ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ГУМАНИТАРНЫХ НАУК

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Теория функций комплексной переменной

учебно-методический комплекс
для специальностей 010701 – «Физика»,
010708 – «Биохимическая физика»,
140301 – «Физика конденсированного состояния вещества»
очной формы обучения

Красноярск 2007

Одобрено на заседаниях кафедры теоретической физики и методического совета факультета. Декан физического фак-та, проф. __________________А.М. Баранов “_17_”___февраля___ 2006 г.	Программа составлена в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования для специальности «Физика».

УДК 53:371.3+530.1

Теория функций комплексной переменной. Учебно-методический комплекс для специальностей 010701 – «Физика», 010708 – «Биохимическая физика», 140301 – «Физика конденсированного состояния вещества» очной формы обучения /сост. Ю.В. Захаров, Л.С. Титов – Красноярск: ИЦ Ин-та естеств. и гуманит. наук, 2007. – 32 с. (экспресс издание)

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Дисциплина «Теория функций комплексной переменной» входит в число дисциплин естественно научного цикла и включает в себя широкий круг вопросов как непосредственно теории функций комплексной переменной, так и приложений теории к вычислению интегралов, суммированию рядов, нахождению асимптотических разложений.

Целью преподавания данной дисциплины является формирование у студентов представления о комплексном числе, теории функций комплексной переменной, теории вычетов, разложении аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, контурном интегрировании, представления об асимптотических разложениях и методах их получения. Эти знания дадут возможность будущему специалисту–физику на практике применять методы теории функций комплексной переменной, понимать и анализировать математические методы, основанные на теории аналитических функций.

Задачи изучения дисциплины. В результате изучения данной дисциплины студент должен знать основы теории функций комплексной переменной, уметь находить вычеты и применять основную теорему теории вычетов, уметь использовать методы теории функций комплексной переменной для вычисления ряда типов определенных интегралов. Иметь представление об аналитическом продолжении и теории многозначных аналитических функций, применять метод Ватсона для суммирования знакопостоянных и знакопеременных рядов и рядов Фурье. Иметь представление об асимптотических рядах и методах Лапласа, стационарной фазы и перевала.

Умения и навыки, приобретенные на практических занятиях, способствуют закреплению полученных теоретических знаний и освоению техники расчета, что необходимо как для решения задач теории функций комплексной переменной, так и для освоения других дисциплин.

Курс: второй.
Семестр: четвертый.
Лекции: 54 час.
Практические занятия: 54 час.
Аудиторная работа: 108 час.
Самостоятельная работа (контрольные и домашние задания)**:** 32 час.
Всего часов: 140 час.
Форма контроля: экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Комплексные числа

Основные положения. Геометрический смысл комплексного числа. Основы теории пределов в области комплексных чисел.

Функции комплексной переменной

Определение, геометрический смысл функции комплексной переменной. Непрерывность функции комплексной переменной. Дифференцирование по комплексному аргументу. Необходимые условия существования производной по комплексной переменной. Достаточные условия дифференцируемости по комплексной переменной. Аналитические функции. Связь аналитических функций с гармоническими.

Элементарные функции комплексной переменной

Степенная функция. Многолистные и многозначные функции. Точки ветвления. Понятие римановой поверхности. Показательная функция и логарифм. Тригонометрические и гиперболические функции.

Интеграл по комплексной переменной

Определение, основные свойства интеграла по комплексной переменной. Теорема Коши. Физический смысл теоремы Коши и интегральной формулы Коши. Следствия теоремы Коши и интегральной формулы Коши (теорема о среднем, теорема Лиувилля, основная теорема алгебры).

Ряды Тейлора и Лорана

Теоремы о разложимости в ряды Тейлора и Лорана. Сходимость рядов Тейлора и Лорана.

Классификация особых точек

Изолированные особые точки. Устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка. Поведение аналитической функции в окрестностях изолированных особых точек. Особенности на бесконечности. Классификация однозначных аналитических функций.

Аналитическое продолжение

Основные понятия. Теорема единственности аналитического продолжения. Приемы аналитического продолжения.

Теория вычетов

Определение вычета. Основная теорема теории вычетов. Применение теории вычетов к вычислению некоторых типов интегралов. Лемма Жордана. Интегралы от функций, имеющих точки ветвления. Суммирование рядов. Интегральное представление функций.

Асимптотические методы вычисления интегралов

Асимптотическое разложение. Метод Лапласа: оценки, лемма Ватсона. Метод стационарной фазы: вклад от невырожденной стационарной точки. Метод перевала: выбор контура, нахождение первого члена разложения.

Конформное отображение

Геометрический смысл производной функции комплексного переменного. Линейные и дробно-линейные преобразования.

Методы математической физики

Постановка задач математической физики

Постановка задач математической физики. Корректность постановки задачи.

Классификация уравнений

Классификация уравнений с частными производными. Классификация и приведение к каноническому виду линейных уравнений с двумя переменными и понятие о классификации для n переменных.

Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического и параболического типов

Задачи о продольных и поперечных колебаниях струны. Телеграфное уравнение. Задачи о распространении тепла и диффузии газов (одномерный и трехмерный случаи). Три типа краевых условий. Единственность и устойчивость первых краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов. Принцип максимума. Метод распространяющихся волн (метод Даламбера). Формула Даламбера. Решение задач для полуограниченной прямой и отрезка. Распространение краевого режима.

ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тема	*Кол-во часов*	*Задачи*
Комплексные числа, действия над ними. Геометрический смысл. Извлечение корня. Элементарные функции. Обратные функции. Многозначные функции.	8	[3]: 1, 2, 23-34, 59, 61, 4, 64, 66-68, 71, 73, 74, 77, 81-83, 109-115.
Предел, непрерывность, дифференцируемость. Условия Коши-Римана. Аналитичность функции. Гармонические функции. Интегрирование.	4	[3]: 84, 85, 107, 125-127. 131-135, 137-139, 155, 156, 159, 169, 176.
Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Формула для производных интеграла Коши.	4	[3]: 386-395. 405, 412-418.
Степенные ряды. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Классификация особых точек. Особые точки многозначных функций.	4	[3]: 425-435, 452-471. 543-561, 565-600, 562, 601-610.
Нахождение вычетов. Основная теорема теории вычетов.	4	[3]: 621-630, 642. 657-661.
Самостоятельная работа. Интегралы вида $\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi$.	2	[3]: 673, 674.
Интегралы от рациональных функций $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.	2	[3]: 680-686.
Лемма Жордана и интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$.	2	[3]: 691-694, 750-753.
Главное значение интеграла по Коши. Интегралы с экспонентами.	2	[3]: 696-706, 718-721.
Интегралы с точками ветвления первого, второго и третьего типа.	4	[3]: 732-735, 758-760.
Использование логарифмической функции для вычисления интегралов.	2	см. [9].
Метод Ватсона суммирования знакопостоянных и знакопеременных рядов. Суммирования рядов Фурье.	4	см. [10].
Асимптотические методы вычисления интегралов. Методы Лапласа, стационарной фазы и перевала.	4	см. [11].
Классификация уравнений в частных производных второго порядка.	2	[5]: 1.1-1.8, 1.11-1.14, 1.21-1.23.
Постановка краевых задач для уравнений теплопроводности, волнового и Лапласа.	2	[5]: 2.2, 2.12, 2.19-2.23, 2.41, 3.1-3.3, 3.28, 4.1-4.3.
Метод Даламбера для бесконечной прямой и конечного отрезка.	2	[5]: 2.52-2.58, 2.59-2.61, 2.71.
Решение телеграфного уравнения.	2	см. [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. Сидоров Ю.В. и др. Лекции по теории функций комплексного переменного /Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.
2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. –М.: Наука, 2000.
3. Волковыский Л.И. и др. Сборник задач по теории функций комплексного переменного /Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 1975 и 2002.
4. Евграфов М.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций /Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин, К.А. Бежанов. – М.: Наука, 1969.
5. Будак Б.М. и др. Сборник задач по математической физике /Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1979.

Дополнительный

6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987.
7. Захаров Ю.В., Титов Л.С. Нахождение вычетов (методические указания, часть 1) – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1985. (№ 49).
8. Захаров Ю.В., Титов Л.С. Интегралы в бесконечных пределах (методические указания, часть 2) – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1986. (№ 208).
9. Захаров Ю.В., Титов Л.С. Интегралы в полубесконечных и конечных пределах (методические указания, часть 3) – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1986. (№ 288).
10. Захаров Ю.В., Титов Л.С. Суммирование рядов (методические указания, часть 4) – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1988. (№ 471).
11. Захаров Ю.В., Титов Л.С. Асимптотические методы вычисления интегралов (методические указания, часть 6) – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1999.
12. Захаров Ю.В. и др. Теория функций комплексного переменного. Методические указания / Ю.В. Захаров, К.Г. Охоткин, Л.С. Титов – Красноярск: Сиб. гос. аэрокосм. ун-т, 2004, электронная публикация на ktf.krk.ru .

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ГРАФИК РУБЕЖНОГО КОНТРОЛЯ

При изучении курса предусмотрена сдача трех контрольных заданий и прохождение двух рубежных контролей на 8 и 17 неделях семестра. Максимальное число баллов, отведенных на семестр 40, успешная сдача экзамена может еще принести 60 баллов.

Первый рубежный контроль:

а) Выполнение и сдача первого контрольного задания из десяти задач, приведенных в приложении 1. Каждая задача оценена в 1 балл. Всего 10 баллов.

б) Выполнение домашних заданий и успешная работа на занятиях оценивается 0,5 балла за занятие. Всего 5 баллов.

Максимальная оценка по первому рубежному контролю 15 баллов.

Второй рубежный контроль:

а) Выполнение и сдача второго индивидуального контрольного задания из трех задач, варианты заданий приведены в приложении 2. Каждая задача оценена в 5 баллов. Всего 15 баллов.

б) Выполнение и сдача третьего контрольного задания, приведенного в приложении 3. Оценка 5 баллов.
в) Выполнение домашних заданий и успешная работа на занятиях оценивается 0,5 балла за занятие. Всего 5 баллов.

Максимальная оценка по второму рубежному контролю 25 баллов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Первое контрольное задание

1. Вычислить $\left(\dfrac{1-i}{2}\right)^{1+i}$.
2. Вычислить $\operatorname{Ln}\sqrt[3]{1-i}$.
3. Доказать $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$.
4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по ее действительной части $\operatorname{Re} f(z) = x^3 + 6x^2 y - 3xy^2 - 2y^3$.
5. Вычислить $\oint\limits_{|z|=1} \sqrt[3]{z}\, dz$ для ветви $\sqrt[3]{1} = 1$.
6. Разложить в ряд Лорана для $|z| > a$ функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - a^2}$.
7. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = -2$ функцию $f(z) = \dfrac{z}{(z+2)^2}$.
8. Найти вычет $\operatorname{res}\left[\dfrac{\sin z}{z+2}, \infty\right]$.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-1| = 1/2} \dfrac{\sin z}{z(z^2-1)(z-i)}\, dz$.
10. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=4} \dfrac{z}{z+3} e^{\frac{1}{3z}}\, dz$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Варианты второго контрольного задания

Номера задач приведены по сборнику задач Волковыского [3], год издания 2002. Для удобства в приложении 4 воспроизведена глава 4 этого задачника. Номера задач в сборнике 1975 года можно найти в методических пособиях [8], [9] или рассчитать прибавлением к номеру задачи из сборника 2002 года (после откидывания номера главы) числа 542.

Вариант	Номера задач	Вариант	Номера задач
1	4.101, 4.133, 4.149.1	31	4.81, 4.128, 4.160
2	4.102, 4.134, 4.149.2	32	4.83, 4.129, 4.161
3	4.103, 4.135, 4.150	33	4.85, 4.130, 4.162
4	4.104.1, 4.136, 4.152	34	4.86, 4.133, 4.163
5	4.104.2, 4.137, 4.155	35	4.88, 4.134, 4.164
6	4.105.1, 4.142, 4.156	36	4.89, 4.135, 4.170
7	4.105.2, 4.143, 4.157	37	4.90.1, 4.136, 4.172
8	4.106, 4.145, 4.158	38	4.90.2, 4.137, 4.173
9	4.108, 4.146, 4.159	39	4.91, 4.142, 4.174
10	4.109, 4.177, 4.160	40	4.92, 4.143, 4.221
11	4.110, 4.178, 4.161	41	4.93, 4.145, 4.222
12	4.111, 4.179, 4.162	42	4.94, 4.146, 4.191
13	4.112, 4.180, 4.163	43	4.95, 4.177, 4.219
14	4.113, 4.181, 4.191	44	4.96, 4.178, 4.220
15	4.99, 4.182, 4.192	45	4.97, 4.179, 4.155
16	4.98, 4.201, 4.193	46	4.98, 4.180, 4.226
17	4.97, 4.202, 4.209	47	4.99, 4.181, 4.225
18	4.98, 4.203, 4.210	48	4.101, 4.182, 4.152
19	4.97, 4.204, 4.211.1	49	4.102, 4.191, 4.150
20	4.96, 4.205, 4.211.2	50	4.103, 4.193, 4.163
21	4.95, 4.206, 4.212	51	4.104.1, 4.194, 4.209
22	4.11, 4.118, 4.149.1	52	4.105.1, 4.197.1, 4.210
23	4.14, 4.120, 4.149.2	53	4.105.2, 4.197.2, 4.211.1
24	4.16, 4.121, 4.150	54	4.106, 4.201, 4.211.2
25	4.17, 4.122, 4.152	55	4.108, 4.202, 4.212
26	4.20.4, 4.123, 4.155	56	4.109, 4.203, 4.213
27	4.20.8, 4.124, 4.156	57	4.110, 4.204, 4.216.1
28	4.20.13, 4.125, 4.157	58	4.111, 4.205, 4.216.2
29	4.20.14, 4.126, 4.158	59	4.112, 4.206, 4.217
30	4.55, 4.127, 4.159	60	4.113, 4.192, 4.218

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Третье контрольное задание

Решить задачу № 1.21 из [5]:

a) Привести к каноническому виду уравнение с постоянными коэффициентами $aU_{xx} + 4aU_{xy} + aU_{yy} + bU_x + cU_y + U = 0$,

b) Упростить получившееся уравнение с помощью замены

$U(\xi,\zeta) = V(\xi,\zeta)\, e^{\alpha\xi + \beta\zeta}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Ниже приводится часть главы 4, содержащая тексты контрольных задач из книги [3] (Волковыский Л.И. и др. Сборник задач по теории функций комплексного переменного /Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 2002).

РЯД ЛОРАНА. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Ряд Лорана

В задачах 4.1–4.18 данную функцию разложить в ряд Лорана либо в указанном кольце, либо в окрестности указанной точки. В последнем случае надлежит определить область, в которой разложение имеет место.

4.1. $\dfrac{1}{z-2}$ в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$.

4.2. $\dfrac{1}{(z-a)^k}$ ($a \neq 0$, k — натуральное число) в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$.

4.3. $\dfrac{1}{z(1-z)}$ в окрестности точек $z=0$, $z=1$, $z=\infty$.

4.4. $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0<|a|<|b|)$ в окрестности точек $z=0$, $z=a$, $z=\infty$ и в кольце $|a|<|z|<|b|$.

4.5. $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ в окрестности точки $z=2$ и в кольце $1<|z|<2$.

4.6. $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ в окрестности точек $z=i$ и $z=\infty$.

4.7. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ $(|b| \geqslant |a|)$ в окрестности точки $z=\infty$ (рассмотреть обе ветви функции).

4.8. $f(z)=\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$ $\left(\operatorname{Im} f\left(\dfrac{3}{2}\right)>0\right)$ в кольце $1<|z|<2$.

4.9. $z^2e^{1/z}$ в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$.

4.10. $e^{1/(1-z)}$ в окрестности точек $z=1$ и $z=\infty$.

4.11. $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ в окрестности точки $z=2$.

4.12. $z^2\sin\dfrac{1}{z-1}$ в окрестности точки $z=1$.

4.13. $e^{z+1/z}$ в области $0<|z|<\infty$.

4.14. $\sin z\sin\dfrac{1}{z}$ в области $0<|z|<\infty$.

4.15. $\sin\dfrac{z}{1-z}$ в окрестности точек $z=1$ и $z=\infty$ (в последнем случае ограничиться четырьмя первыми членами ряда).

4.16. $\operatorname{ctg} z$ в окрестности точки $z=0$ и в кольце $\pi<|z|<2\pi$.

4.17. $\ln\dfrac{z-a}{z-b}$ в окрестности точки $z=\infty$.

4.18. $\dfrac{1}{z-2}\ln\dfrac{z-i}{z+i}$ в окрестности точки $z=\infty$ и в кольце $1<|z|<2$.

4.19. Выяснить, допускают ли указанные функции разложение в ряд Лорана в окрестности данной точки:

1) $\cos\dfrac{1}{z}$, $z=0$; 2) $\cos\dfrac{1}{z}$, $z=\infty$; 3) $\sec\dfrac{1}{z-1}$, $z=1$;

4) $\operatorname{ctg} z$, $z=\infty$; 5) $\operatorname{th}\dfrac{1}{z}$, $z=0$; 6) $\dfrac{z^2}{\sin(1/z)}$, $z=0$;

7) $\dfrac{z}{\sin z-3}$, $z=\infty$; 8) $\ln z$, $z=0$; 9) $\ln\dfrac{1}{z-1}$, $z=\infty$;

10) $\ln\dfrac{z-1}{z+i}$, $z=\infty$; 11) $z^\alpha (=e^{\alpha\ln z})$, $z=0$.

4.20. Выяснить, имеют ли указанные многозначные функции однозначные ветви, допускающие разложение в ряд Лорана (в частности, в ряд Тейлора) в окрестности данной точки:

1) $\sqrt{z}$, $z=0$; 2) $\sqrt{z(z-1)}$, $z=\infty$; 3) $\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$, $z=\infty$;

4) $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $z=\infty$; 5) $\sqrt[4]{z(z-1)^2}$, $z=\infty$;

6) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=1$; 7) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=0$; 8) $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z=\infty$;

9) $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z=1$; 10) $\sqrt{1+\sqrt[3]{\dfrac{z}{z+1}}}$, $z=\infty$;

11) $\operatorname{Ln}[(z-1)(z-2)]$, $z=\infty$; 12) $\operatorname{Ln}\dfrac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\gamma)(z-\delta)}$, $z=\infty$;

13) $\operatorname{Arcsin} z$, $z=0$; 14) $\operatorname{Arctg}(1+z)$, $z=0$; 15) $\operatorname{Arsh}(i+z)$, $z=0$;

16) $\sqrt{\pi/2-\operatorname{Arcsin} z}$, $z=1$; 17) $\sqrt{\pi/4-\operatorname{Arcsin} z}$, $z=\sqrt{2}/2$.

4.21. Функция $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_nz^n$, аналитическая в кольце $r\leqslant |z|\leqslant R$, однолистно отображает это кольцо на некоторую область D. Доказать, что площадь S этой области равна

$$S=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n|c_n|^2(R^{2n}-r^{2n}).$$

2) Доказать, что формула для площади S сохраняет свою силу и тогда, когда $f(z)$ аналитична лишь в области $r < |z| < R$; при этом обе части равенства могут одновременно обращаться в ∞.

Указание. См. задачи 3.151 и 3.152.

4.22. Функция $f(z)$ однолистна в области $|z| > 1$ и разлагается в этой области в ряд Лорана вида $f(z) = z + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots$

Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_{-n}|^2 \leqslant 1,$$

и выяснить геометрический смысл полученного неравенства (*внешняя теорема площадей*).

Указание. Воспользоваться тем, что для площади S_r, ограниченной образом окружности $|z| = r > 1$, имеем $(f(z) = u + iv)$

$$0 \leqslant S_r = \int_{|z|=r} u\,dv = \int_0^{2\pi} \frac{f+\overline{f}}{2}\frac{1}{2i}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial \overline{f}}{\partial \varphi}\right) d\varphi.$$

§ 2. Особые точки однозначных аналитических функций

В задачах 4.23–4.58 найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности[1]).

4.23. $\dfrac{1}{z-z^3}$. **4.24.** $\dfrac{z^4}{1+z^4}$. **4.25.** $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$. **4.26.** $\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$.

4.27. $\dfrac{e^z}{1+z^2}$. **4.28.** $\dfrac{z^2+1}{e^z}$. **4.29.** ze^{-z}. **4.30.** $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$.

4.31. $\dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$. **4.32.** $\dfrac{1-e^z}{2+e^z}$. **4.33.** $\dfrac{1}{z^3(2-\cos z)}$. **4.34.** $\operatorname{th} z$.

4.35. e^{-1/z^2}. **4.36.** $ze^{1/z}$. **4.37.** $e^{z/(1-z)}$. **4.38.** $e^{z-1/z}$.

4.39. $\dfrac{e^{1/(z-1)}}{e^z-1}$. **4.40.** $\dfrac{1}{\sin z}$. **4.41.** $\dfrac{\cos z}{z^2}$. **4.42.** $\operatorname{tg} z$.

4.43. $\operatorname{tg}^2 z$. **4.44.** $\dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$. **4.45.** $\operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$. **4.46.** $\operatorname{ctg} z - \dfrac{2}{z}$.

4.47. $\dfrac{1}{\sin z - \sin a}$. **4.48.** $\dfrac{1}{\cos z + \cos a}$. **4.49.** $\sin\dfrac{1}{1-z}$.

4.50. $\dfrac{z^7}{(z^2-4)^2\cos(1/(z-2))}$. **4.51.** $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}$. **4.52.** $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z}$.

4.53. $\sin\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$. **4.54.** $e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$. **4.55.** $e^{\operatorname{ctg}(1/z)}$.

4.56. $e^{\operatorname{tg} 1/z}$. **4.57.** $\sin\left(\dfrac{1}{\sin(1/z)}\right)$. **4.58.** $\sin\left(\dfrac{1}{\cos(1/z)}\right)$.

[1]) В ответах не делается различия между устранимой особой точкой и правильной.

В задачах 4.59–4.68 исследовать поведение каждой из однозначных ветвей заданной многозначной функции в указанных точках (определить, является точка правильной для соответствующей ветви или особой; в последнем случае указать характер особенности).

4.59. $\dfrac{z}{1+\sqrt{z-3}}$, $z=4$. **4.60.** $\dfrac{1}{\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}}$, $z=1$.

4.61. $\dfrac{2z+3}{1+z-2\sqrt{z}}$, $z=1$. **4.62.** $\cos\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z=1$.

4.63. $\dfrac{1}{(2+\sqrt{z})\sin(2-\sqrt{z})}$, $z=4$.

4.64. $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z = \left(1+\dfrac{1}{k\pi}\right)^2$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$, и $z=1$.

4.65. $\dfrac{1}{\sin\left(1+\sqrt{\dfrac{z}{z-2}}\right)}$, $z = \dfrac{2(1+k\pi)}{(1+k\pi)^2-1}$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$, и $z=\infty$.

4.66. $\sin\dfrac{1}{1+\sqrt{\dfrac{z}{z-2}}}$, $z=\infty$.

4.67. 1) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\operatorname{Ln} z}{2i}}$, $z=1$; 2) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\operatorname{Ln} z}{4i}}$, $z=1$.

4.68. $\sin\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\operatorname{Ln} z}{4i}\right)$, $z=1$.

4.69. Пусть $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ — многочлены соответственно n-й и m-й степеней. Охарактеризовать поведение на бесконечности следующих функций:

1) $P_n(z) + Q_m(z)$; 2) $\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$; 3) $P_n(z)Q_m(z)$.

4.70. Доказать равносильность следующих двух определений:

1) точка z_0 называется *полюсом порядка* n функции $f(z)$, если в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_{-n} \neq 0, \; c_{-(n+1)} = c_{-(n+2)} = \ldots = 0;$$

2) точка z_0 называется *полюсом порядка* n функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки $f(z) = \varphi(z)/(z-z_0)^n$, где функция $\varphi(z)$ аналитична и $\varphi(z_0) \neq 0$.

4.71. Построить примеры функций, имеющих в расширенной плоскости только следующие особенности:

1) полюс второго порядка на бесконечности;

2) полюс второго порядка в точке $z=0$ с главной частью разложения c_{-2}/z^2 и простой полюс на бесконечности;

3) простые полюсы в точках $z_k = \omega^k$, где $\omega = e^{2\pi i/n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1)$.

4.72. Найти общий вид функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности:

1) один простой полюс; 2) один полюс порядка n;

3) полюс второго порядка в точке $z = 0$ с главной частью разложения $1/z^2$;

4) полюс порядка n в точке $z = 0$ и полюс порядка m на бесконечности;

5) n полюсов первого порядка.

4.73. Пусть $f(z)$ — однозначная функция, не имеющая в области G других особенностей, кроме полюсов. Доказать, что функция $\dfrac{f'(z)}{f(z)-A}$ (логарифмическая производная функции $f(z)-A$) имеет простые полюсы во всех полюсах функции $f(z)$ и во всех A-точках этой функции и не имеет никаких других особых точек.

4.74. Какую особенность имеет в точке $z = z_0$ (допускается случай $z_0 = \infty$) функция $F(z) = f[\varphi(z)]$, если функция $\varphi(z)$ в этой точке аналитична или имеет полюс, а точка $\zeta_0 = \varphi(z_0)$ является для функции $f(\zeta)$ особенностью следующего вида:

1) устранимой особой точкой; 2) полюсом порядка n;

3) существенно особой точкой?

4.75. Точка z_0 (допускается случай $z_0 = \infty$) является изолированной особой точкой функции $f(z)$, отображающей дугу окружности (или прямолинейный отрезок) γ на некоторую дугу окружности (или прямолинейный отрезок) γ'. Каков характер особенности функции $f(z)$ в точке z_0^*, симметричной с z_0 относительно γ (функция $f(z)$ продолжена через γ по принципу симметрии), если точка z_0 является для $f(z)$:

1) полюсом порядка n; 2) существенно особой точкой?

4.76. *Теорема Сохоцкого* утверждает: если точка z_0 является существенно особой для функции $f(z)$, то, каково бы ни было комплексное число A (включая $A = \infty$), существует такая последовательность точек $\{z_n\}$, сходящаяся к точке z_0, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$. Доказать, что теорема Сохоцкого остается справедливой для неизолированной особой точки, являющейся предельной для полюсов[2]. (Иногда такую точку просто причисляют к существенно особым.)

4.77. Найти пределы:

$$1)\ \lim_{y\to\pm\infty} \operatorname{ctg}^2 z; \quad 2)\ \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{\sin z}; \quad 3)\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} z}; \quad 4)\ \lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sin(1/z)}.$$

Не противоречит ли существование этих пределов теореме Сохоцкого?

[2]) Предполагается, что в окрестности рассматриваемой точки полюсы являются единственными особенностями.

Теорема Пикара утверждает: в окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает бесконечно много раз всякое конечное значение, за исключением, быть может, одного, которое называется ***пикаровским исключительным значением***. Если рассматривать мероморфные функции, то возможное число исключительных значений (включая ∞) не превосходит двух (см., например, [2, гл. VIII, § 8]).

4.78. Проверить теорему Пикара для функций:

1) e^z; 2) $e^{1/z}$; 3) $\cos\dfrac{1}{z}$; 4) $\operatorname{tg} z$; 5) $\operatorname{tg}^2 z$.

Найти исключительные значения для каждой из этих функций и показать, что эти значения (если они существуют) являются асимптотическими, т. е. что можно указать хотя бы одну линию, оканчивающуюся в существенно особой точке, вдоль которой функция стремится к исключительному значению.

§ 3. Вычисление вычетов

В задачах 4.79–4.99 требуется найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удаленной точки (если она не является предельной для особых точек).

4.79. $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$. **4.80.** $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

4.81. $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ (n — натуральное число). **4.82.** $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$.

4.83. $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$. **4.84.** $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$. **4.85.** $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. **4.86.** $\operatorname{tg} z$.

4.87. $\dfrac{1}{\sin z}$. **4.88.** $\operatorname{ctg}^2 z$. **4.89.** $\operatorname{ctg}^3 z$.

4.90. 1) $\cos\dfrac{1}{z-2}$; 2) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$. **4.91.** $e^{z+1/z}$. **4.92.** $\sin z \sin\dfrac{1}{z}$.

4.93. $\sin\dfrac{z}{z+1}$. **4.94.** $\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$. **4.95.** $\dfrac{1}{z(1-e^{-hz})}$ $(h \neq 0)$.

4.96. $z^n \sin\dfrac{1}{z}$ (n — целое число). **4.97.** $\dfrac{1}{\sin(1/z)}$. **4.98.** $\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$.

4.99. $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^n}$ (n — натуральное число).

В задачах 4.100–4.107 требуется найти вычеты каждой из однозначных ветвей соответствующих многозначных функций относительно указанных точек.

4.100. $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$ относительно точки $z = 1$.

4.101. $\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$ относительно точки $z = 1$.

4.102. $\dfrac{z^a}{1-\sqrt{z}}$ $(z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z})$ относительно точки $z = 1$.

4.103. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ относительно точки $z = \infty$.

4.104. 1) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ относительно точки $z = \infty$;

2) $e^z\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ относительно точки $z = \infty$.

4.105. 1) $\mathrm{Ln}\,z \sin\dfrac{1}{z-1}$ относительно точки $z = 1$;

2) $\mathrm{Ln}\,z \cos\dfrac{1}{z-1}$ относительно точки $z = 1$.

4.106. $\dfrac{\mathrm{Arctg}\,z}{z}$ относительно точек $z = 0$ и $z = \infty$.

4.107. $z^n\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ (n — целое число) относительно точек $z = 0$ и $z = \infty$ (при вычислении вычета относительно точки $z = 0$ предполагается, что $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$).

4.108. Разложение функции в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид $f(z) = c_0 + \dfrac{c_1}{z} + \ldots$ Найти $\mathrm{res}\,[\{f(z)\}^2]_{z=\infty}$.

4.109. Найти $\mathrm{res}\,[\varphi(z)f(z)]_{z=a}$, если $\varphi(z)$ аналитична в точке a, а $f(z)$ имеет в этой точке:
1) простой полюс с вычетом A;
2) полюс порядка k с главной частью $\dfrac{c_{-1}}{z-a} + \ldots + \dfrac{c_{-k}}{(z-a)^k}$.

4.110. Найти $\mathrm{res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a}$, если:
1) a — нуль порядка n функции $f(z)$;
2) a — полюс порядка n функции $f(z)$.

4.111. Найти $\mathrm{res}\left[\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a}$, если $\varphi(z)$ аналитична в точке a и:
1) a — нуль порядка n функции $f(z)$;
2) a — полюс порядка n функции $f(z)$.

4.112. Найти $\mathrm{res}\,\{f[\varphi(z)]\}_{z=a}$, если функция $\varphi(z)$ аналитична в точке a и $\varphi'(a) \neq 0$, а $f(\zeta)$ имеет полюс первого порядка в точке $\zeta = \varphi(a)$ с вычетом A.

4.113. Функция $\varphi(z)$ имеет в точке a полюс первого порядка с вычетом A, а $f(\zeta)$ имеет в бесконечности полюс первого порядка с главной частью $B\zeta$. Найти $\mathrm{res}\,\{f[\varphi(z)]\}_{z=a}$.

4.114. Функция $f(z)$, принимающая на дуге l окружности $|z - a| = R$ действительные значения, аналитически продолжена через эту дугу по принципу симметрии. Пусть точка $z = \beta$ $(\beta \neq a)$ является для $f(z)$ полюсом порядка k с главной частью $\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{c_{-n}}{(z-\beta)^n}$.

Найти $\mathrm{res}\,[f(z)]_{z=\beta^*}$, где β^* — точка, симметричная с точкой $z = \beta$ относительно l.

§ 4. Вычисление интегралов

Непосредственное применение теоремы о вычетах

В задачах 4.115–4.124 вычислить интегралы, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.

4.115. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^4+1}$, где C — окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

4.116. $\displaystyle\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, где C — окружность $|z-2| = \dfrac{1}{2}$.

4.117. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, где C — окружность $|z| = 2$.

Указание. Воспользоваться тем, что сумма вычетов относительно всех особых точек (включая бесконечно удаленную) равна нулю.

4.118. $\displaystyle\int_C \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$, где C — окружность $|z| = 1$.

4.119. $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,dz$, где C — окружность $|z| = 1$.

4.120. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin\frac{1}{z}\,dz$, где C — окружность $|z| = r$.

4.121. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin^2\frac{1}{z}\,dz$, где C — окружность $|z| = r$.

4.122. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C z^n e^{2/z}\,dz$, где n — целое число, а C — окружность $|z| = r$.

4.123. $\displaystyle\int_{|z|=3} (1+z+z^2)(e^{1/z} + e^{1/(z-1)} + e^{1/(z-2)})dz$.

4.124. $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)}$.

4.125. Вычислить интеграл $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{zg(z)}\,dz$, если C — простой замкнутый контур, ограничивающий область G, содержащую точку $z = 0$. Функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в замкнутой области $\overline{G}$, причем функция $g(z)$ не обращается в нуль на контуре C и имеет в области G лишь простые нули $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ни один из которых не совпадает с началом координат.

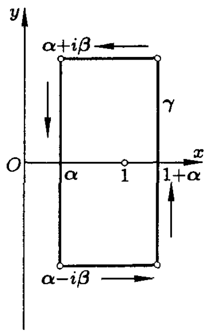

Рис. 12

4.126. Пусть $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} z^{n-1} |f(z)|^2 \, dz = a_0 \bar{a}_n R^{2n}.$$

В задачах 4.127–4.130 вычислить указанные интегралы.

4.127. $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$, где C — окружность $|z| = r \neq 1$.

4.128. $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$ $(\sqrt{1} = 1)$, где C — парабола $y^2 = x$, обходимая в сторону возрастания y.

4.129. $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{a^z \sin \pi z}$ $(a^z = e^{z \ln a})$, где $a > 0$, а C — проходимая снизу вверх прямая $x = \alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Указание. Рассмотреть $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_\gamma \frac{dz}{a^z \sin \pi z}$, где контур γ указан на рис. 12, и перейти к пределу при $\beta \to \infty$.

4.130. $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_C \frac{e^z \, dz}{\cos z}$, где контур интегрирования C указан на рис. 13.

Определенные интегралы

Если функция $f(x)$ обращается в бесконечность при $x = c$ $(a < c < b)$, то *главным значением интеграла* $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ по Коши называется

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right].$$

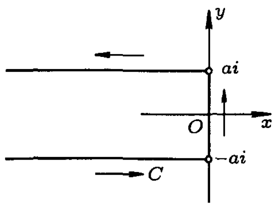

Рис. 13

Это определение естественным образом обобщается на случай криволинейного интеграла.

Если функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, то главным значением интеграла $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ называется $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} f(x)\,dx$.

В задачах 4.131–4.138 найти определенные интегралы. В случае, если интеграл несобственный и расходится, найти его главное значение (если оно существует).

4.131. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos\varphi}$ $(a > 1)$. Указание. Положить $e^{i\varphi} = z$.

4.132. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos\varphi)^2}$ $(a > b > 0)$.

4.133. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos^2\varphi)^2}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

4.134. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}$ (a — комплексное число и $a \neq \pm 1$).

4.135. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi \, d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}$ (a — комплексное число и $a \neq \pm 1$).

4.136. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cos(n\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi$ (n — целое число).

4.137. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + ia)\,dx$ (a — действительное число).

4.138. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x + a)\,dx$ (a — комплексное число и $\operatorname{Im} a \neq 0$).

4.139. Доказать, что при $b > a > -1$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^a\varphi \cos b\varphi \, d\varphi = \frac{\pi \Gamma(a+1)}{2^{a+1}\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}.$$

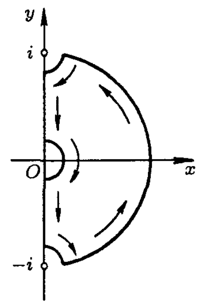

Рис. 14

Указание. Рассмотреть $\displaystyle\int\limits_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^a z^{b-1}\,dz$, где C — контур, изображенный на рис. 14, и устремить радиусы дуг маленьких окружностей к нулю. При вычислении интеграла по вертикальному отрезку разбить его на два и соответствующими подстановками свести их к эйлеровым интегралам первого рода; воспользоваться также известным соотношением между эйлеровыми интегралами $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ и формулой $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin \pi p}$.

В задачах 4.140–4.146 вычислить интегралы с бесконечными пределами.

4.140. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$. **4.141.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$ $(a>0)$.

4.142. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$ (n — натуральное число).

4.143. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a>0,\ b>0)$. **4.144.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

4.145. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^n}$ ($n\geqslant 2$ — натуральное число).

Указание. Рассмотреть интеграл $\displaystyle\int_C\frac{dz}{1+z^n}$, где C — контур, состоящий из лучей $\arg z=0$, $\arg z=2\pi/n$ и соединяющей их дуги окружности.

4.146. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx$ $(n\geqslant 2)$.

Примечание. Метод вычисления интегралов из задач 4.145 и 4.146 переносится на интегралы от рациональных функций вида $R(x^n)$.

4.147. Доказать, что $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d\tau}{\tau^n\bar\tau^k}=\frac{i^{k-n-1}(n+k-2)!}{(2h)^{n+k-1}(k-1)!(n-1)!}$ (n и k — натуральные числа), где C — прямая, параллельная действительной оси и отсекающая на мнимой оси отрезок, равный h $(h>0)$.

4.148. Вычислить интеграл $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d\tau}{\bar\tau^k(\tau-z)}$ (k — натуральное число), где C — контур предыдущей задачи.

В задачах 4.149–4.152, пользуясь леммой Жордана (см. задачу 3.17), вычислить указанные интегралы.

4.149. 1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10}$; 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2-2x+10}$.

4.150. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2+4x+20}$.

4.151. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx$ (a и b — положительные числа).

4.152. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx$ (a и b — положительные числа).

4.153. Пусть $f(z)=e^{imz}F(z)$, где $m>0$, а функция $F(z)$ обладает следующими свойствами:

1) в верхней полуплоскости она имеет конечное число особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2) аналитична во всех точках действительной оси, кроме точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$, являющихся простыми полюсами;

3) $F(z)\to 0$, если $z\to\infty$ и $\operatorname{Im}z\geqslant 0$.

Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\Big\{\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}[f(z)]_{z=a_k}+\frac12\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}[f(z)]_{z=x_k}\Big\},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения (относительно всех точек x_k и ∞).

В задачах 4.154–4.158 найти главные значения указанных интегралов (t — действительное число).

4.154. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x}\,dx$. **4.155.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x\,dx}{x^2-5x+6}$.

4.156. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{(x^2+4)(x-1)}$. **4.157.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx}{1+x^3}\,dx$. **4.158.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx}{1-x^4}\,dx$.

В задачах 4.159–4.164 вычислить указанные интегралы (a и b — положительные числа).

4.159. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx$. **4.160.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)}$. **4.161.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)^2}$.

4.162. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,dx$.

4.163. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

Указание. Воспользоваться интегралом $\displaystyle\int_C\frac{e^{2iz}-1}{z^2}\,dz$, где контур C указан на рис. 15.

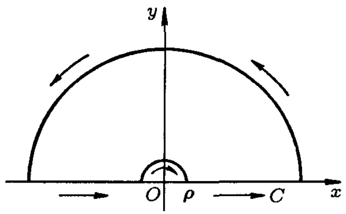

Рис. 15

4.164. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$. Указание. Воспользоваться интегралом $\displaystyle\int_C\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz$, где контур C указан на рис. 15.

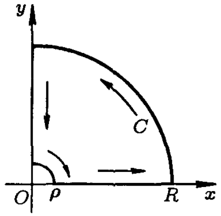

Рис. 16

В задачах 4.165–4.168 вычислить интегралы, считая, что $x^p > 0$ при $x > 0$ (это условие сохраняется во всех последующих задачах).

4.165. 1) $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}\cos ax\,dx$ $(a>0,\ 0<p<1)$;

2) $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}\sin ax\,dx$ $\quad (a > 0, \quad -1 < p < 1)$.

Указание. Воспользоваться интегралом $\displaystyle\int_C z^{p-1}e^{-az}\,dz$, где контур C указан на рис. 16.

4.166. $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^p\,dx$ $(p > 1)$. **4.167.** $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^p\,dx$ $(|p| > 1)$.

4.168. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^p}{x^p}\,dx$ $\left(p > \frac{1}{2}\right)$.

4.169. Пусть рациональная функция $f(z)$ имеет полюсы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ни один из которых не лежит на положительной части действительной оси и не равен нулю, и p — такое действительное число, что $\lim\limits_{z\to 0}[z^{p+1}f(z)] = \lim\limits_{z\to\infty}[z^{p+1}f(z)]=0$.

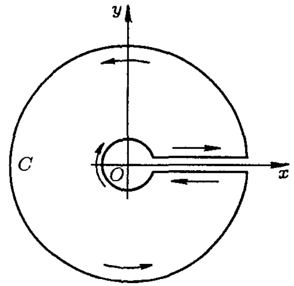

Рис. 17

Доказать, что:

1) если p не целое число, то

$$\int_0^\infty x^p f(x)\,dx = -\frac{\pi}{\sin\pi p}\,e^{-\pi p i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[z^p f(z)]_{z=\alpha_k};$$

2) если p — целое число, то

$$\int_0^\infty x^p f(x)\,dx = -\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[z^p\operatorname{Ln}z\cdot f(z)]_{z=\alpha_k},$$

где $\operatorname{Ln}z = \ln|z| + i\arg z$ и $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

Указание. Рассмотреть соответственно интегралы $\displaystyle\int_C z^p f(z)\,dz$ и $\displaystyle\int_C z^p\operatorname{Ln}z\cdot f(z)\,dz$, где C — контур, изображенный на рис. 17.

4.170. Вычислить $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p(x+1)}$ $(0 < p < 1)$.

4.171. Доказать, что $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin\pi a}$ $(0 < a < 1)$.

Указание. Воспользоваться известным соотношением между эйлеровыми интегралами $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b)$ и произвести в интеграле, определяющем бэта-функцию $\mathrm{B}(a,b) = \displaystyle\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$, замену переменной, положив $x = y/(1+y)$.

Примечание. Соотношение, доказываемое в задаче лишь для действительных чисел a, заключенных в интервале $(0,1)$, справедливо для всех комплексных чисел. При $z = -n$, где n — натуральное число, обе части равенства обращаются в ∞.

В задачах 4.172–4.174 вычислить указанные интегралы.

4.172. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{1+x^2}$ $(-1 < p < 1)$. **4.173.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{(1+x^2)^2}$ $(-1 < p < 3)$.

4.174. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{x^2+2x\cos\lambda+1}$ $(-1 < p < 1, \ -\pi < \lambda < \pi)$.

4.175. Пусть рациональная функция $f(z)$ имеет на положительной части действительной оси полюсы лишь первого порядка $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, а среди других ее полюсов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (если они есть) нет равного нулю. Пусть далее p — такое действительное число, что

$$\lim_{z\to 0}[z^{p+1}f(z)] = \lim_{z\to\infty}[z^{p+1}f(z)] = 0.$$

Доказать, понимая под интегралом его главное значение, что:

1) если p не целое число, то

$$\int_0^\infty x^p f(x)\,dx = -\frac{\pi}{\sin\pi p}\,e^{-\pi p i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[z^p f(z)]_{z=\alpha_k} - \pi\operatorname{ctg}\pi p\sum_{k=1}^{m}\beta_k^p\operatorname{res}[f(z)]_{z=\beta_k},$$

где $x^p > 0$ при $x > 0$;

2) если p — целое число, то

$$\int_0^\infty x^p f(x)\,dx = -\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[z^p\operatorname{Ln}z\cdot f(z)]_{z=\alpha_k} - \sum_{k=1}^{m}\beta_k^p(\ln\beta_k+\pi i)\operatorname{res}[f(z)]_{z=\beta_k};$$

ветвь $\operatorname{Ln}z$ выбирается так же, как в задаче 4.169.

В задачах 4.176–4.178 вычислить главные значения интегралов.

4.176. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^4-1}$. **4.177.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4-1}$.

4.178. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\,dx}{1-x}$ $(-1 < p < 0)$. **4.179.** $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}\,dx}{1-e^x}$ $(0 < p < 1)$.

В задачах 4.180–4.186 вычислить указанные интегралы.

4.180. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}\,dx$ $(-1 < p < 2)$. Указание. Рассмотреть $\int\limits_C \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{(1+z)^3}\,dz$, где C — указанный на рис. 18 контур, ограничивающий двусвязную область, и перейти к пределу при $R \to \infty$.

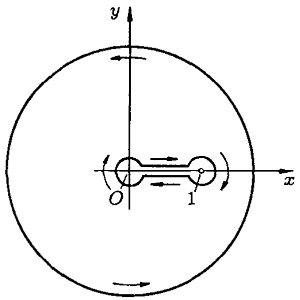

Рис. 18

4.181. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx$ $(-1 < p < 2)$.

Указание. Доказать, что

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}\,dz = 2\pi i e^{-p\pi i},$$

где C_R — обходимая в положительном направлении окружность $|z| = R$.

4.182. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p\,dx}{(1+x)^2}$ $(-1 < p < 2)$.

4.183. $\int\limits_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{x+a}$ $(-1 < p < 1,\ a > 0)$.

4.184. $\int\limits_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{(x+a)^2}$ $(-1 < p < 1,\ a > 0)$.

4.185. $\int\limits_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx$ $(-1 < p < 2)$.

4.186. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

4.187. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}$, где $\sqrt{1-x^2} > 0$ при $-1 < x < 1$, a — комплексное число и $a = \pm 1$. Найти, в частности, значения интеграла при $a = \pm e^{i\alpha}$ $(0 < \alpha < \pi)$, $a = iy$ и $-1 < a < 1$ (главное значение).

4.188. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{-p}}{b-x}\,dx$, где $0 < p < 1$, b — комплексное число и $b \neq 0$, $b \neq 1$.

4.189. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Указание. Рассмотреть интеграл $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt[n]{1-z^n}}$, где C — контур, состоящий из разрезов по радиусам-векторам точек $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$,

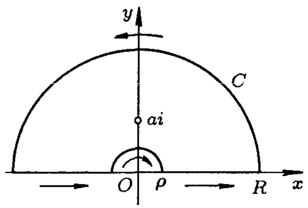

Рис. 19

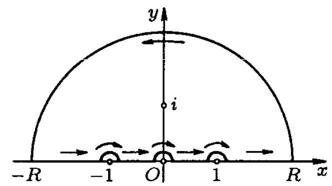

Рис. 20

где $\omega = e^{2\pi i/n}$, и окружности $|z| = R > 1$. (Этот интеграл может быть вычислен и с помощью бэта-функции Эйлера.)

В задачах 4.190–4.195 вычислить интегралы $(a > 0)$.

4.190. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+a^2}$. Указание. Воспользоваться интегралом $\int\limits_C \frac{\ln z\,dz}{z^2+a^2}$, где контур C указан на рис. 19.

4.191. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln^2 x\,dx}{x^2+a^2}$. **4.192.** $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}$. **4.193.** $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$.

4.194. $\int\limits_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}-x\right)\frac{dx}{1+x^2}$. Указание. Вычислить действительную часть интеграла $\int\limits_C \ln\left(\frac{1}{z}-z\right)\frac{dz}{1+z^2}$, где C — контур, указанный на рис. 20.

4.195. $\int\limits_0^1 \ln\frac{1-x}{x}\,\frac{dx}{x+a}$.

4.196. Пусть $f(z)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на положительной части действительной оси и в точке $z=0$, причем $f(z)=O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $z\to\infty$.

Доказать, что
$$\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{\ln^2 x+\pi^2}=\sum_{k=1}^n \operatorname{res}\left[\frac{f(z)}{\operatorname{Ln} z-\pi i}\right]_{z=a_k},$$
где $a_1=-1$, а $a_2, a_3, \ldots, a_n$ — полюсы функции $f(z)$, отличные от -1, и $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\arg z$, $0\leqslant \arg z<2\pi$.

Указание. Рассмотреть интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{\operatorname{Ln} z-\pi i}\,dz$, где контур C указан на рис. 21.

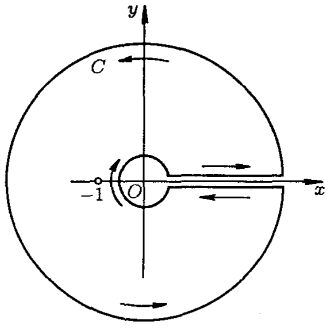

Рис. 21

В задачах 4.197–4.199 вычислить интегралы, считая, что $a>0$ и n — натуральное число.

4.197. 1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(\ln^2 x+\pi^2)}$; 2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x+\pi^2)}$.

4.198. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)[\ln^2 x+(2n+1)^2\pi^2]}$.

Указание. Воспользоваться интегралом
$$\int\limits_C \frac{1}{z^2+a^2}\left[\frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n+1)\pi i}+\frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n-1)\pi i}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{\operatorname{Ln} z+(2n-1)\pi i}\right]dz,$$
где контур C указан на рис. 21, а ветвь $\operatorname{Ln} z$ выбрана так же, как в задаче 4.196.

4.199. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x+4n^2\pi^2)}$.

Указание. Воспользоваться интегралом
$$\int\limits_C \frac{1}{z^2+a^2}\left[\frac{1}{\operatorname{Ln} z-2n\pi i}+\frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n-2)\pi i}+\ldots+\frac{1}{\operatorname{Ln} z+(2n-2)\pi i}\right]dz,$$
где контур C указан на рис. 22, а ветвь $\operatorname{Ln} z$ выбрана так же, как в задаче 4.196.

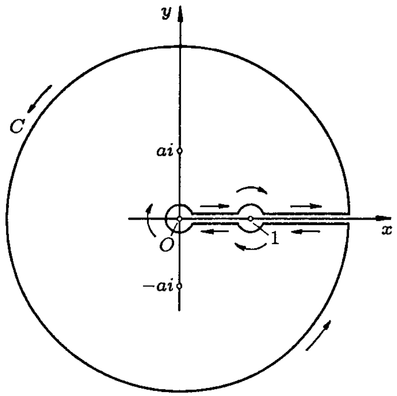

Рис. 22

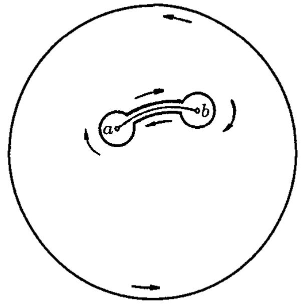

Рис. 23

4.200. Пусть $f(z)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на незамкнутом контуре C, начальная точка которого a и конечная b.

Доказать, что
$$\int\limits_C f(z)dz=\sum \operatorname{res}\left[f(z)\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}\right]+\operatorname{res}\left[f(z)\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}\right]_{z=\infty},$$
где суммирование производится по всем полюсам функции $f(z)$, отличным от ∞ (выбор однозначной вне C ветви логарифма произволен).

Указание. Рассмотреть $\int\limits_\Gamma f(z)\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}\,dz$, где контур Γ, ограничивающий двусвязную область, указан на рис. 23.

В задачах 4.201–4.205 найти указанные интегралы, считая число a действительным.

4.201. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\,dx}{(e^x+1)(e^x+2)}$ $(0<a<2)$.

Указание. Воспользоваться интегралом $\displaystyle\int\limits_C \frac{e^{az}\,dz}{(e^z+1)(e^z+2)}$, где C — прямоугольник с вершинами $-R$, R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$.

4.202. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax\,dx}{\operatorname{sh} x}$. Указание. Воспользоваться интегралом

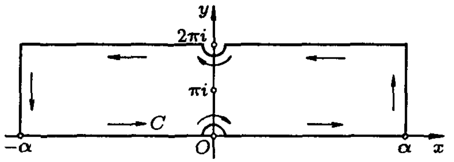

Рис. 24

$\int\limits_C \frac{e^{aiz}\,dz}{\operatorname{sh} z}$, где контур C указан на рис. 24.

4.203. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{\operatorname{ch} x}$. **4.204.** $\int\limits_0^\infty \frac{x\cos ax\,dx}{\operatorname{sh} x}$.

4.205. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x}\,dx \quad (-\pi < a < \pi)$.

Указание. Воспользоваться интегралом $\int\limits_C \frac{e^{az}\,dz}{\operatorname{ch}\pi z}$, где C — граница прямоугольника $-\alpha \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \alpha$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$.

4.206. $\int\limits_0^\pi \frac{x\sin x\,dx}{1+a^2-2a\cos x} \quad (a>0)$.

Указание. Воспользоваться интегралом $\int\limits_C \frac{z\,dz}{a-e^{-iz}}$, где C — граница прямоугольника $-\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant h$, и перейти к пределу при $h \to \infty$.

Интегралы, связанные с формулой обращения преобразования Лапласа

Отсюда и до конца параграфа предполагается, что $t > 0$, C_1 — прямая $\operatorname{Re} z = \alpha > 0$, проходимая снизу вверх, причем α выбрано так, что все особые точки подынтегральной функции расположены влево от C_1.

4.207. Доказать, что если $f(z) \to 0$ при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$, $\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \alpha_2$ и функция $f(z)$ аналитична в полосе $\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \alpha_2$, то интеграл $\int\limits_C f(z)\,dz$, где C — прямая $\operatorname{Re} z = \alpha$, не зависит от выбора α, если $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$.

В задачах 4.208–4.213 найти интегралы (n — натуральное число).

4.208. 1) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{z^{n+1}}$; 2) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{t^z\,dz}{z^{n+1}} \quad (t^z = e^{z\ln t})$.

4.209. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{(z-a)^{(n+1)}}$. **4.210.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{z^2+1}$.

4.211. 1) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{ze^{zt}\,dz}{z^2+1}$; 2) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{z^2(z^2+1)}$.

4.212. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{(z-a)(z-b)(z-c)}$. **4.213.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{t^z\,dz}{z(z+1)\ldots(z+n)}$.

4.214. Пользуясь тождеством $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ (см. примечание к задаче 4.171) доказать, что при $\operatorname{Re}\nu < 0$ $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{e^z\,dz}{z^{\nu+1}} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$, где контур γ указан на рис. 25.

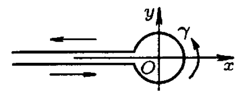

Рис. 25

Примечание. Так как интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{e^z\,dz}{z^{\nu+1}}$ сходится и при $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$, то он продолжает аналитически функцию $\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$ на всю плоскость.

4.215. Доказать, что при $\operatorname{Re}\nu > -1$ $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}dz}{z^{\nu+1}} = \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$.

В задачах 4.216–4.227 найти указанные интегралы.

4.216. 1) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{\sqrt{1+z}}$; 2) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{\sqrt{z+i}}$. **4.217.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{z\sqrt{1+z}}$.

4.218. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{(z+1)\sqrt{z+2}}$. **4.219.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}(1+e^{-\pi z})}{z^2+1}\,dz$.

4.220. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}(1-e^{-az})^2}{z}\,dz \ (a>0)$.

4.221. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\,dz}{z(1-e^{-az})} \quad (a>0)$. Указание. Воспользоваться разложением $\frac{1}{1-e^{-az}} = 1 + e^{-az} + e^{-2az} + \ldots$

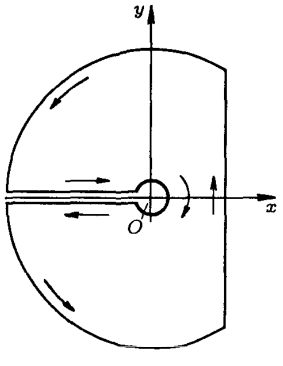

Рис. 26

4.222. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C_1}\dfrac{e^{tz-x\sqrt{z}}}{z}\,dz \quad (x > 0).$

Указание. Заменить C_1 контуром, указанным на рис. 26.

4.223. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C_1}\dfrac{e^{zt}\operatorname{sh} r\sqrt{z}}{rz\operatorname{sh} a\sqrt{z}}\,dz \quad (a > r > 0).$

4.224. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C_1}\dfrac{\ln(1+z)e^{zt}}{z}\,dz.$

4.225. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C_1}e^{zt}\ln\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)dz.$

4.226. $\displaystyle\int\limits_0^\infty dt\int\limits_{C_1}\dfrac{e^{z-at/z}}{z^2}\,dz \quad (a > 0).$

Указание. Переменить порядок интегрирования.

4.227. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C_1}\dfrac{e^{bz}}{z}\,dz\int\limits_0^\infty e^{-az\operatorname{ch}x}\,dx$ $(a > 0,\ b$ — действительное число).

Указание. Воспользоваться тем, что $\displaystyle\int\limits_{C_1}\dfrac{e^{-uz}}{z}\,dz = 0$ при $u > 0$.

4.228. Исходя из разложения в ряд функции Бесселя

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k},$$

доказать интегральные представления (γ — контур, указанный в задаче 4.214);

1) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma}\dfrac{e^{\zeta-z^2/(4\zeta)}}{\zeta^{\nu+1}}\,d\zeta = \left(\dfrac{2}{z}\right)^\nu J_\nu(z);$

2) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C_1}\dfrac{e^{\zeta-z^2/(4\zeta)}}{\zeta^{\nu+1}}\,d\zeta = \left(\dfrac{2}{z}\right)^\nu J_\nu(z) \quad (\operatorname{Re}\nu > -1).$

Указание. Разложить в ряд функцию $e^{-z^2/(4\zeta)}$ и воспользоваться решением задач 4.214 и 4.215.

4.229. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} e^{iz\sin\zeta - i\nu\zeta}\,d\zeta,$$

где Γ — контур, указанный на рис. 27, и получить отсюда, что если

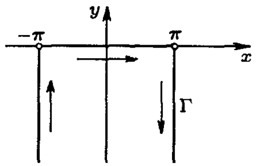

Рис. 27

n — целое число или нуль, то

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(z\sin\zeta - n\zeta)\,d\zeta.$$

В задачах 4.230–4.232 найти интегралы, содержащие функции Бесселя.

4.230. $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-zt}J_n(t)\,dt \quad (\operatorname{Re} z > 0,\ n$ — целое число).

Указание. Воспользоваться интегральным представлением предыдущей задачи и изменить порядок интегрирования.

4.231. 1) $\displaystyle\int\limits_0^\infty J_0(at)\cos bt\,dt;$ 2) $\displaystyle\int\limits_0^\infty J_0(at)\sin bt\,dt$ (a и b — положительные числа).

4.232. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \cos bx\,\frac{\sin t\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx \quad (t > |b|).$

Указание. Воспользоваться тем, что

$$\frac{\sin ut}{u} = \sqrt{\frac{\pi t}{2u}}\,J_{1/2}(ut) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{z-u^2t^2/(4z)}}{z^{3/2}}\,dz$$

(см. задачу 4.228), и изменить порядок интегрирования.

Асимптотическое поведение интегралов[3])

4.233. Пусть аналитическая функция $\varphi(z)$ имеет слева от C_1 лишь конечное число особых точек, причем все они — полюсы, и $\varphi(z) \to 0$ при $z \to \infty$ и $\operatorname{Re} z \leqslant \alpha$. Обозначим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} e^{zt}\varphi(z)\,dz.$$

Найти $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$. Рассмотреть различные случаи расположения полюсов относительно мнимой оси.

Указание. Воспользоваться леммой Жордана (см. задачу 3.17).

Теория функций комплексной переменной

Авторы-составители: Юрий Владимирович Захаров,
Леонид Сергеевич Титов

Редактор И.А. Вейсиг
Корректура авторов

Подписано в печать 21.03.2007 г.

Тиражируется на электронных носителях
Заказ 468.
Дата выхода 28.03.07.

Адрес в Internet: www.lan.krasu.ru/studies/editions.asp

Отдел информационных ресурсов управления информатизации
Института естественных и гуманитарных наук СФУ
660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, e-mail: info@lan.krasu.ru.

Издательский центр Института естественных и гуманитарных наук СФУ
660041 Красноярск, пр. Свободный, 79, e-mail: rio@lan.krasu.ru.