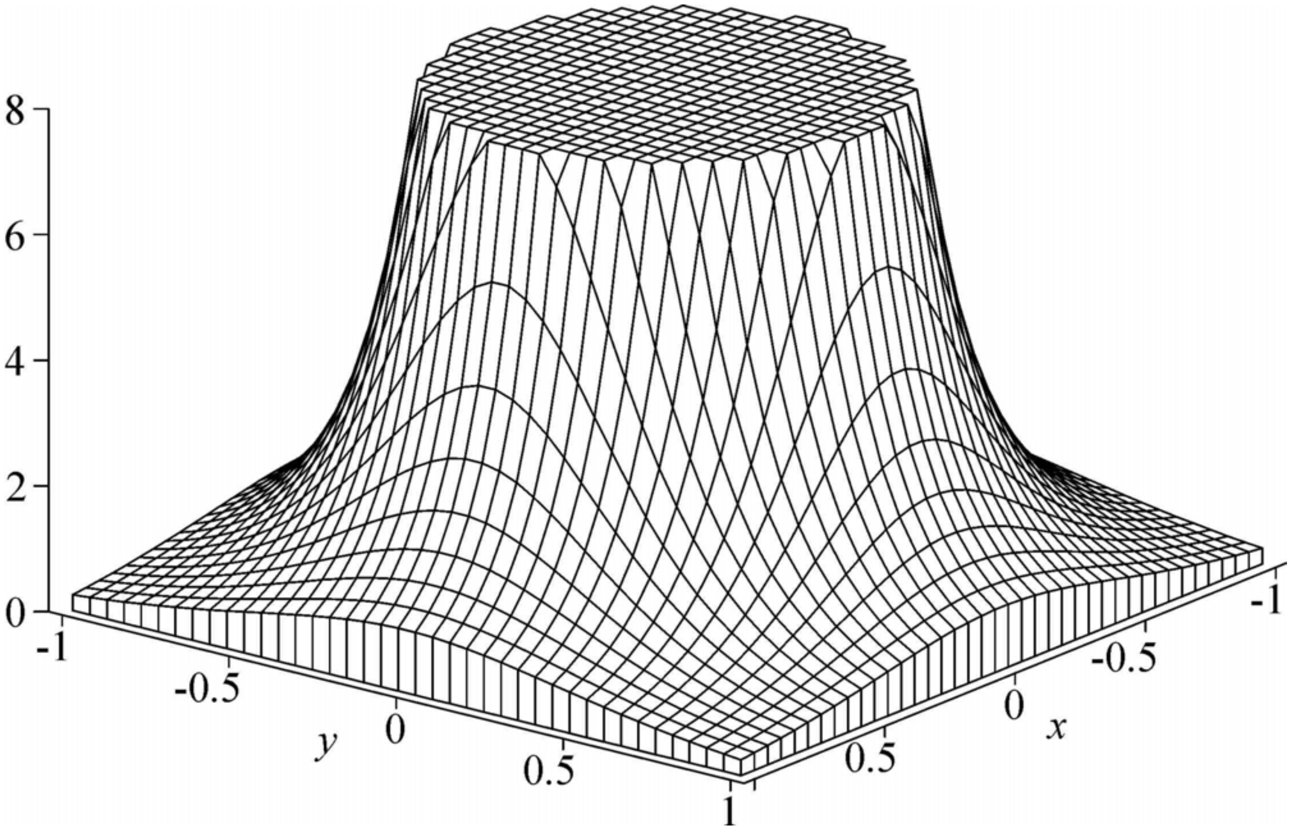


Рис. 3

1.4. Слияние *n* простых полюсов в один полюс *n*-го порядка

$$F(z) = \frac{1}{a + z^6}.$$

Функция имеет шесть простых полюсов, лежащих на окружности радиуса $\sqrt[6]{a}$, в точках $\sqrt[6]{-a}$, образующих правильный шестиугольник. На бесконечности функция имеет правильную точку. При $a \to 0$ шесть простых полюсов сливаются в один полюс шестого порядка (сравни рис. 3). На рис. 4 построен рельеф функции при $a = 5$.

Вычет функции в особых точках

$$\operatorname{Res}\left[F(z),\ \sqrt[6]{-a}\right] = \frac{1}{6}(-a)^{-\frac{5}{6}}.$$

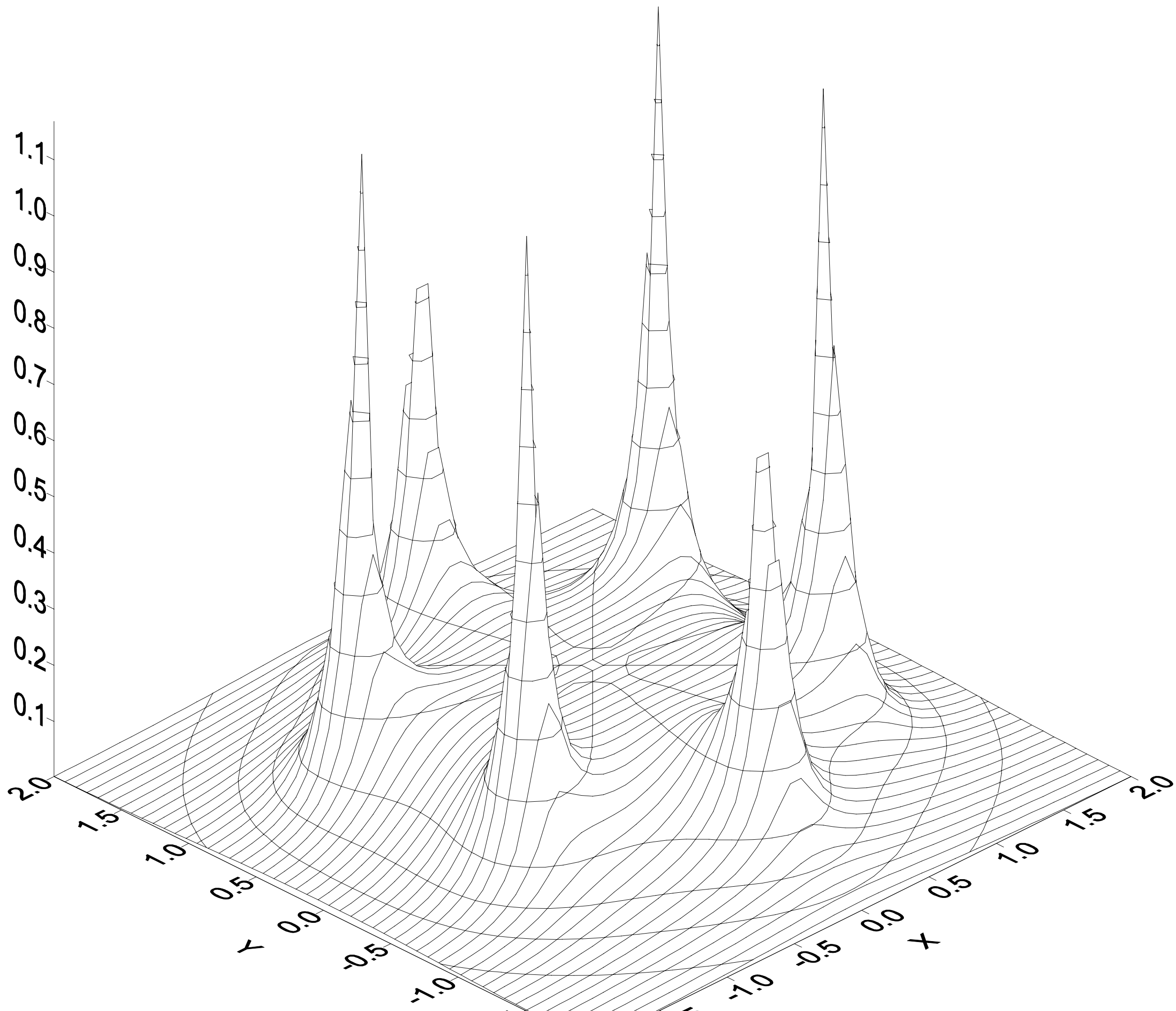


Рис. 4

1.5. Косеканс в кубе

$$F(z) = \frac{1}{\sin^3 z}.$$

Функция имеет полюсы третьего порядка в точках $z_0 = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \ \dots$ на действительной оси. Разложение в ряд Лорана имеет вид

$$\frac{1}{\sin^3 z} = (-1)^k \left[\frac{1}{(z - z_0)^3} + \frac{1}{2(z - z_0)} + \frac{17}{120}(z - z_0) + \dots \right].$$

Рельеф функции показан на рис. 5. Интересно провести сравнение со следующим примером 1.6.

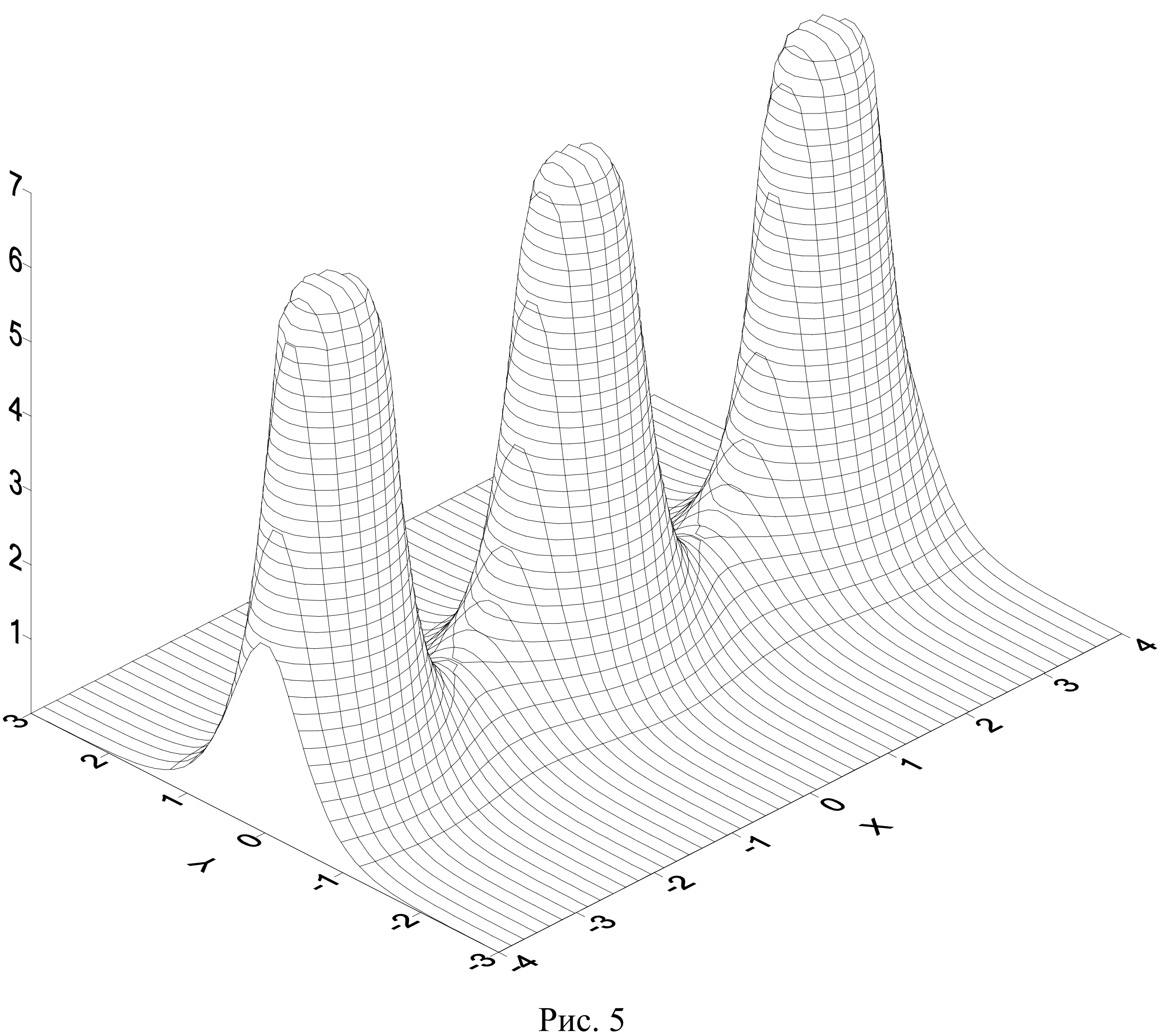


Рис. 5

1.6. Косеканс куба

$$F(z) = \frac{1}{\sin\left(z^3\right)}.$$

Функция имеет полюсы первого порядка, лежащие на действительной оси и двух лучах, наклонённых под углами 60 градусов к ней, в точках $\sqrt[3]{\pi k},\, k = 0, \pm 1, \ldots$ Рельеф функции изображён на рис. 6. В точке $z = 0$ три полюса сливаются вместе и образуют полюс третьего порядка. Вычеты в простых полюсах

$$\operatorname{Res}\left[F(z), \sqrt[3]{\pi k}\right] = -\frac{(-1)^k}{3\sqrt[3]{\pi k}}.$$

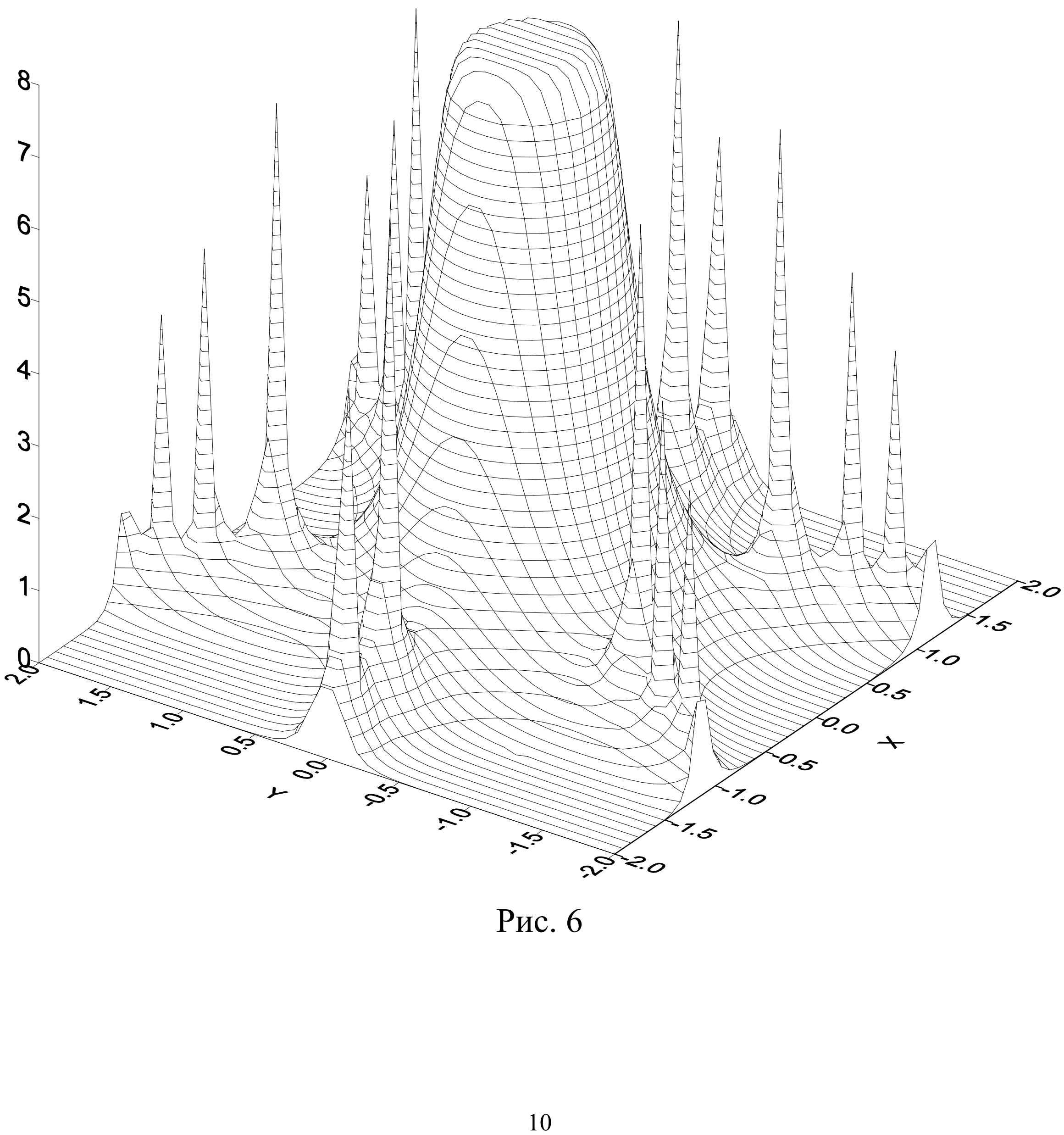


Рис. 6

1.7. Гиперболический тангенс комплексного аргумента

$$F(z) = \text{th}z\,.$$

Полюсы первого порядка лежат на мнимой оси в точках $i\pi / 2 + i\pi k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ На бесконечности рельеф функции стремится к 1. Сечение по мнимой оси совпадает с обычным тригонометрическим тангенсом. Имеем соотношение для связи между тригонометрическим и гиперболическим тангенсом

$$\text{th}\,iy = i\,\text{tg}\,y\,.$$

Таким образом, поверхности гиперболических функций получаются из поверхностей тригонометрических функций поворотом на 90 градусов. Рельеф функции над комплексной плоскостью показан на рис. 7.

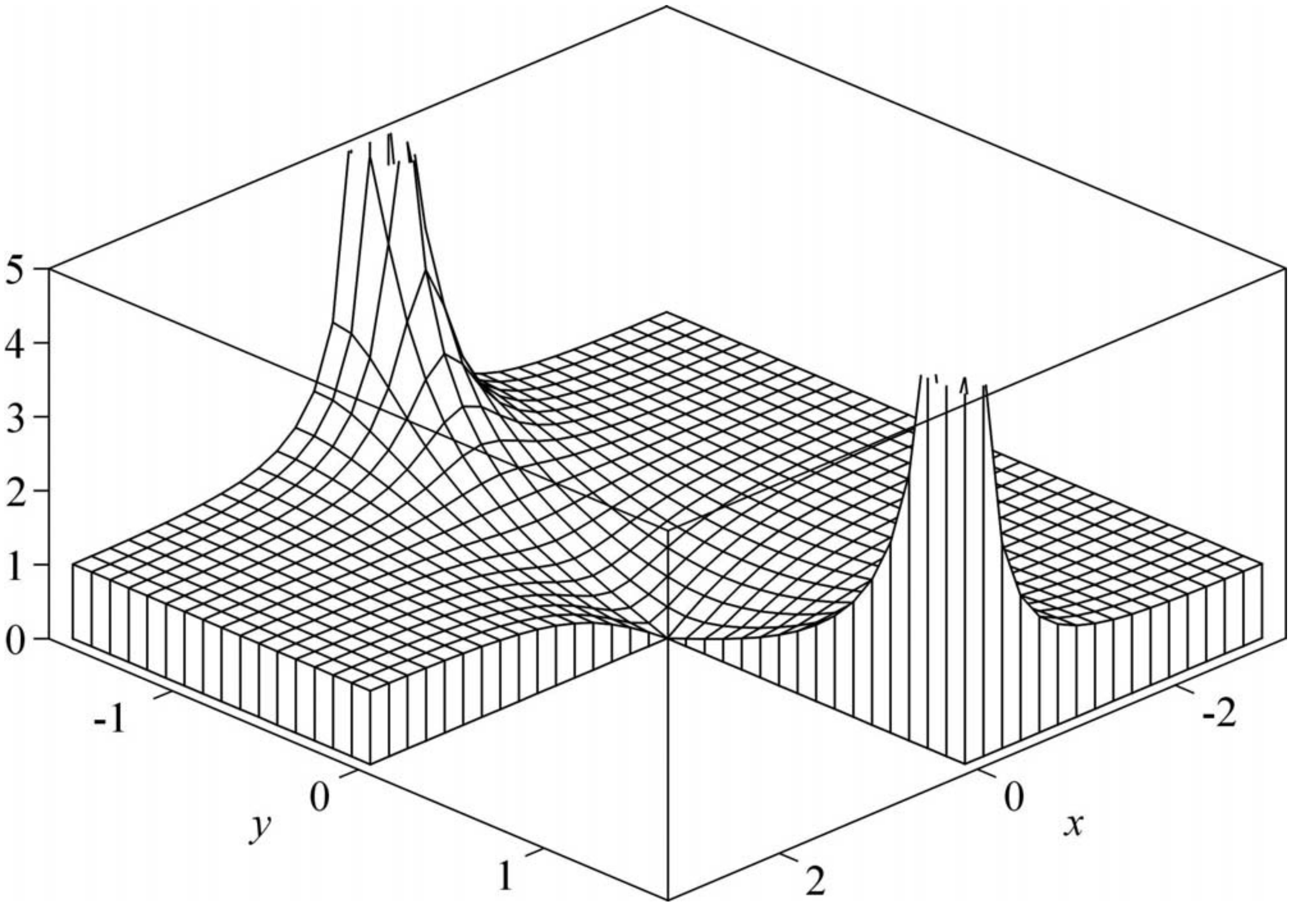


Рис. 7

1.8. Функция Жуковского

$$F(z) = R\left(\frac{1}{z} + z\right).$$

В бесконечно удалённой точке функция уходит на бесконечность как z. В нуле функция имеет полюс первого порядка. Рельеф функции для $R = 0.5 > 0$ показан на рис. 8.

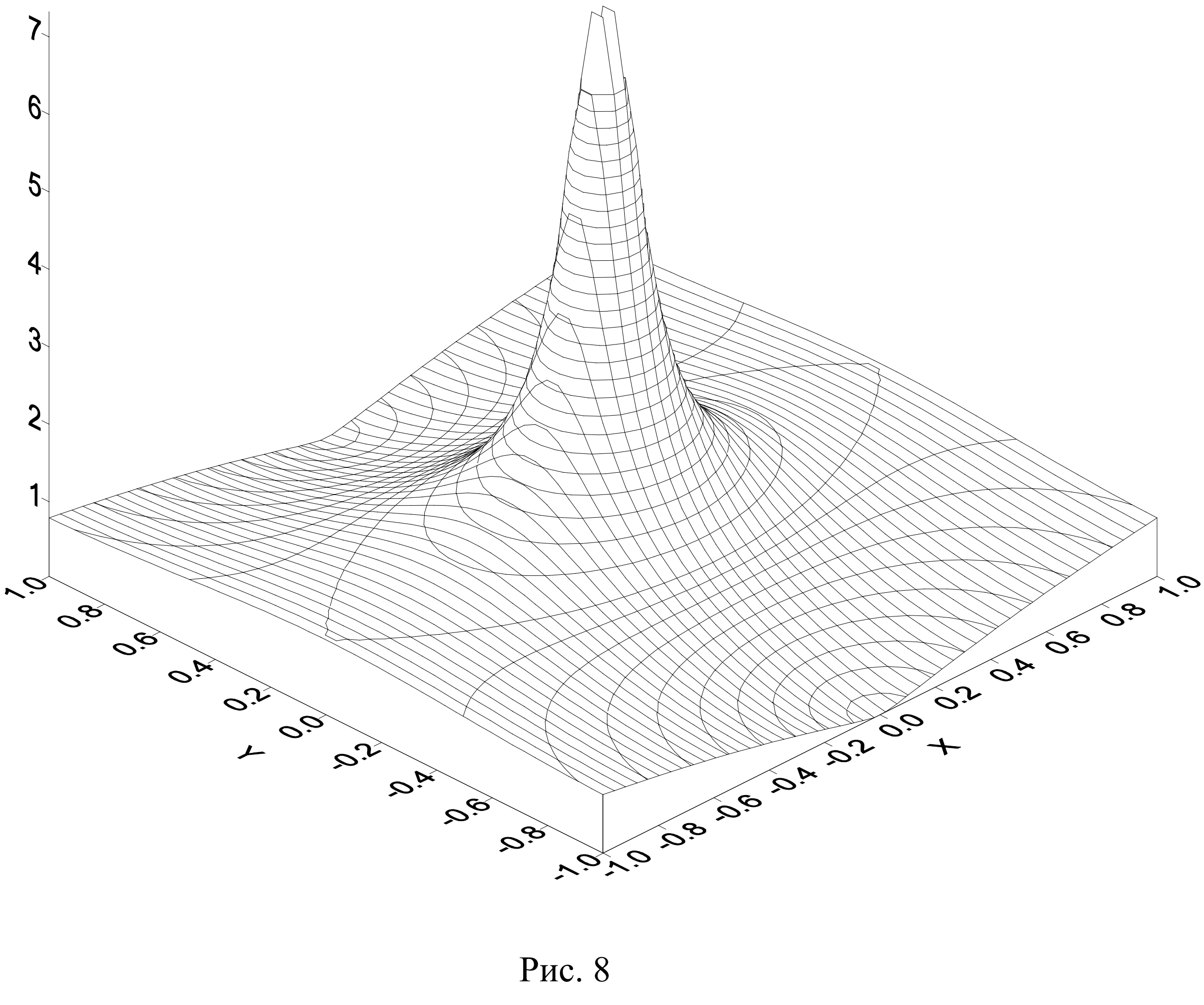


Рис. 8

1.9. Существенно особая точка

$$F(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

В точке $z = 0$ существенно особая точка. Разложение в ряд Лорана в окрестности нуля имеет бесконечное число членов с отрицательными степенями

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}.$$

Реальная и мнимая части функции имеют вид

$$\operatorname{Re} F(z) = \exp\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right),$$

$$\operatorname{Im} F(z) = \exp\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

На рис. 9 изображен рельеф этой функции.

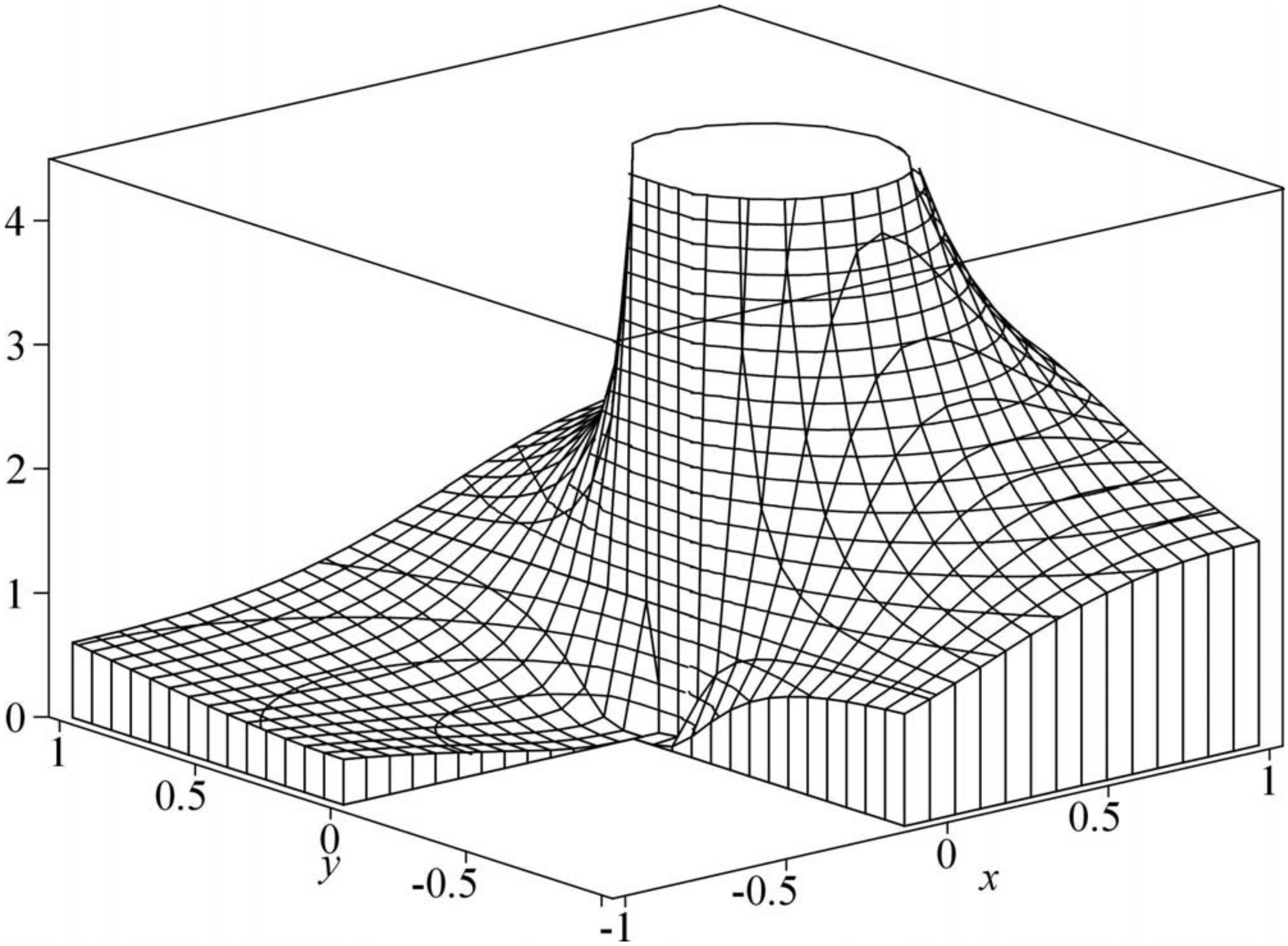


Рис. 9

1.10. Тригонометрическая функция с существенно особой точкой

$$F(z) = \sin\frac{1}{z}.$$

В точке $z = 0$ функция имеет существенно особую точку. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности этой точки имеет следующий вид

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2k+1}}\frac{1}{(2k+1)!}.$$

Поверхность функции показана на рис. 10.

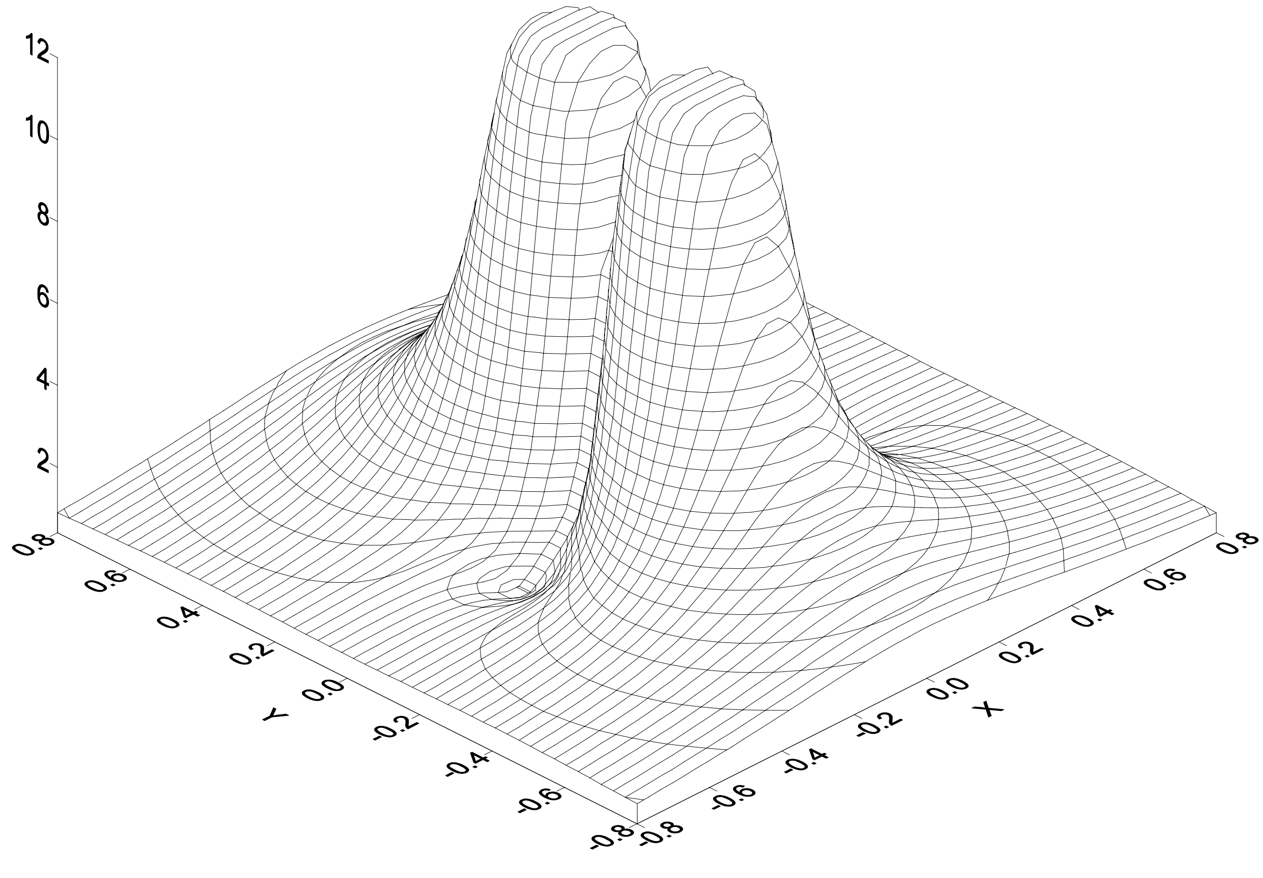


Рис. 10

1.11. Существенно особая точка сохраняется у функции, обратной функции с существенно особой точкой

$$F(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}.$$

Функция имеет полюсы первого порядка в точках $1 / \pi k$, $k = \pm 1$, … В точке $z = 0$ все полюсы сливаются в существенно особую точку (сравни с примером 1.10). В бесконечно удалённой точке функция уходит на бесконечность как полюс первого порядка. Рельеф функции показан на рис. 11.

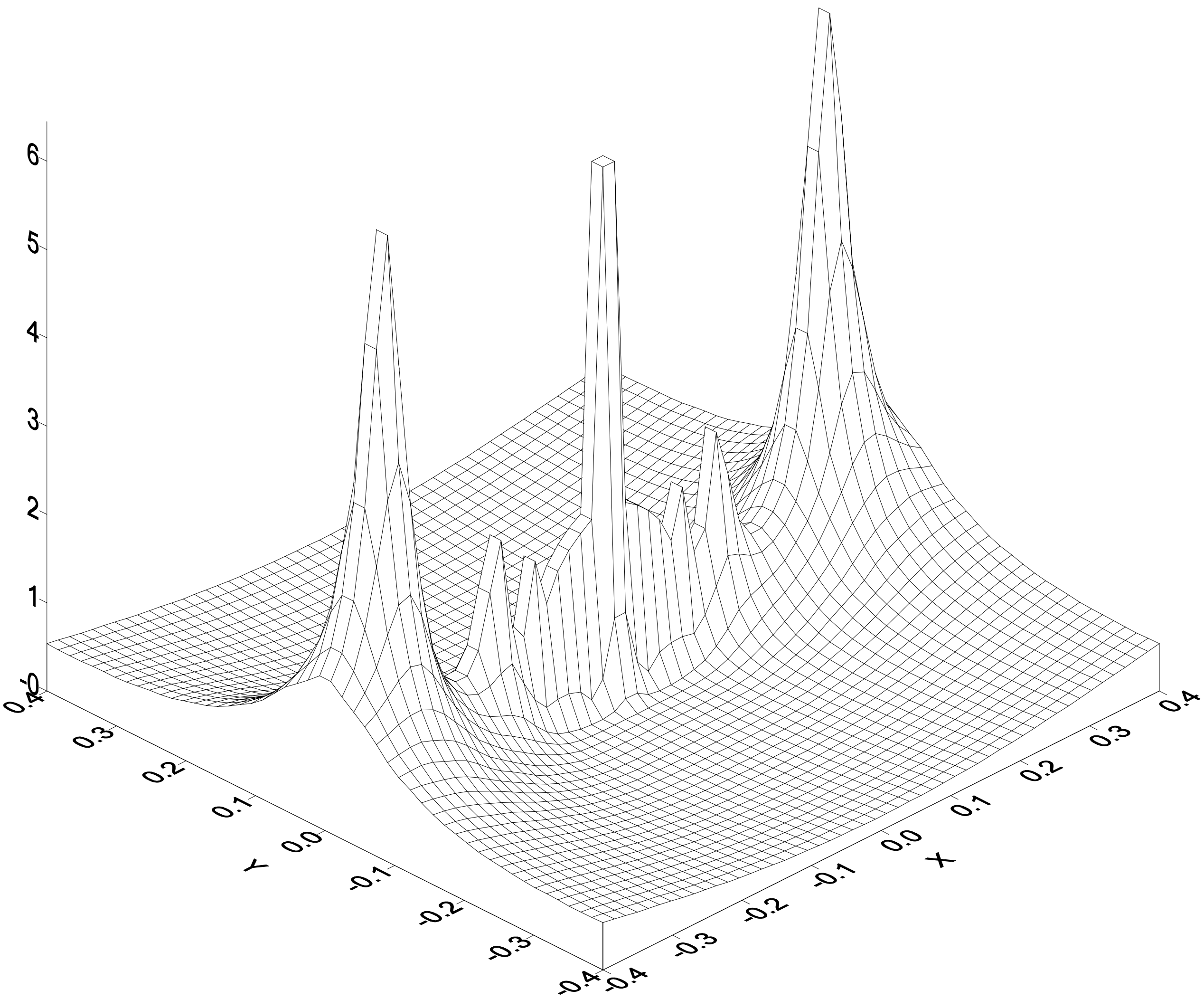


Рис. 11

1.12. Сложная функция

$$F(z) = e^{\mathrm{tg}\frac{1}{z}}.$$

Функция имеет существенно особую точку при следующих значениях аргумента:

$$z = \frac{2}{(2k+1)\pi}\ , k = 0, \pm 1, ...$$

Точка $z = 0$ является предельной для всех особых точек. Поверхность функции показана на рис. 12.

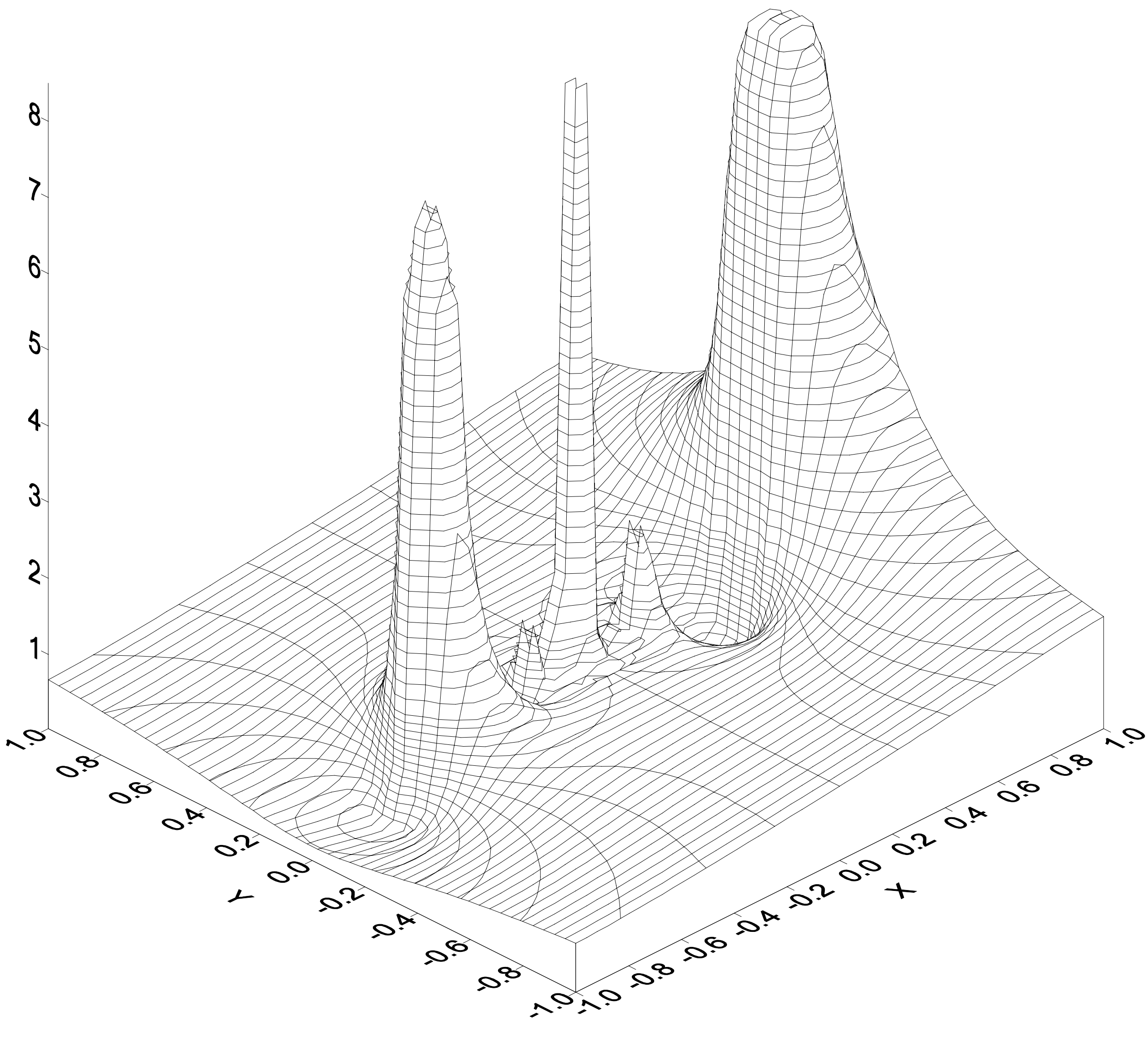


Рис. 12

1.13. Натуральный логарифм комплексного аргумента

$$F(z) = \ln z = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k),$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа, а $0 < \varphi < 2\pi$ – главное значение аргумента. Логарифм – многозначная функция, на рис. 13 показана основная ветвь функции для $k = 0$. Точка $z = 0$ является точкой ветвления бесконечного порядка; вдоль положительной действительной полуоси проходит линия разреза (из-за нашего определения главного значения аргумента).

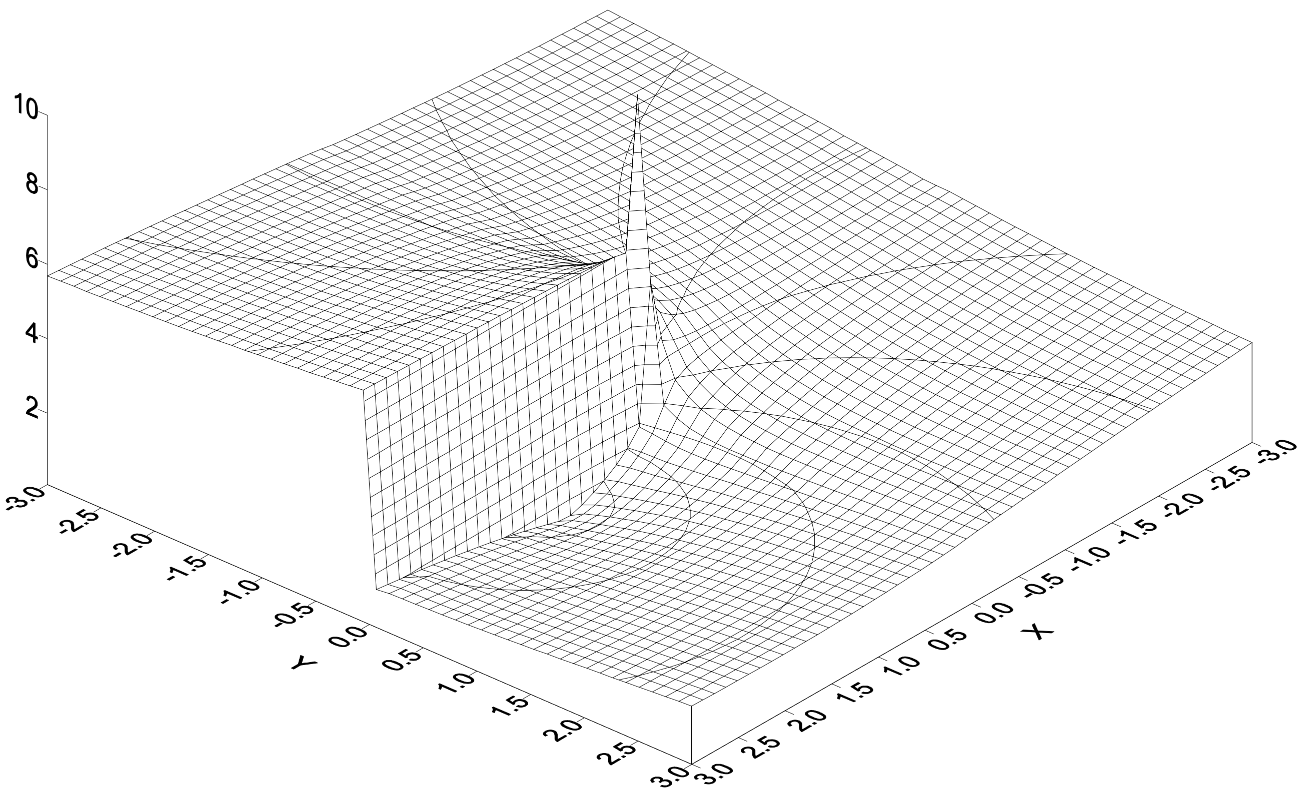


Рис. 13

2. Специальные функции

2.1. Гамма-функция Эйлера

Функция, удовлетворяющая уравнению

$$f(z+1) = zf(z), \quad f(1) = 1,$$

называется гамма-функцией

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{\prod\limits_{k=0}^{n}(z+k)}; \quad \Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0.$$

Для построения модуля $\Gamma(z)$ использовалось представление функции в виде произведения

$$\Gamma(z+1) = e^{-Cz} \prod_{k=1}^{\infty} e^{z/k} \frac{k}{z+k},$$

где C – постоянная Эйлера.

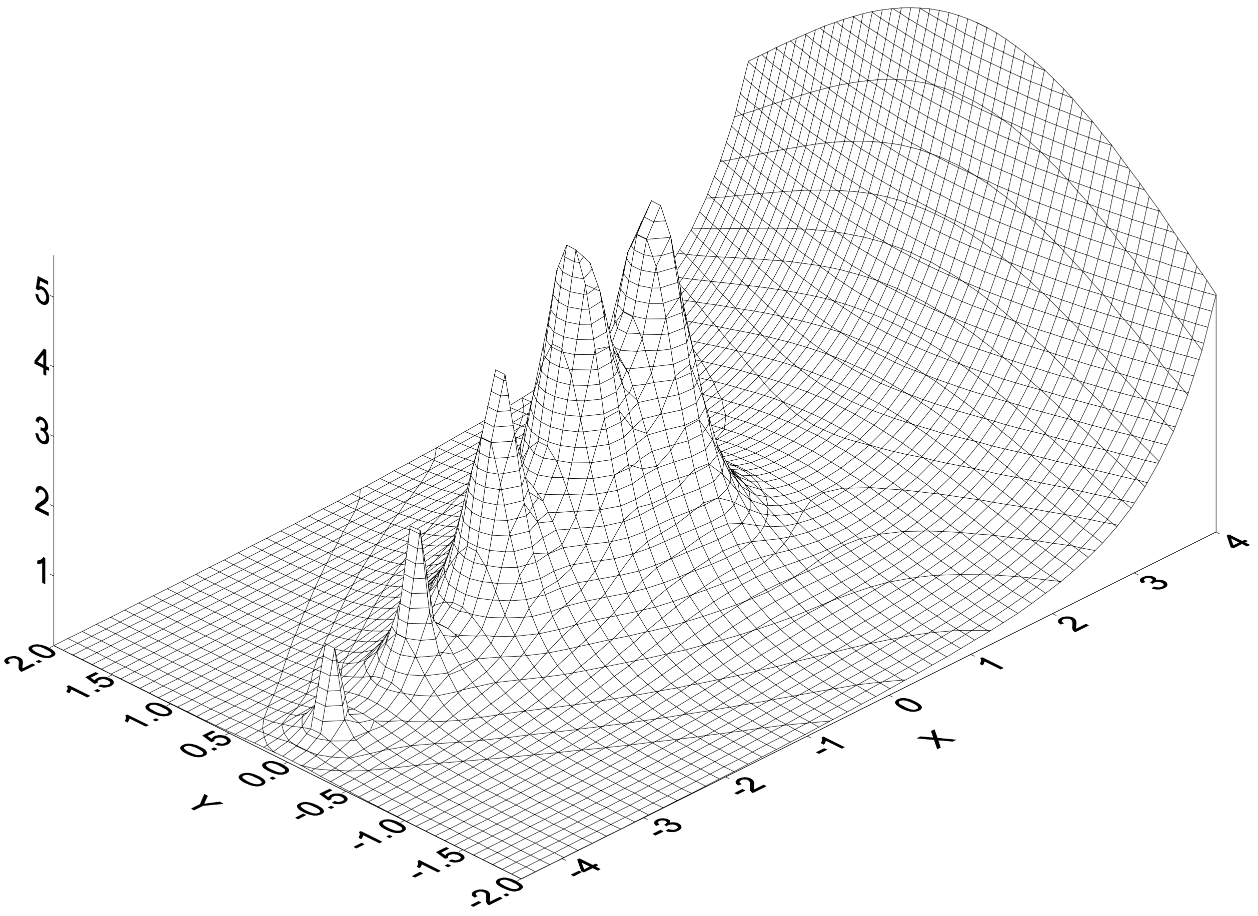


Рис. 14

Постоянная Эйлера определена как

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0.5772\ \ldots$$

На рис. 14 показан рельеф гамма-функции, а на рис. 15 – поверхность обратной гамма-функции $1/\Gamma(z)$. При всех целых положительных n функция $\Gamma(n+1) = n!$. Таким образом, гамма-функция является обобщением понятия факториала, распространяя его на всю комплексную плоскость. Во всех отрицательных целых точках функция имеет полюсы первого порядка, вычеты в которых равны

$$\operatorname{Res}\left[\Gamma(z),\,-n\right] = \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad n = 1,\,2,\,\ldots$$

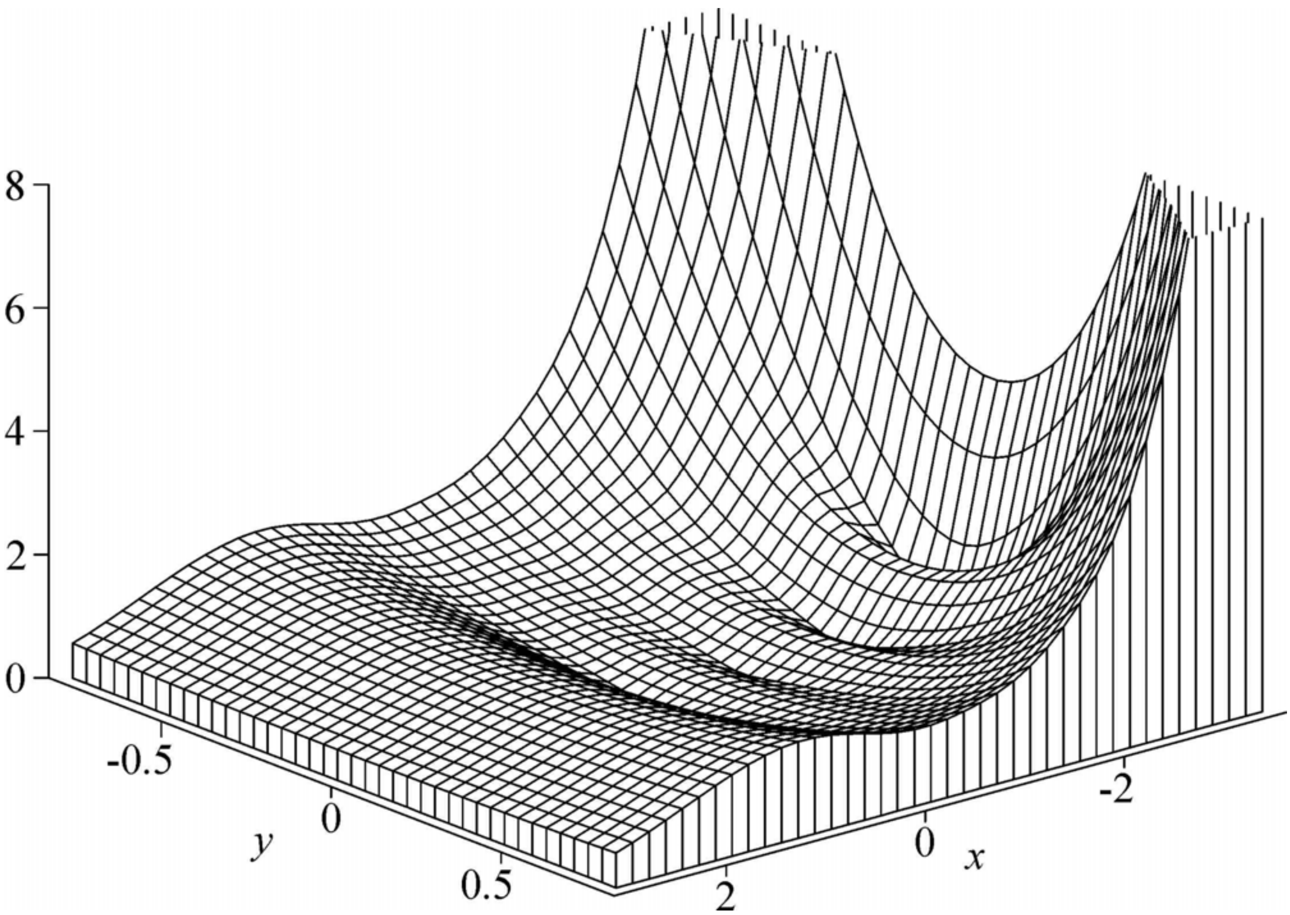


Рис. 15

2.2. Функции Бесселя

2.2.1. Функции Бесселя первого рода

Уравнение Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 y}{d\, z^2} + z \frac{dy}{dz} + \left(z^2 - n^2\right) y = 0 \ ,$$

возникает при решении задач с цилиндрической симметрией после разделения переменных и описывает поведение радиальной части (множителя, зависящего от радиуса). Его решениями являются цилиндрические функции Бесселя. Функции Бесселя первого рода представляются в виде ряда

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(k+n+1)} \, .$$

На рисунках 16 и 17 изображены рельефы функций J_1 и J_0 соответственно.

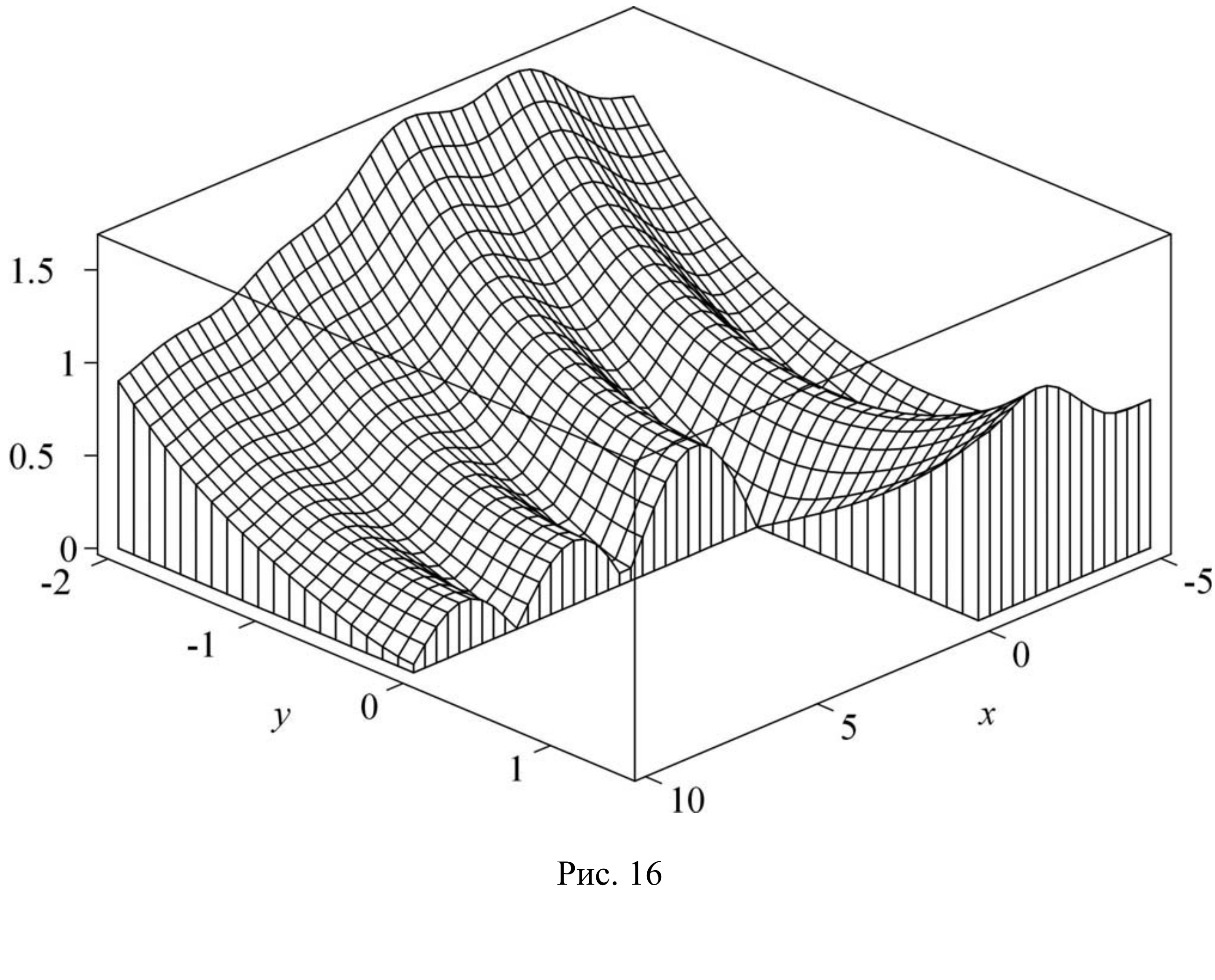


Рис. 16

Существует интегральное представление Шлефли для функций Бесселя с целым значком n

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\omega|=1} \frac{e^{\frac{z}{2}(\omega - 1/\omega)}}{\omega^{n+1}} d\omega\ ,$$

где экспонента является производящей функцией. Для построения рельефов функций первого рода использовалось интегральное представление Бесселя

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi, \quad n = 0, \pm 1, ...,$$

$$\mathrm{Re} J_n(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\cdot \mathrm{ch}(y\sin\varphi)\, d\varphi,$$

$$\mathrm{Im} J_n(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\cdot \mathrm{sh}(y\sin\varphi)\, d\varphi.$$

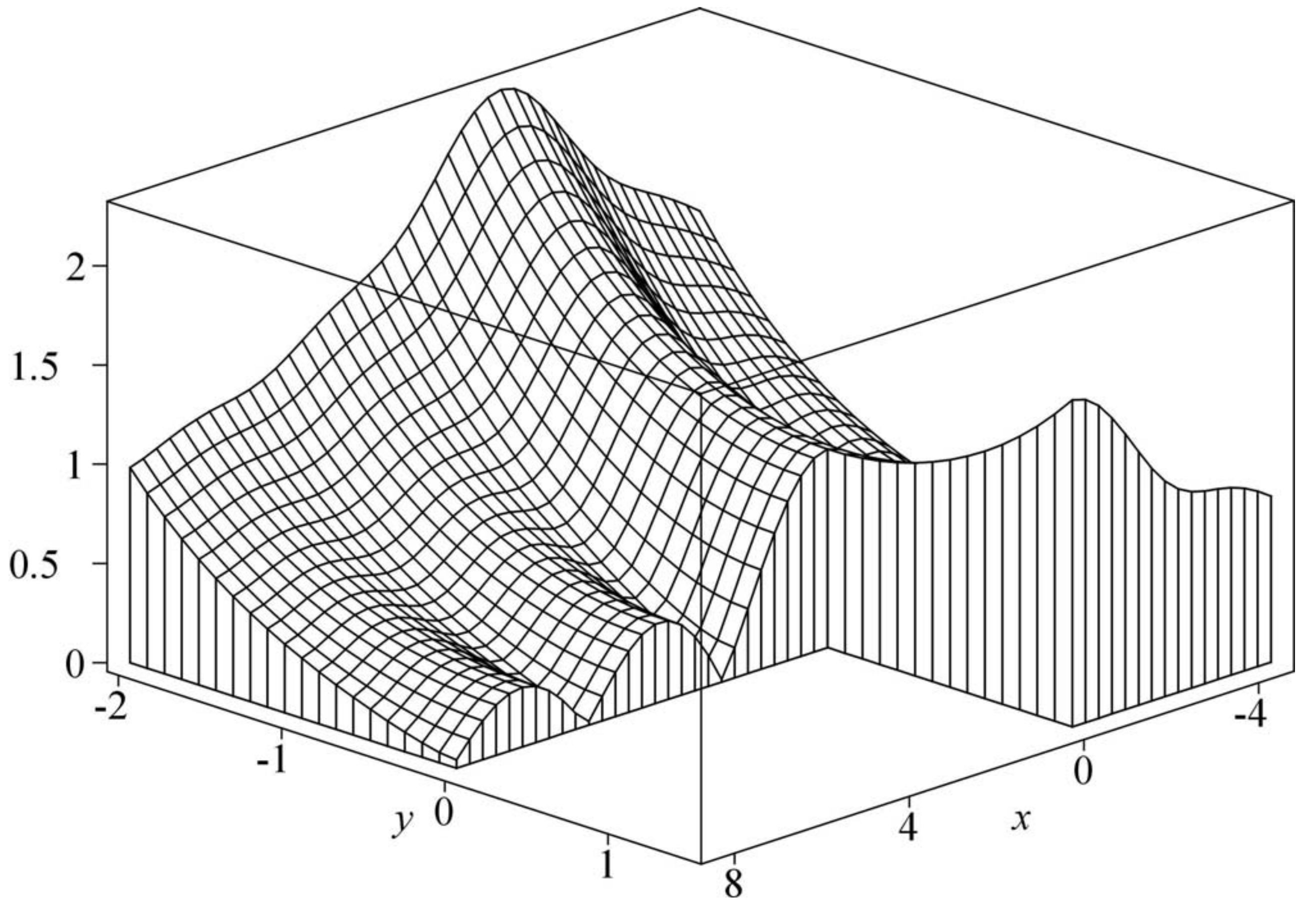


Рис. 17

При сечении поверхности функции $J_n(z)$ вертикальной плоскостью OX получаем функцию действительной переменной $J_n(x)$, а плоскостью OY – чисто мнимой переменной или модифицированную функцию Бесселя $I_n(y)$ (сравни с пунктом 1.1, см. также стр. 26).

Цилиндрические функции полуцелого значка выражаются через элементарные функции, в частности,

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z .$$

Рельеф функции $J_{½}$ показан на рис. 18. Если значок n равен нецелому ν, то общим решением уравнения Бесселя будет

$$y(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z) .$$

Если n целое, то в качестве второго линейно независимого решения берут цилиндрические функции второго рода.

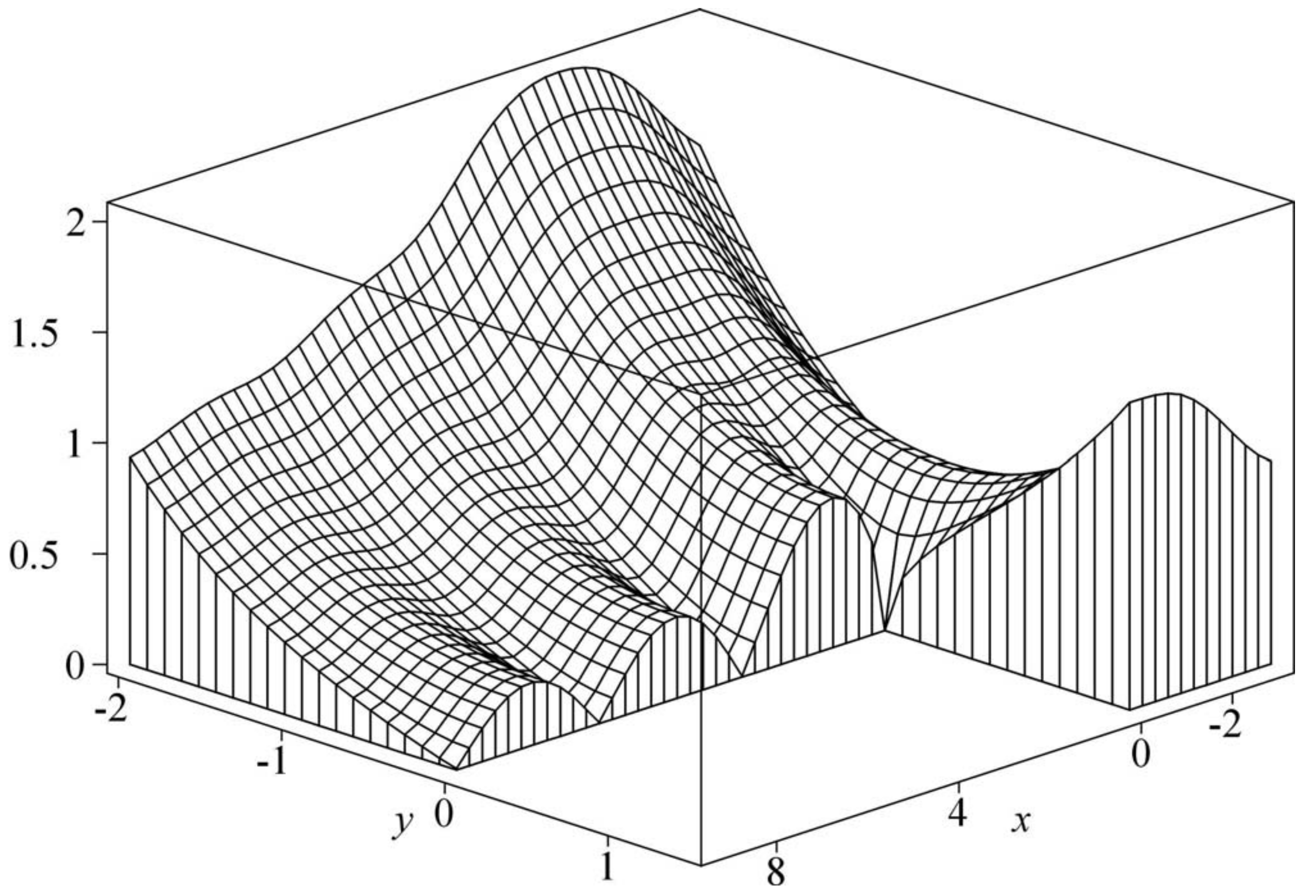


Рис. 18

2.2.2 Функции Бесселя второго рода (функции Неймана)

Функции Неймана выражаются через функции первого рода

$$N_n(z) = \frac{\cos n\pi \, J_n(z) - J_{-n}(z)}{\sin n\pi}.$$

Если n целое, то получаем неопределённость. Раскрывая её по правилу Лопиталя, находим

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}\right]_{\nu = n};$$

в частности, для $n = 0$ имеем

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z)\left(\ln\frac{z}{2} - C\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}.$$

На рис. 19 показан рельеф $N_0(z)$. Вдоль положительной действительной полуоси проходит линия разреза и аргумент лежит в пределах $0 < \varphi < 2\pi$.

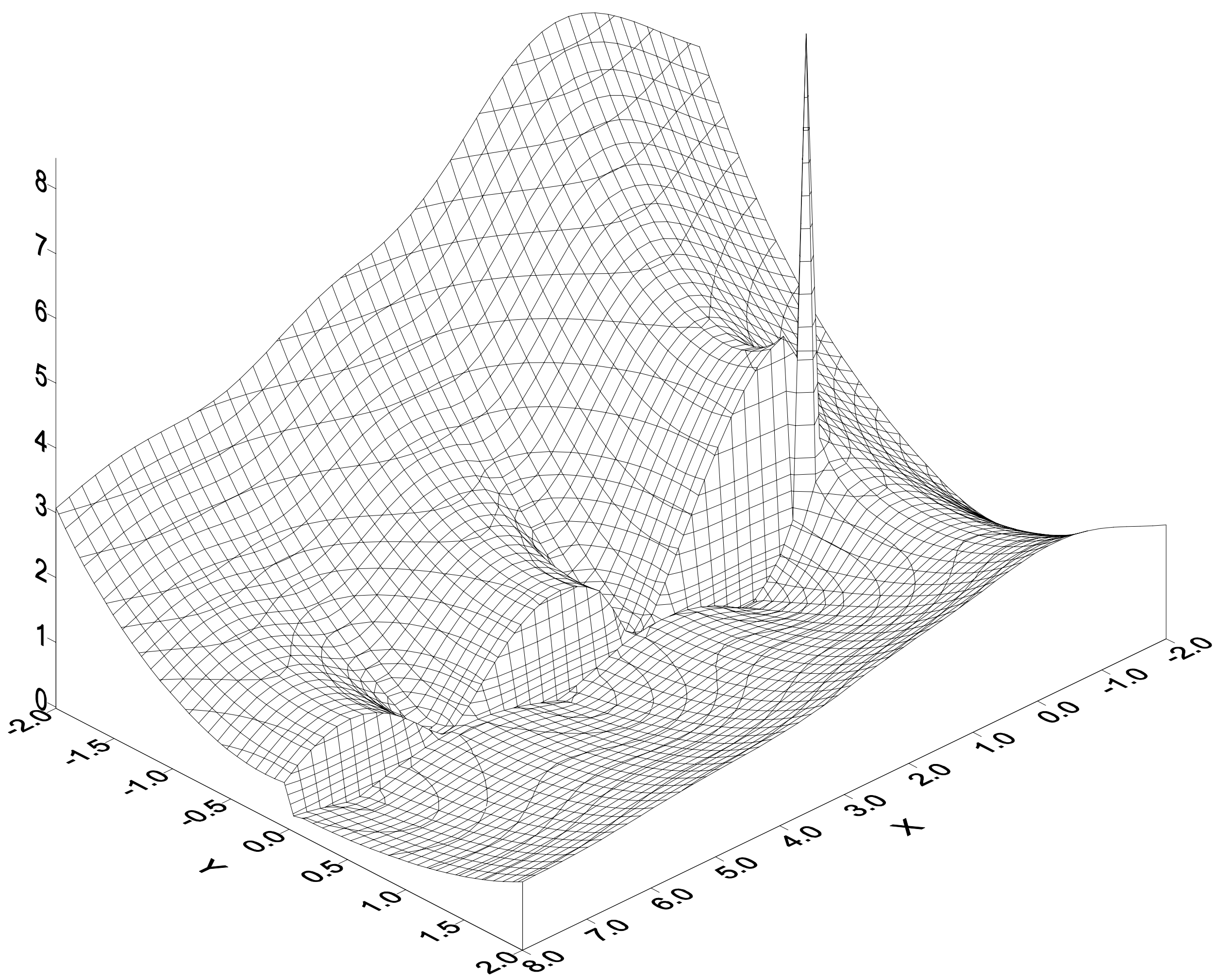


Рис. 19

2.2.3. Функции Бесселя третьего рода (функции Ханкеля)

Функции Ханкеля определяются как

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(\mathrm{z});\;\; H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z).$$

Функции полуцелого значка выражаются через элементарные функции.

На рис. 20 показана функция $H_{3.5}^{(1)}(z)$ (аргумент находится в пределах $-\pi < \varphi < \pi$)

$$H_{3.5}^{(1)}(z) = e^{iz}\sqrt{\frac{2}{z\pi}}\left[1 - \frac{15}{z^2} - \frac{15i}{z^3} + \frac{6i}{z}\right].$$

Функция Ханкеля целого значка $H_0(z)$ изображена на рис. 21. Линия разреза проходит вдоль отрицательной полуоси OX. Зависимость цилиндрических функций Бесселя от изменения действительного аргумента и значка показана на рис. 22, как функция двух переменных $F(x, v) = J_v(x)$.

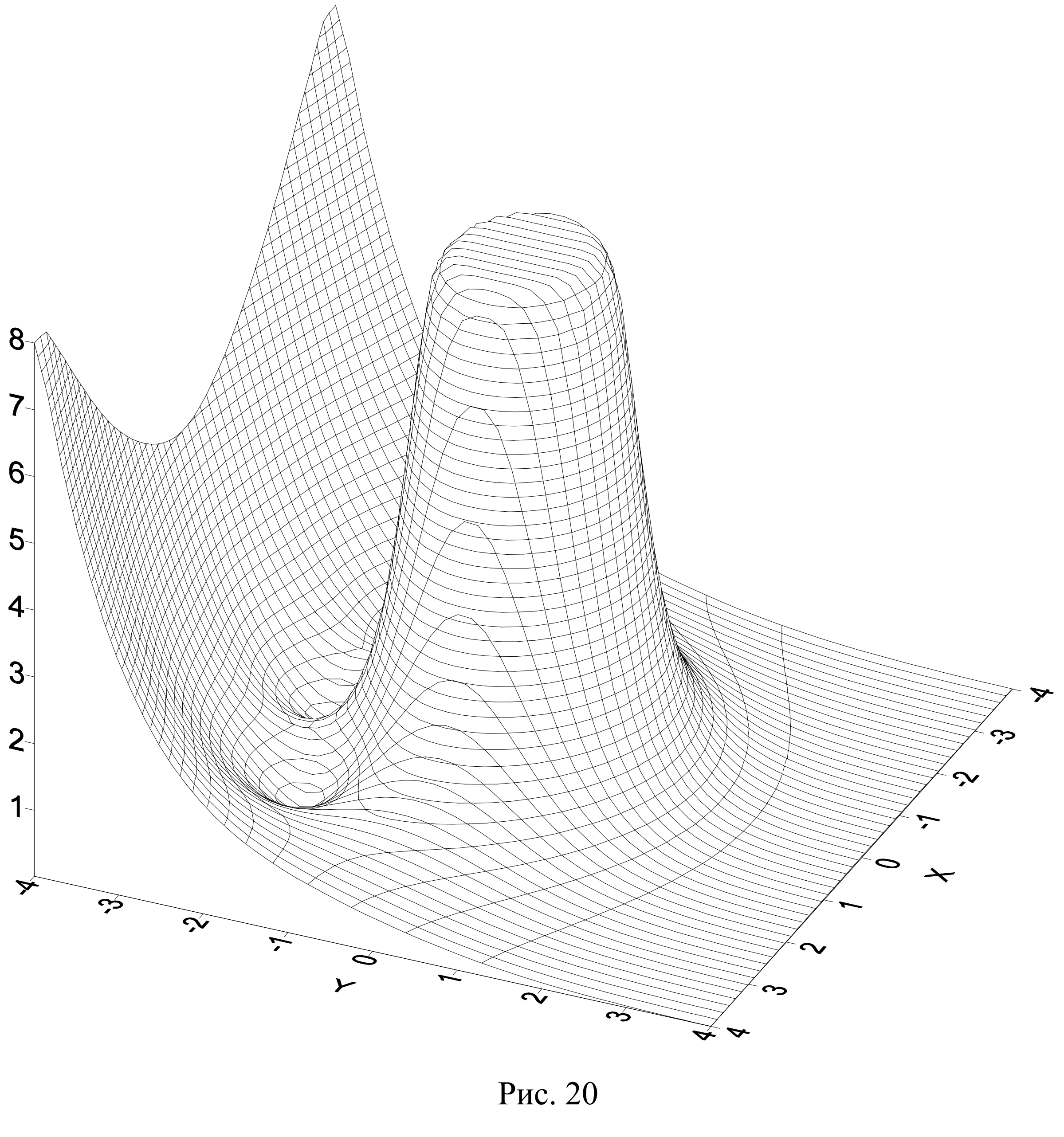
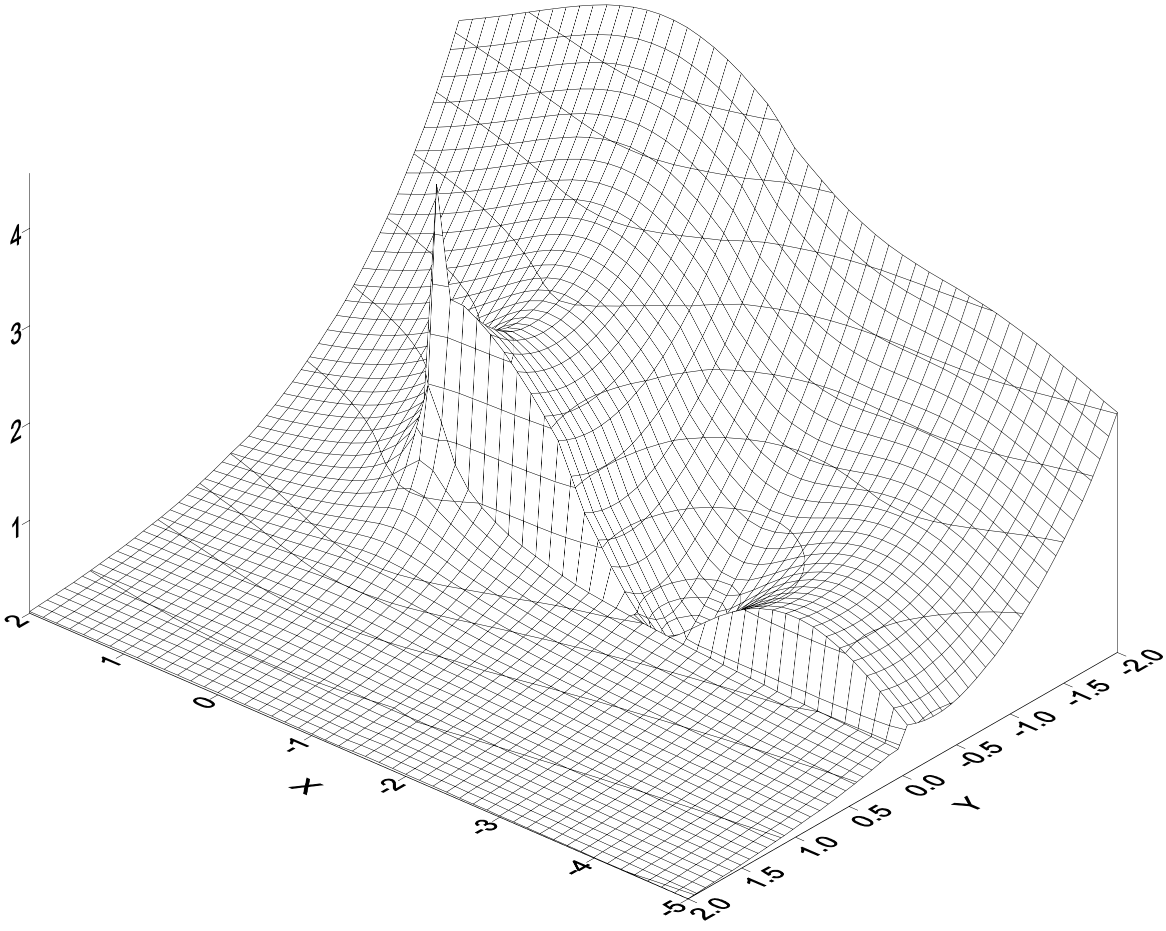
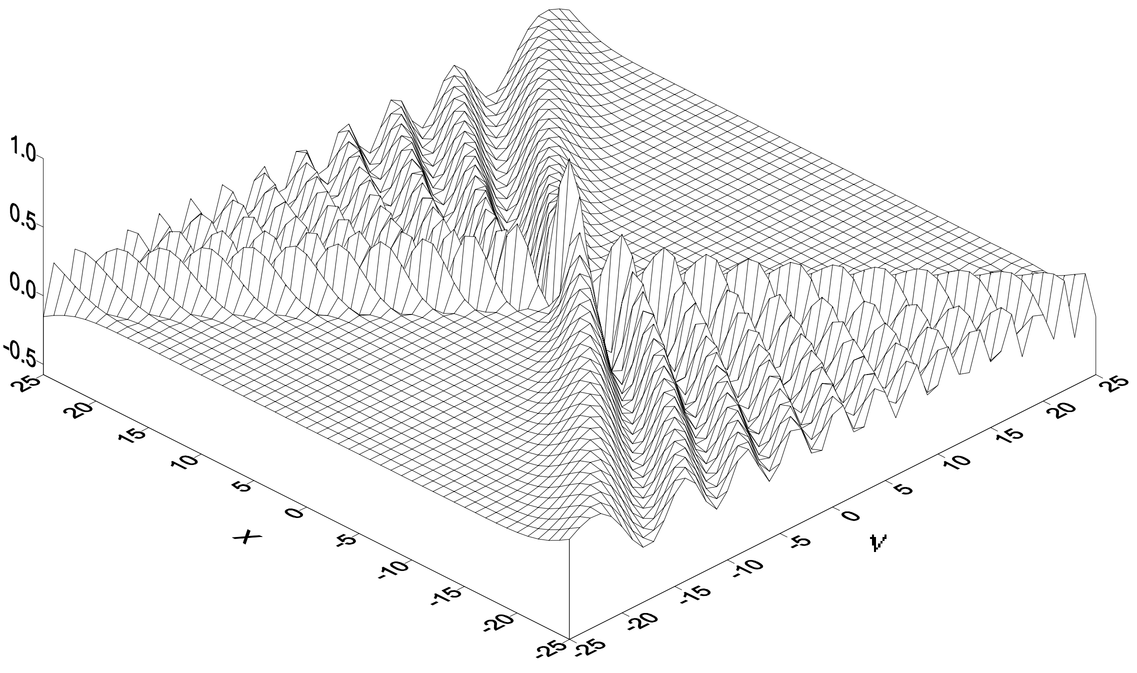


Рис. 20



4
3
2
1
2
1
0
-1
X
-2
-3
-4
-5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
Y

Рис. 21



1.0
0.5
0.0
-0.5
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
X
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25

Рис. 22

2.2.4. Функции Кельвина

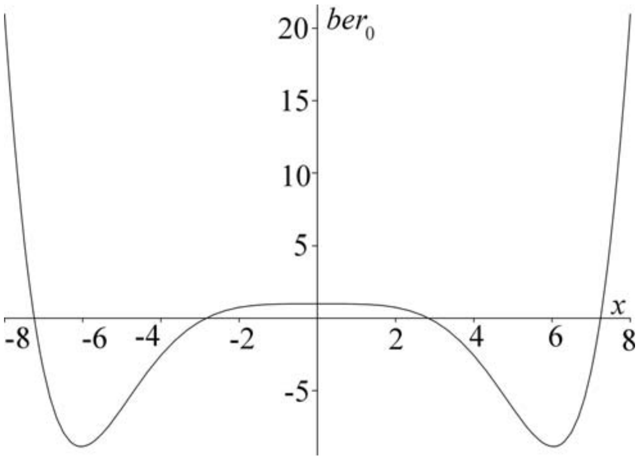
В некоторых задачах (прежде всего, электротехники) встречаются функции Бесселя аргумента

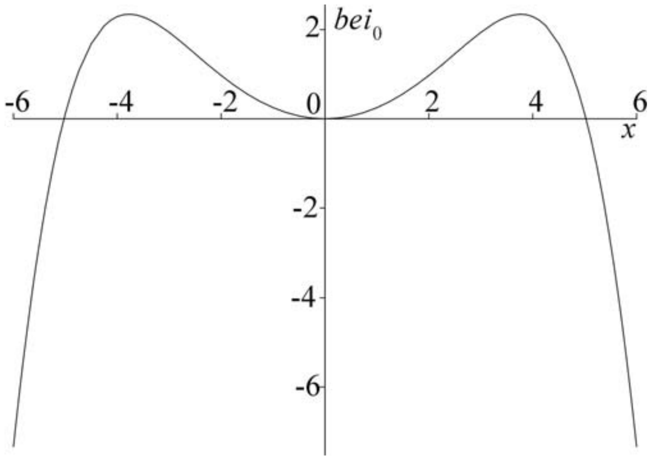
$$z = x\sqrt{-i} = xe^{3i\pi/4}.$$

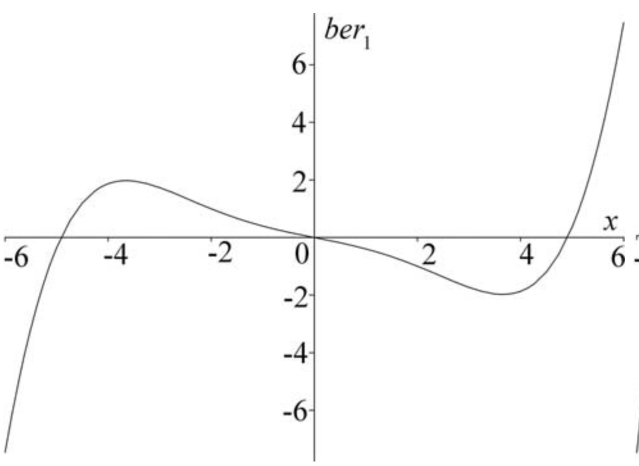
Для действительных и мнимых частей этих функций введены обозначения

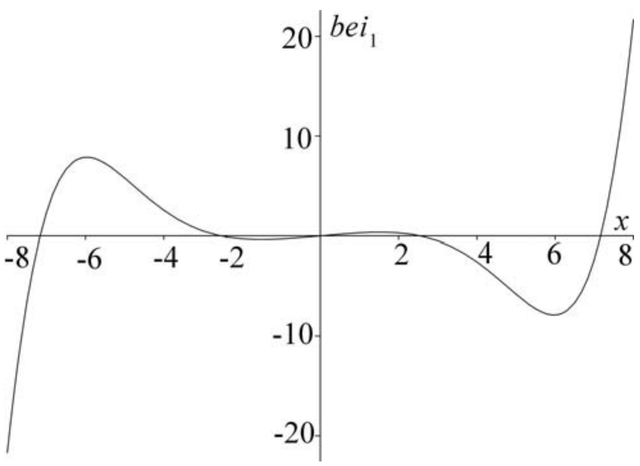
$$J_\nu\left(x\sqrt{-i}\right) = ber_\nu x + i\, bei_\nu x\,.$$

Они являются сечениями поверхности функции $J_n(z)$ вертикальной плоскостью под углом $3\pi/4$. В металлургии цветных металлов и специальных сталей используются индукционные печи, основа которых – соленоид. При расчёте магнитного поля в таком соленоиде с учётом затухания (из-за неоднородностей и конечных размеров) появляются цилиндрические функции *комплексного* аргумента. Они соответствуют сечению поверхности функции Бесселя (рис. 16) плоскостью, образующей с осью x некоторый угол, определяемый, в конечном счёте, соотношением размеров соленоида. На следующих рисунках показаны графики функций Кельвина.









2.3. Полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра являются решениями уравнения, возникающего при разделении переменных в уравнении Лапласа в сферических координатах,

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2 y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0,$$

которое называется уравнением Лежандра. Здесь $x = \cos\theta$, θ – аксиальный угол. Общая формула Родриго для вычисления полиномов Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left[\left(x^2-1\right)^n\right]}{dx^n}.$$

В частности, $P_0 = 1$, $P_1 = x$. Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему многочленов

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}.$$

Значения полиномов вычисляются по рекуррентным формулам

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x).$$

Производящая функция для полиномов Лежандра имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n .$$

Зависимость полиномов от x показана на рис. 23.

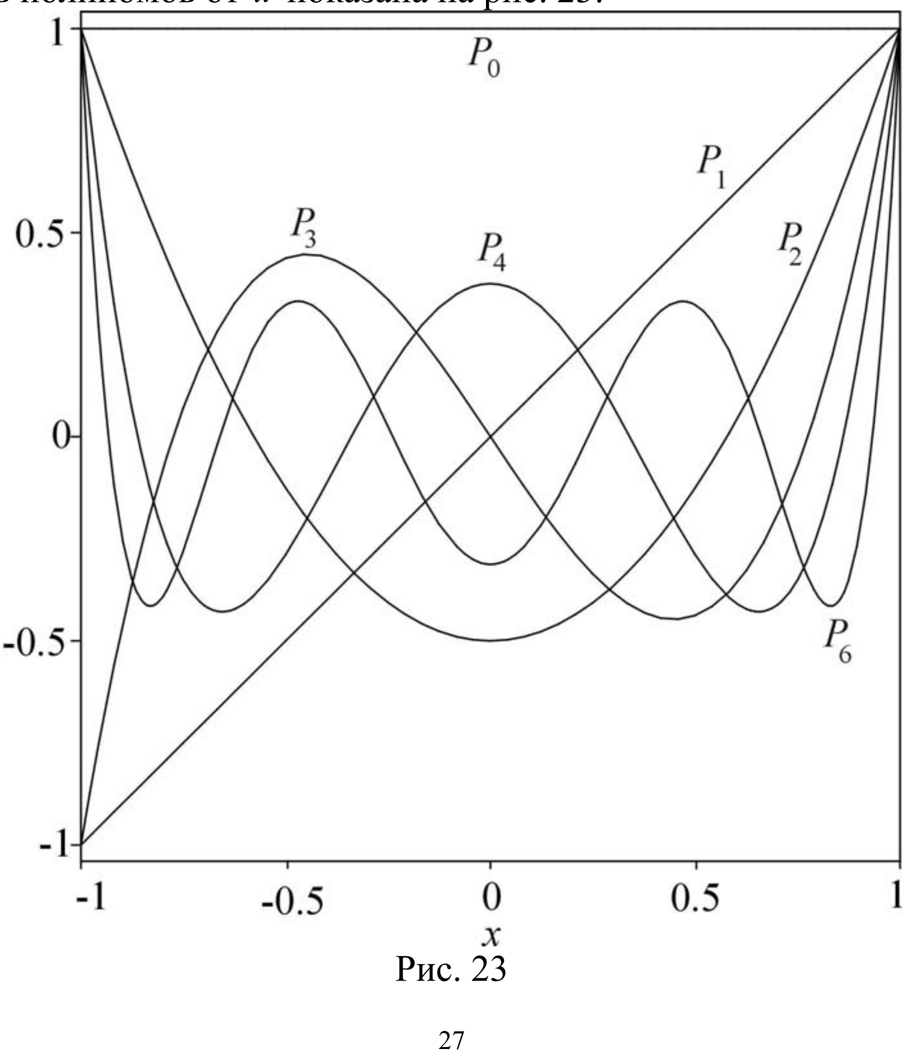


Рис. 23

2.4. Эллиптические интегралы

2.4.1. Эллиптический интеграл первого рода в нормальной форме Лежандра

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \ ,$$

где параметр k называется модулем интеграла. В теории эллиптических функций вводят также дополнительный модуль $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Рельеф функции $F(0.8, \varphi)$ над комплексной плоскостью $\varphi = x + iy$ показан на рис. 24. При $\varphi = \pi / 2$ имеем $K(k) \equiv F(k, \pi / 2)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. На рис. 25 показан рельеф $K(k)$ над плоскостью $k^2 = k_1 + ik_2$. Вдоль положительной действительной оси проходит линия разреза. При $k^2 = 1$ имеем точку ветвления. Показана ветвь функции, у которой $K(0) \equiv \pi / 2$, то есть та ветвь, которая является действительной для функции действительного аргумента.

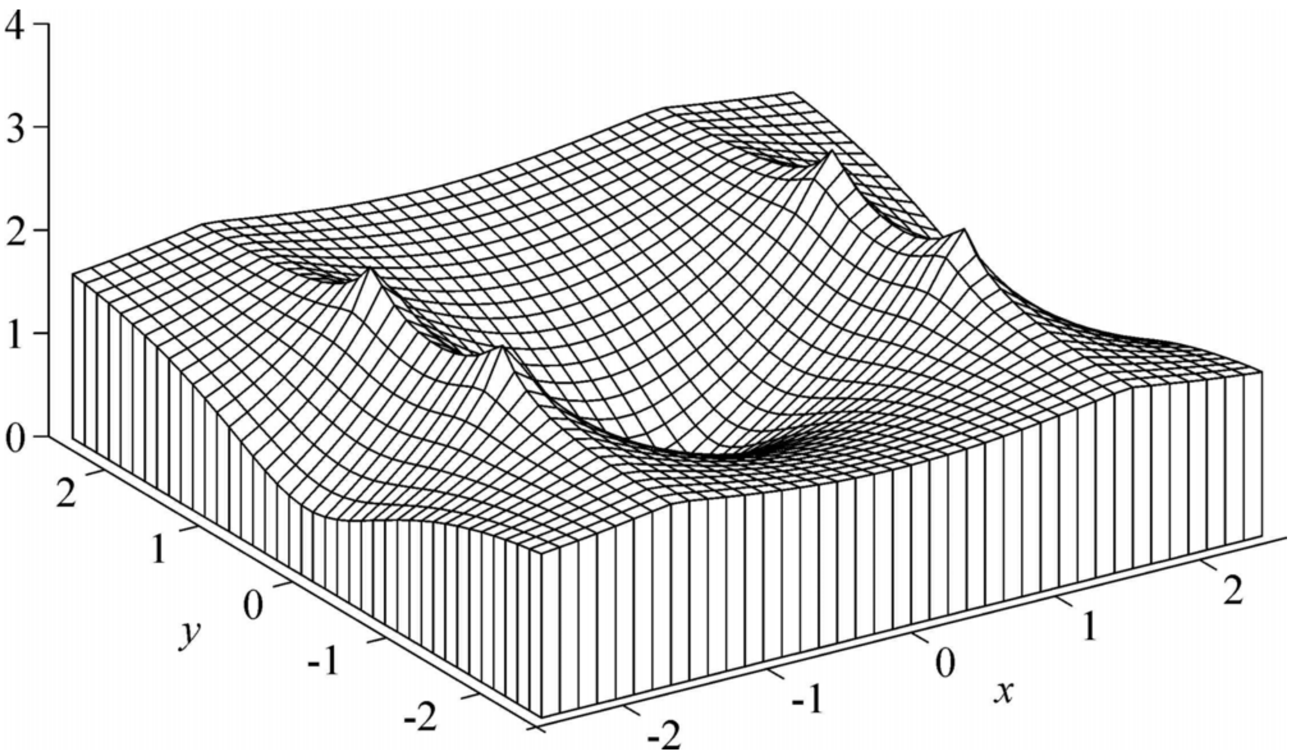


Рис. 24

Если произвести замену переменной $t = \sin\varphi$, то получим

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \ .$$

Поверхность эллиптического интеграла $F(0.8, t)$ при $t = x + iy = \sin\varphi$ показана на рис. 26. При $t = \pm 1, \pm 1 / k$ видны точки ветвления функции, причём показана одна ветвь функции.

Эллиптический интеграл – бесконечнозначная функция. Любое её значение получается добавлением величины $4nK(k) + 2imK(k')$. Числа $4K(k)$ и $2iK(k')$ называются периодами или модулями периодичности эллиптического интеграла.

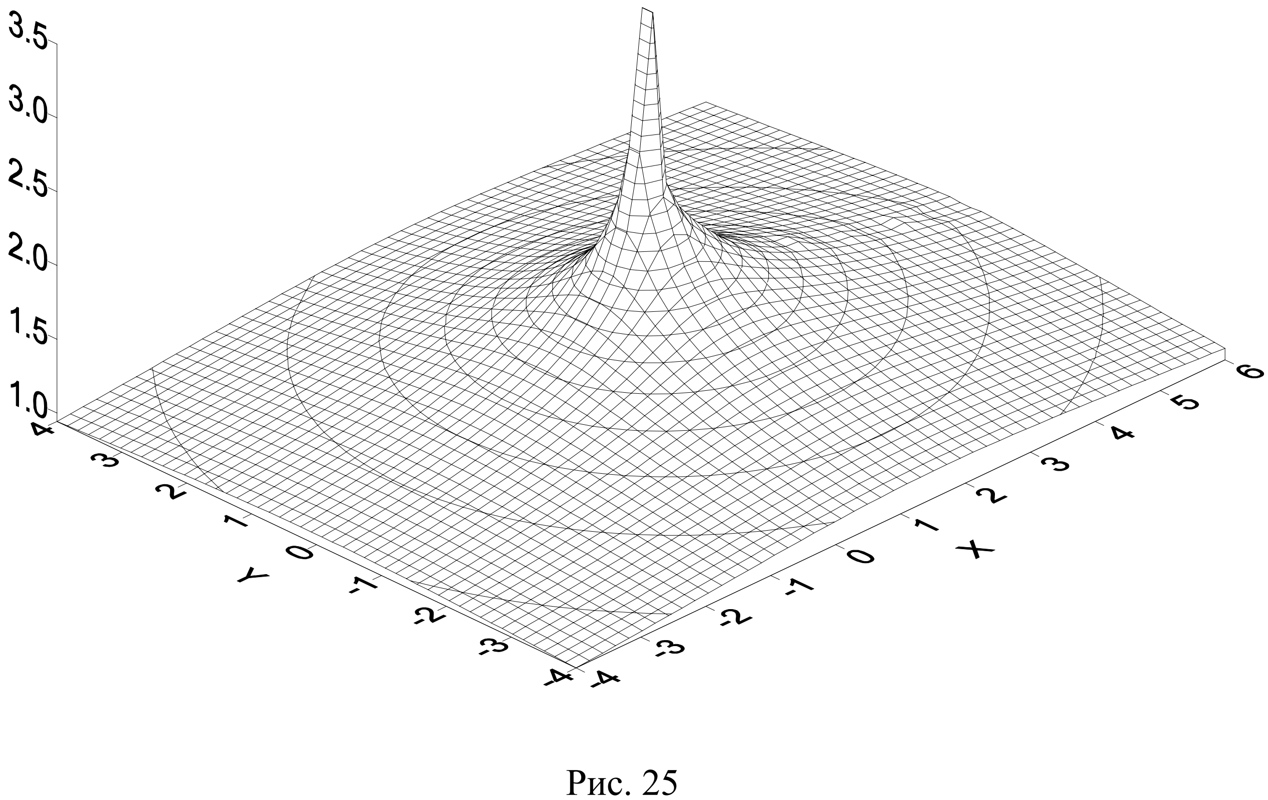


Рис. 25

2.4.2. Эллиптический интеграл второго рода

Эллиптический интеграл второго рода определяется как

$$E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}\, d\psi.$$

Рельеф $E(0.8, \varphi)$ над комплексной плоскостью $\varphi = x + iy$ показан на рис. 28. На рис. 28 видны разрывы функции, лежащие в плоскостях $y = \pi / 2$ и $y = 3\pi / 2$.

Полный эллиптический интеграл второго рода $E(k) \equiv E(k, \pi / 2)$ как функция $k^2 = k_1 + ik_2$ показан на рис. 27. Функция $E(k)$ терпит разрыв вдоль положительной действительной оси. Показана та ветвь функции, для которой аргумент комплексного числа k^2 лежит в пределах $-\pi < \varphi < \pi$ и $E(1) = 1$, $E(0) \equiv \pi / 2$.

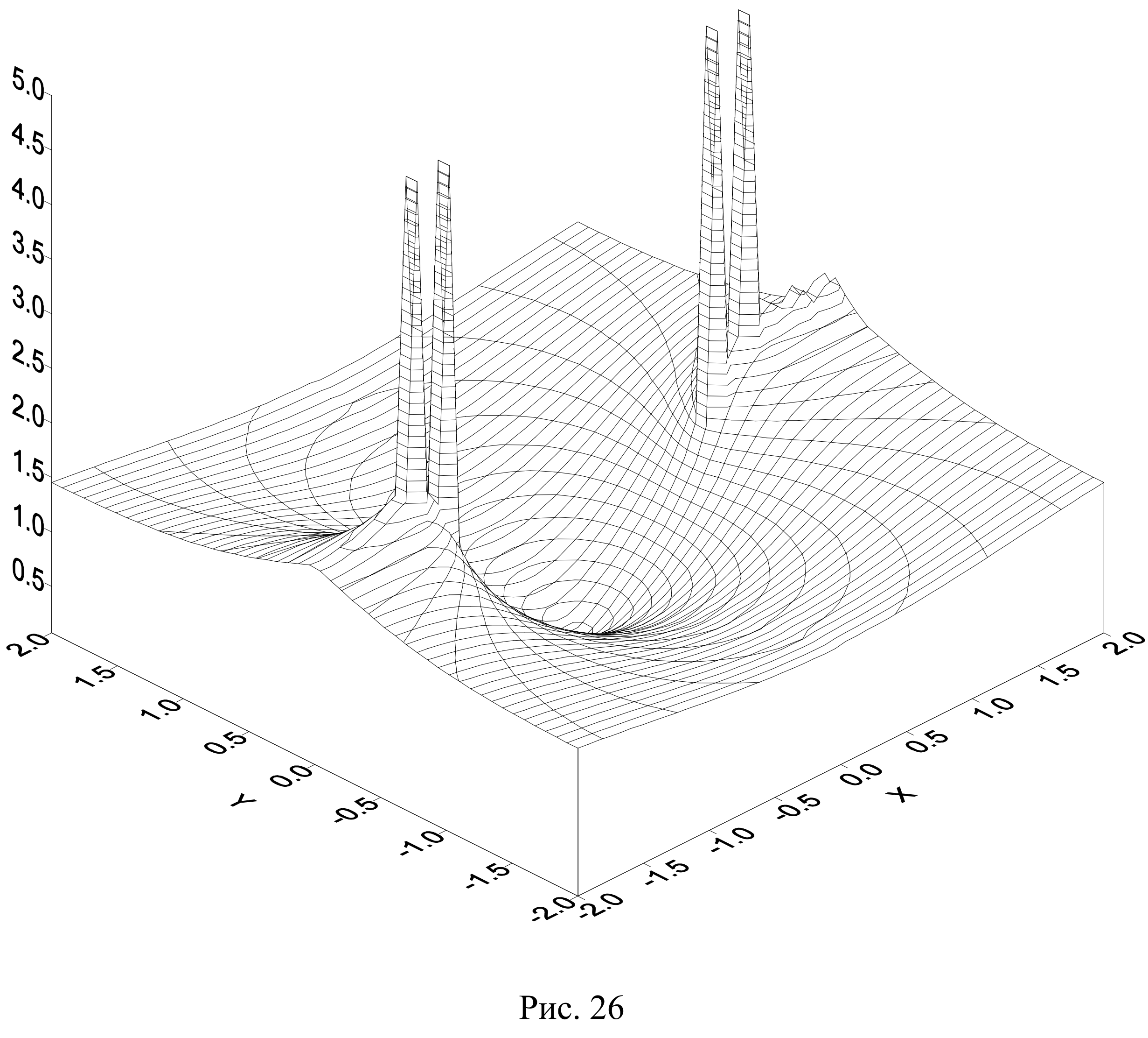


Рис. 26

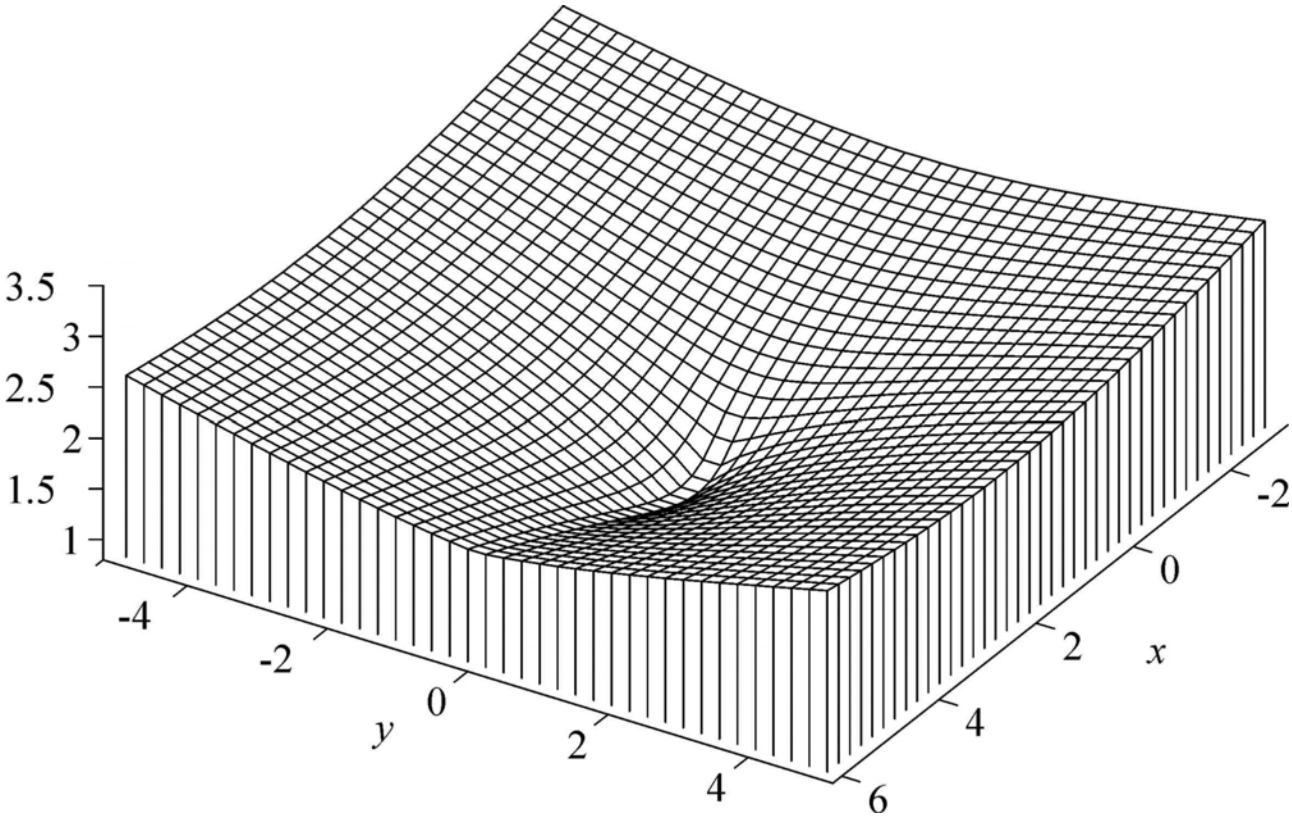


Рис. 27

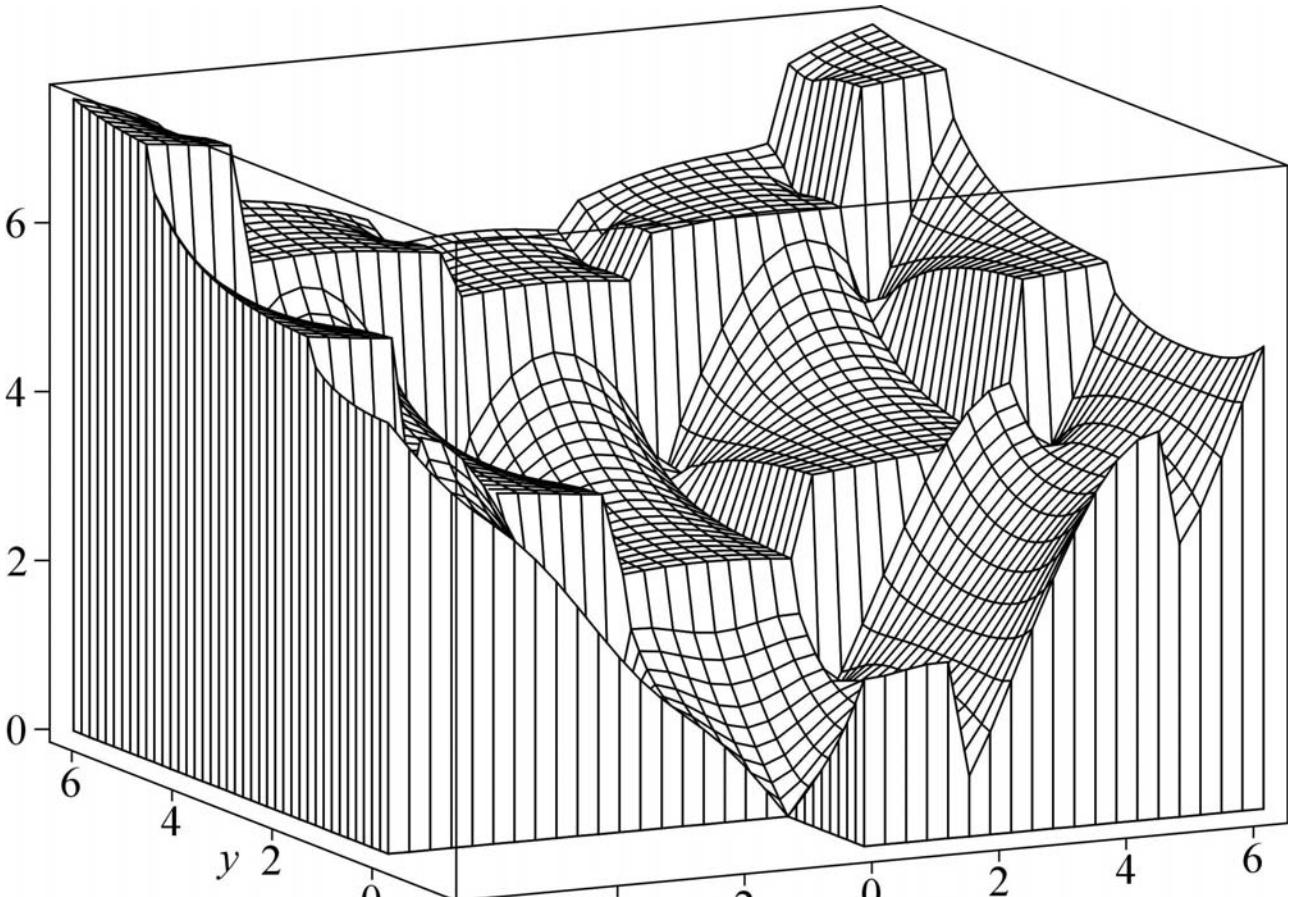


Рис. 28

2.3.5. Эллиптические функции

2.5.1. Эллиптический синус

$$F(\mathrm{z}) = \operatorname{sn} z\,.$$

Определяется как обращение эллиптического интеграла первого рода

$$u = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}\,, \quad \mathrm{z} = \operatorname{sn}(u,k) \equiv \operatorname{sn} u\,.$$

Рельеф sn z при k = 0.8 приведён на рис. 29.

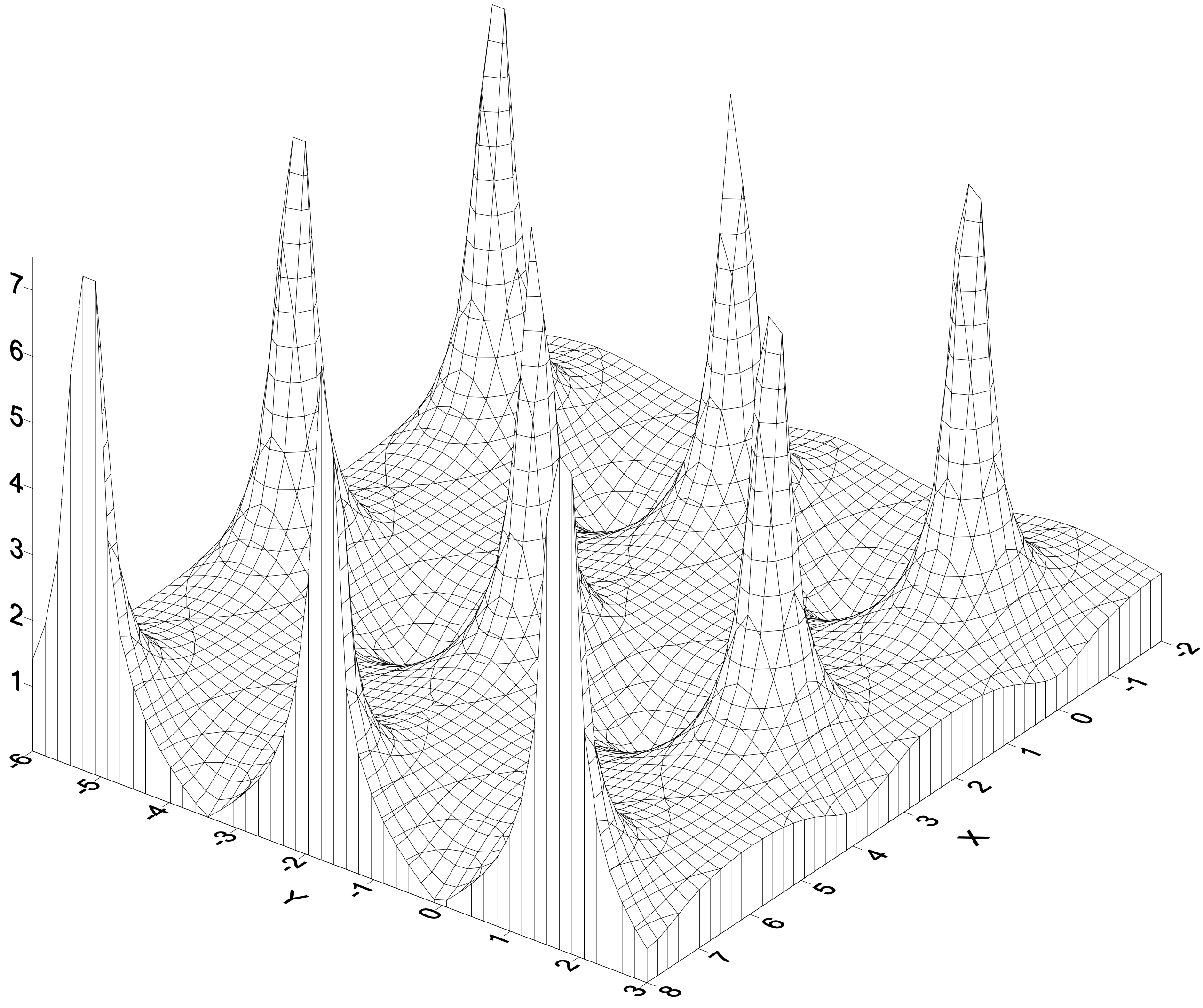


Рис. 29

Эллиптический синус вычисляется через тета-функции Якоби

$$\operatorname{sn} z = \operatorname{sn}(z,k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(z/2K)}{\vartheta_4(z/2K)} ,$$

где

$$\vartheta_4(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} e^{2mi\pi v} ,$$

$$\vartheta_1(v) = i \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{(m-1/2)^2} e^{(2m-1)i\pi v} ,$$

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}} ,$$

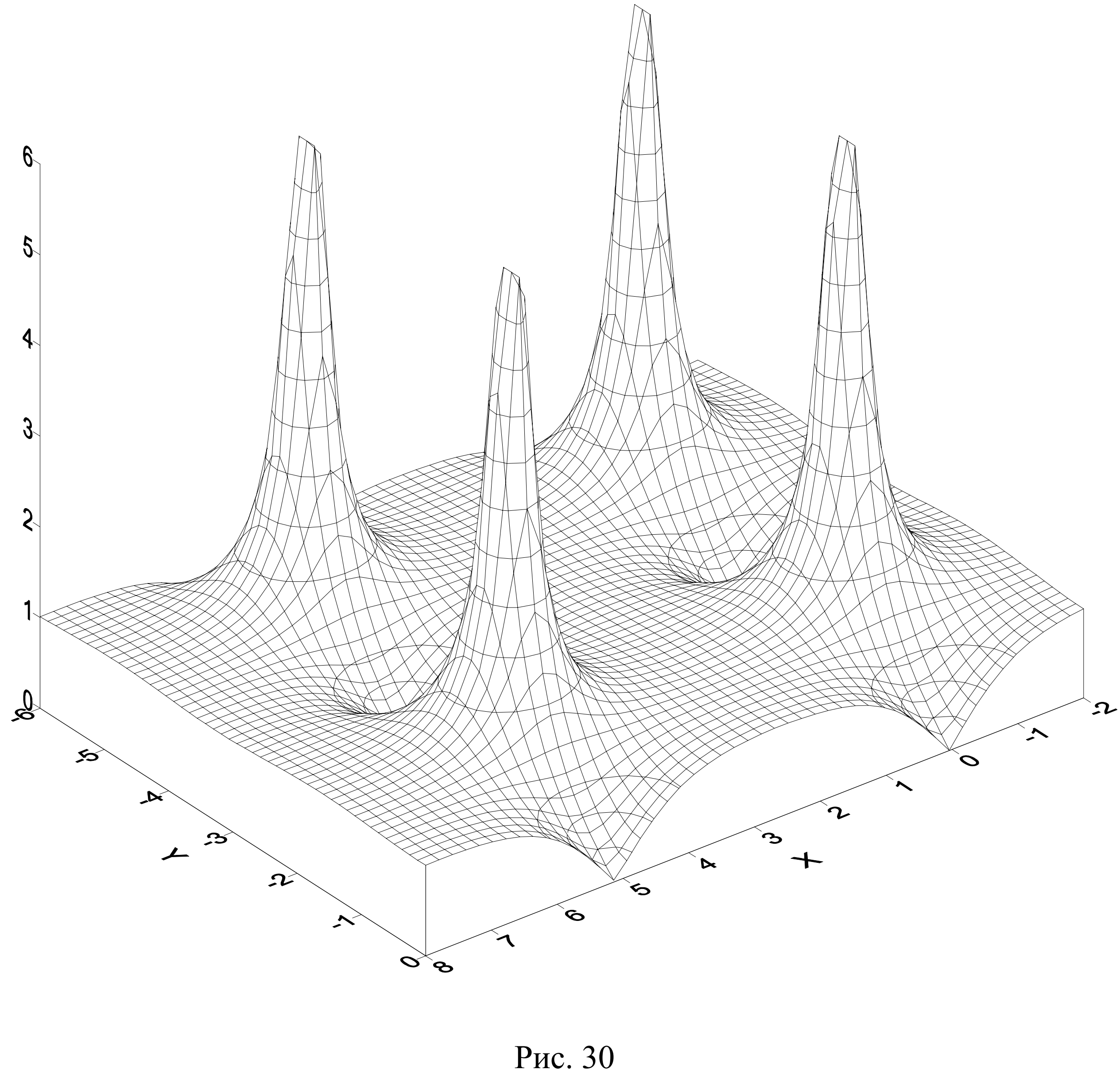


Рис. 30

где $0 < q < 1$ – параметр Якоби, $K = K(k)$ и $K' = K(k')$ – полные эллиптические интегралы по модулю k и дополнительному модулю k'.

На рис. 29 видно, что $\operatorname{sn} z$ является функцией с двумя периодами: $2iK'$ – период по мнимой оси и $4K$ – по действительной.

В предельных случаях эллиптический синус Якоби переходит в обычный синус при $k = 0$ и гиперболический тангенс при $k = 1$.

На рис. 30 показан $\operatorname{sn} z$ при $k = 0.95$, на рис. 31 при $k = 0.1$. При $k = 0$ эллиптический интеграл $K' = \infty$ и мнимый период исчезает.

Для малых аргументов справедливы следующие разложения для эллиптических функций в степенные ряды

$$\operatorname{sn} z = z - \frac{1+k^2}{3!} z^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!} z^5 - \ldots, \quad \operatorname{cn} z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1+4k^2}{4!} z^4 - \ldots$$

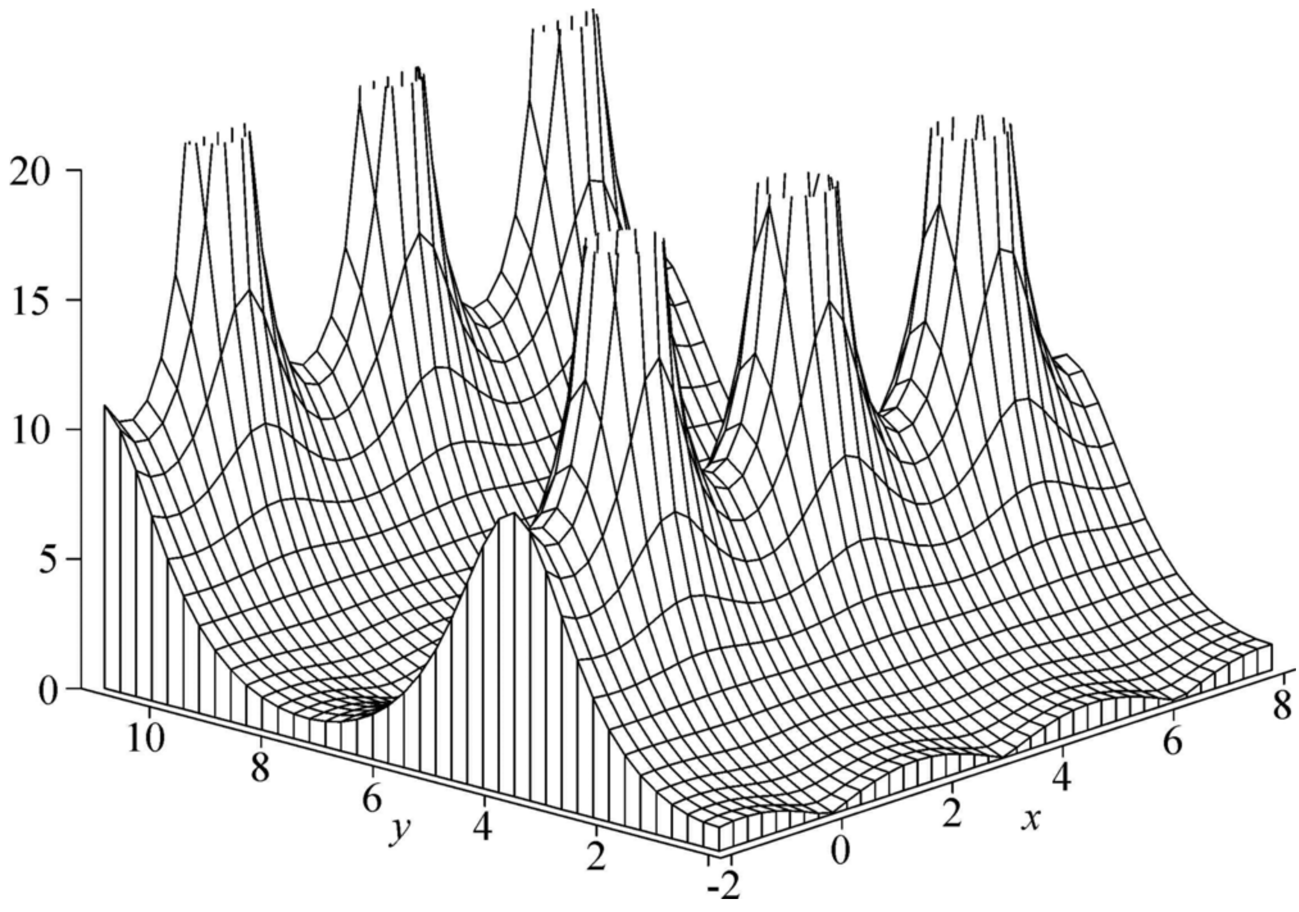


Рис. 31

2.5.2. Эллиптический косинус

По аналогии с тригонометрическим функциям вводится понятие эллиптического косинуса Якоби cn z

$$\mathrm{cn}\, z = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2 z}\,.$$

Предельные случаи для эллиптического косинуса:

$$\mathrm{cn}\, z = \cos z \qquad \text{при } k = 0,$$
$$\mathrm{cn}\, z = 1 / \mathrm{ch}\, z \qquad \text{при } k = 1.$$

Значения cn z могут быть выражены через тета-функции. Рельеф функции при $k = 0.95$ приведен на рис. 32. При $k = 1$ действительный период cn z исчезает, так как $K(1) = \infty$.

В теории эллиптических функций также вводят дополнительную функцию – дельту амплитуды

$$\mathrm{dn}\, z = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 z}\,.$$

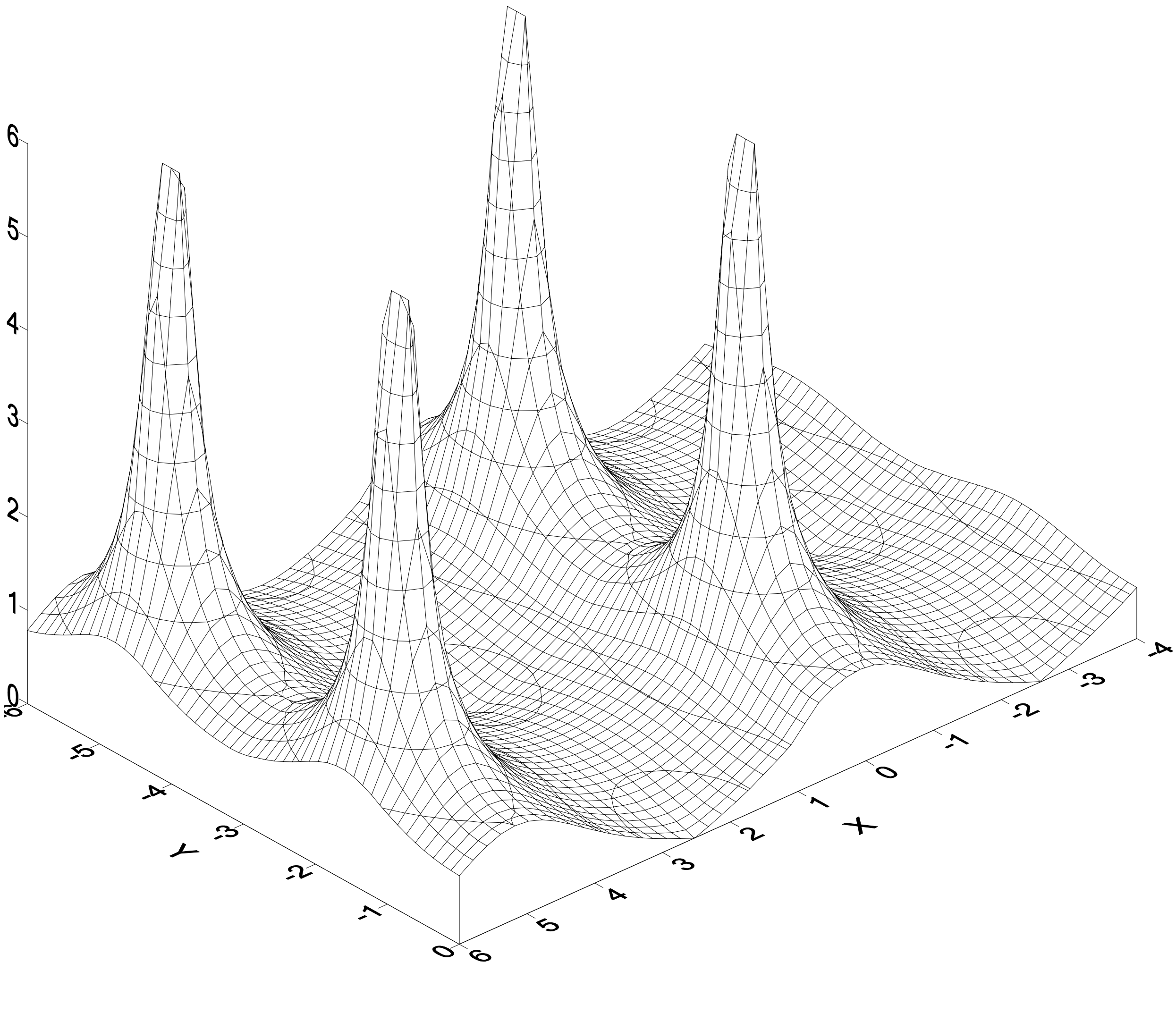


Рис. 32

Эллиптические функции (ряды по эллиптическим функциям, функции Ламе и более сложные функции) возникают при решении уравнения Лапласа в эллипсоидальных координатах и при решении различных нелинейных физических задач. Простейшим примером является уравнение нелинейного маятника

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 \sin y = 0 ,$$

общее решение которого имеет вид

$$y = 2 \arcsin\left[k \operatorname{sn}\left(\omega x + \varphi_0\right)\right],$$

где постоянная φ_0 и модуль k определяются из начальных или граничных условий. При значениях k, близких к единице, в решении проявляются существенно нелинейные свойства физических систем, и, наоборот, при малых k решение описывает линейные задачи, для случая малых отклонений от положения равновесия.

На следующем рисунке показано изменение эллиптического синуса действительного аргумента при различных значениях k. Модуль k отвечает за нелинейность задачи. Из рис. 33 видно, что при $k = 0$ решение эллиптический синус Якоби совпадает с обычным синусом.

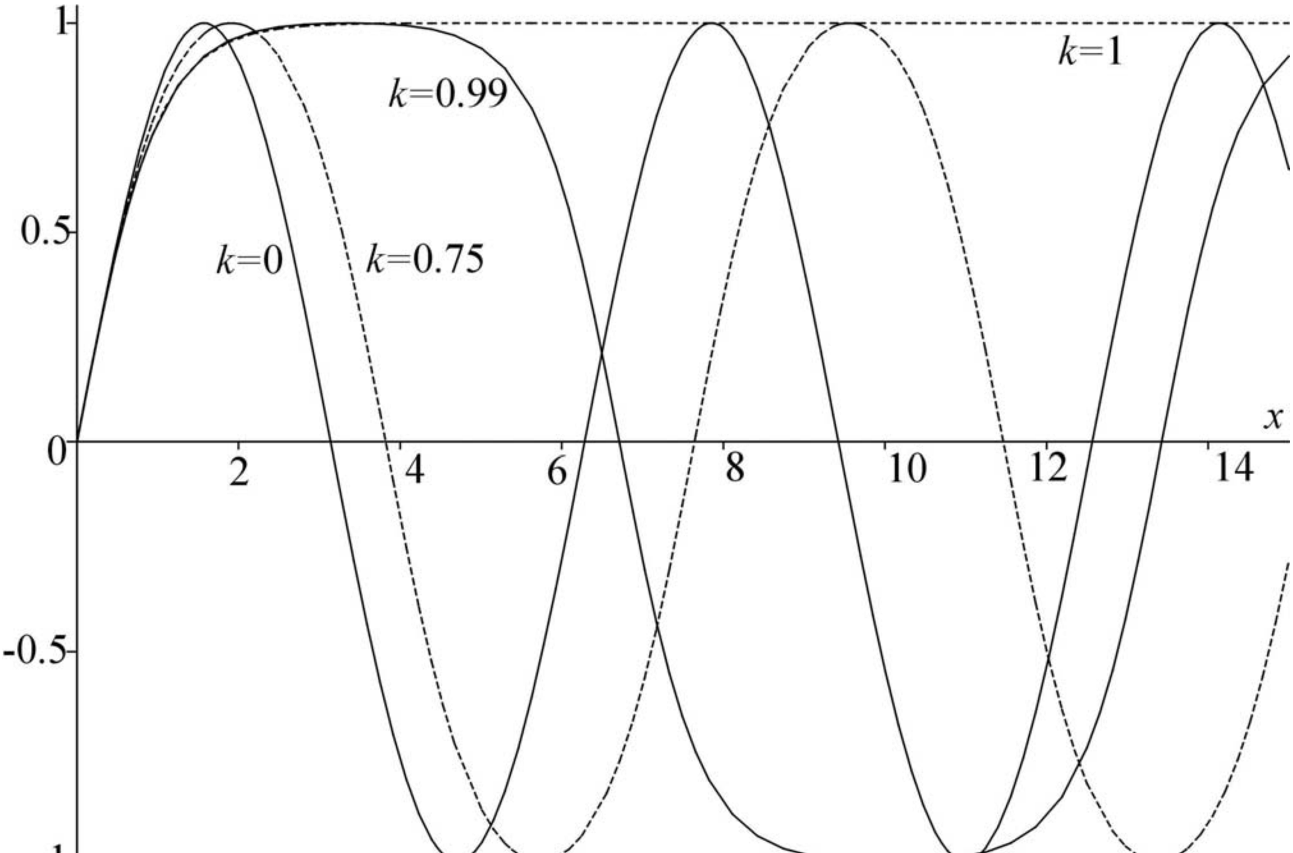


Рис. 33

2.5.3. Эллиптическая амплитуда

Эллиптической амплитудой Якоби $\mathrm{am}(u, k)$ называется обращение эллиптического интеграла первого рода, как функции верхнего предела

$$u = F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \qquad \varphi = \mathrm{am}(u, k).$$

Амплитуда является бесконечнозначной функцией u, обладающей периодом, равным $4Ki$.

Эллиптические функции Якоби выражаются через эллиптическую амплитуду следующим образом

$$\mathrm{sn}(z, k) = \sin \mathrm{am}(z, k),$$
$$\mathrm{cn}(z, k) = \cos \mathrm{am}(z, k),$$
$$\mathrm{dn}(z, k) = \frac{d\mathrm{am}(z, k)}{dz}.$$

На рис. 34 приведен график поверхности функции $E(\mathrm{am}(z, k), k)$ при $k = 0.8$, часто встречающейся при решении ряда нелинейных физических задач.

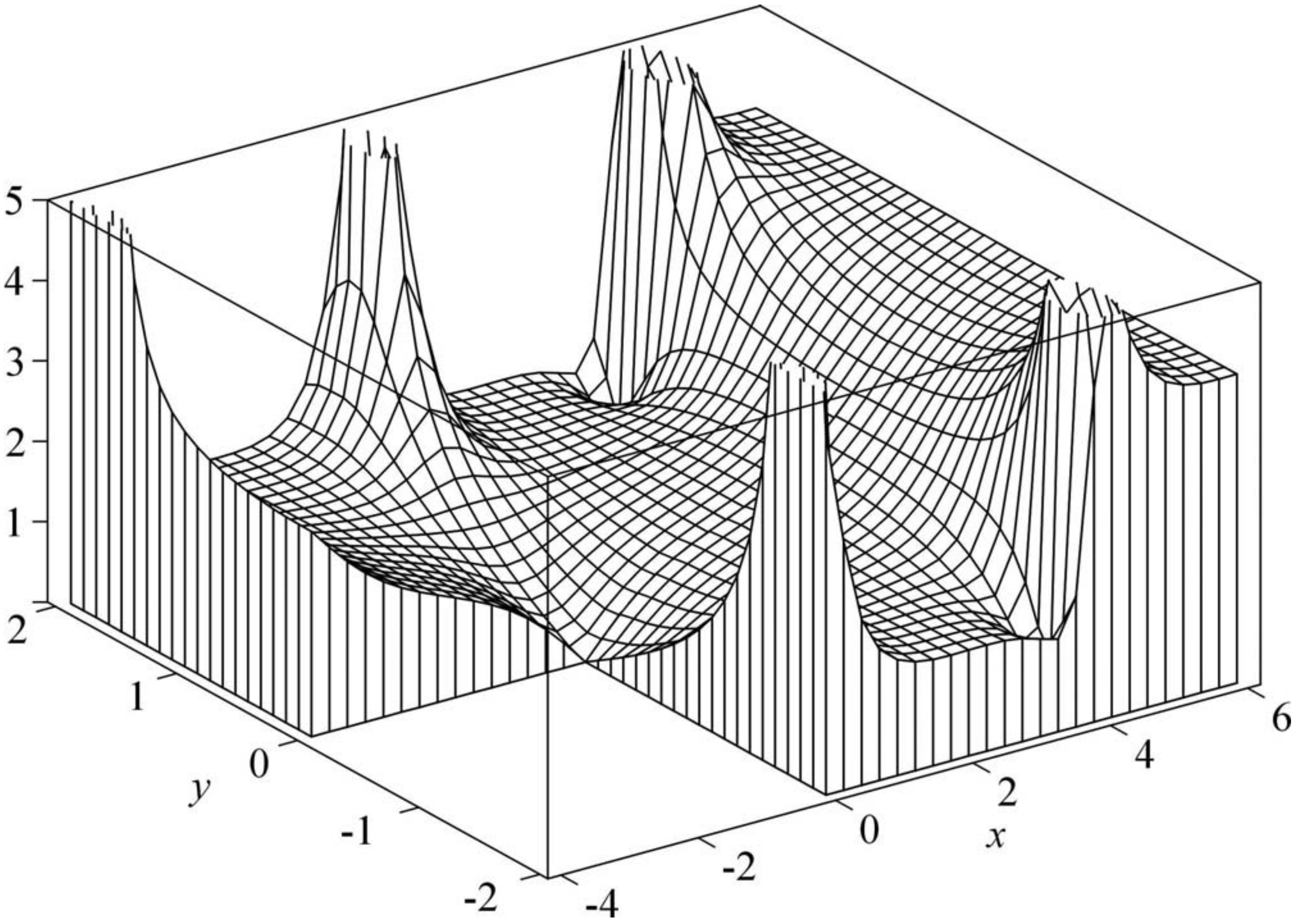


Рис. 34

Библиографический список

1. Степаненко В.А., Охоткин К.Г., Захаров Ю.В. Дифференциальная геометрия (методическое пособие) / Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2000 (1,4 п.л.)
2. Говорухин В., Цибулин В. Компьютер в математическом исследовании. – С.-Петербург: Питер, 2001, – 619 с.
3. Ровенский В.Ю. Теория кривых. Лекции по дифференциальной геометрии, ч.1 / Краснояр. гос. ун-т. Красноярск, 1996.
4. Янке Е., Эмде.Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1977. См. также: Янке Е., Эмде.Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. – М. –Л.: Гостехиздат, 1948.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. (любое издание)
6. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1970.
7. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М: Наука, 1979.
8. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1984.
9. Гусак А.А, Гусак Г.М. Линии и поверхности. – Минск: Вышейшая школа, 1985.
10. Крэкнелл А., Уонг К. Поверхность Ферми. – М.: Атомиздат, 1978.
11. Гайдуков Ю.П. Топология поверхностей Ферми металлов // Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И. Электронная теория металлов. – М.: Наука, 1971. – С. 385–397.
12. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. – М.: Мир, 1980.
13. Веннинджер М. Модели многогранников. – М.: Мир, 1974.
14. Жуковский В.И., Пивоваров Д.В., Рахматуллин Р.Ю. Визуальное мышление в структуре научного познания. – Красноярск: Изд-во КГУ, 1988.
15. Франсис Дж. Книжка с картинками по топологии. – М.: Мир. 1991.

Оглавление

Поверхности функций комплексного переменного

Составители: Юрий Владимирович Захаров,
Кирилл Германович Охоткин,
Леонид Сергеевич Титов

Редактор О.Ф. Александрова
Корректор Т.Е. Бастрыгина

Подписано в печать 23.01.04

Заказ 297

Электронная версия расположена на сайте КрасГУ по адресу
http://www.lan.krasu.ru/studies/editions.asp
и на сайте кафедры технической физики СибГАУ по адресу
http://ktf.krk.ru/courses/TFKPpr

Издательский центр
Красноярского государственного университета.
660041 Красноярск, пр. Свободный, 79.