

УДК 517.977.56

Optimal Control of Systems with Distributed Parameters

**Nikolay D. Demidenko^a,
Lyudmila V. Kulagina^{b*} and Artyom A. Pyanykh^b**

^aInstitute of Computational Technologies SB RAS

Krasnoyarsk Branch office

53 Mira, Krasnoyarsk, 660049, Russia

^bSiberian Federal University

79 Svobodny, Krasnoyarsk, 660041, Russia

Received 11.08.2019, received in revised form 23.10.2019, accepted 30.11.2019

The article presents outcomes of optimizing a distributed control system for objects with distributed parameters. Variational method was applied while optimization. Transfer functions are obtained for main channels of disturbances and controls. To describe processes in the time domain, a Laplace numerical method of inverting the transform is used.

Numerical experiment for heat exchange systems of a counterflow heat exchanger is demonstrated. Various controllers have been tested in automatic control systems. Efficiency of distributed control of a pair of single-circuit and double-circuit control systems is shown. In this case, acceleration curves were obtained at the output of the control object. Distributed control functions are also highlighted. The numerical method provides an iterative calculation process with a fairly small number of iterations.

Keywords: mathematical modeling, systems with distributed parameters, heat and mass transfer.

Citation: Demidenko N.D., Kulagina L.V., Pyanykh A.A. Optimal control of systems with distributed parameters, J. Sib. Fed. Univ. Eng. technol., 2019, 12(8), 903-915. DOI: 10.17516/1999-494X-0190.

© Siberian Federal University. All rights reserved

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0).

* Corresponding author E-mail address: krasn@ict.nsc.ru

Оптимальное управление системами с распределенными параметрами

Н.Д. Демиденко^а, Л.В. Кулагина^б, А.А. Пьяных^б

^аИнститут вычислительных технологий СО РАН

Красноярский филиал –

Специальное конструкторско-технологическое бюро «Наука»

Россия, 660049, Красноярск, пр. Мира, 53

^бСибирский федеральный университет

Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79

Сформулирована и решена задача оптимизации системы распределенного контроля для объектов с распределенными параметрами. При оптимизации применен вариационный метод. Получены передаточные функции по основным каналам возмущений и управлений. Для описания процессов во временной области использован численный метод обращения преобразования Лапласа.

Проведен численный эксперимент для систем теплообмена противоточного теплообменника. Испытаны различные регуляторы в системах автоматического регулирования. Показана эффективность распределенного контроля зон одно- и двухконтурной систем управления. При этом получены кривые разгона на выходе объекта управления. Получены также функции распределенного контроля. Численный метод обеспечивает итерационный процесс вычислений довольно малым числом итераций.

Ключевые слова: математическое моделирование, системы с распределенными параметрами, тепломассообмен.

Сформулируем и решим задачу управления с оптимальной системой непрерывного распределенного измерения для класса ОРП [1-5], нестационарные режимы которых могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями; переходный процесс в таких объектах может быть определен через передаточные функции по соответствующим каналам возмущающих и управляющих воздействий.

Исследуется система регулирования, в которой промежуточный ввод реагента используется для организации дополнительного контура управления [6-9]. Анализ получившейся при этом двухконтурной системы автоматического регулирования проводят на основе передаточных функций.

Представляет интерес способ формирования сигналов, подаваемых как на основной, так и на промежуточный регуляторы. Исследование этого вопроса сводится к определению весовых функций распределенного контроля для каждого контура регулирования [2].

1. Математическая модель управляемого процесса

Рассмотрим два потока жидкости или газа, разделенных тонкой стенкой, которые схематически изображены на рис. 1.

Первый поток с температурой $\theta_1(x, t)$ движется с постоянной скоростью ω_1 в канале, площадь поперечного сечения канала равна S_1 ; второй поток с температурой $\theta_2(x, t)$ движется в другом канале с площадью поперечного сечения S_2 со скоростью ω_2 . При этом направление его

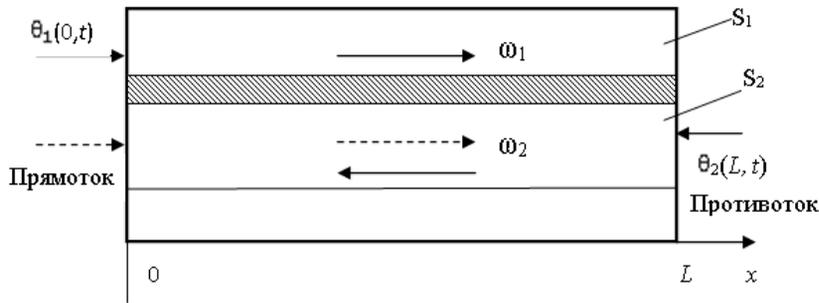


Рис. 1. Схема движения двух потоков жидкости, разделенных тонкой стенкой

Fig. 1. Motion pattern of two fluid flows separated thin wall

движения может совпадать с направлением движения первого потока (прямоток) либо быть противоположным (противоток). Между потоками происходит теплообмен через разделяющую их стенку. Предположим, что теплоемкость разделяющей стенки мала по сравнению с теплоемкостью потоков, а коэффициент теплопередачи между потоками постоянен по длине аппарата и равен k . Кроме того, будем считать, что теплообмен с окружающей средой отсутствует. Как и раньше, примем, что потоки поршневые.

При сделанных допущениях для первого потока справедливо уравнение

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \kappa_1 (\theta_1 - \theta_2), \quad (1)$$

в котором

$$\kappa_1 = \frac{kl}{S_1 C_1 \rho_1},$$

где C_1, ρ_1 – соответственно объемная теплоемкость и плотность первой среды; l – периметр поперечного сечения поверхности раздела сред.

Для второго потока уравнение теплообмена будет аналогичным:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \kappa_2 (\theta_1 - \theta_2), \quad (2)$$

причем

$$\kappa_2 = \frac{kl}{S_2 C_2 \rho_2},$$

где C_2, ρ_2 – теплоемкость и плотность второй среды. Знак «+» в левой части (1.2.1) соответствует прямотоку, а знак «-» противотоку взаимодействующих сред.

Система (1)-(2) должна быть дополнена условиями, вытекающими из физической постановки задачи и выделяющими нужное решение из бесчисленного множества функций, удовлетворяющих этой системе. Рассмотрим один из возможных способов задания таких условий. Во-первых, можно задать распределение температур потоков в начальный момент времени. Это условие запишется так:

$$t = 0 \begin{cases} \theta_1(x, 0) = \theta_1^0(x), \\ \theta_2(x, 0) = \theta_2^0(x). \end{cases} \quad (3)$$

Кроме того, естественно считать известными температуры потоков, втекающих в аппарат.

Если $\omega_2 > 0$, то граничное условие имеет вид

при

$$t = 0 \begin{cases} \theta_1(x, 0) = \theta_1^0(x), \\ \theta_2(x, 0) = \theta_2^0(x). \end{cases} \quad (4)$$

Для $\omega_2 < 0$ условие запишется иначе –

при $x = 0, t > 0$:

$$\theta_1(0, t) = \theta_{1\text{вх}}(t), \quad (5)$$

при $x = L, t > 0$:

$$\theta_2(L, t) = \theta_{2\text{вх}}(t),$$

где $\theta_{1\text{вх}}(t)$ и $\theta_{2\text{вх}}(t)$ – заданные функции времени.

Система (1), (2) и условия (3)-(5) представляют собой простейшую математическую модель процесса теплообмена между двумя движущимися потоками. Эта модель удовлетворительно описывает, например, динамику теплообменных аппаратов с тонкими стенками.

2. Постановка задачи

Основой для формулировки задачи управления служит математическая модель процесса, приведенная выше.

Будем полагать, что целью системы управления объектом (1)-(2) является минимизация функционала качества

$$F = \int_0^T (\theta^* - \theta_{1\text{вых}}(t))^2 dt, \quad (6)$$

где T – фиксированное время управления; θ^* – заданное значение выходной величины; $\theta_{1\text{вых}} = \theta_1(1, t)$ – выходная (регулируемая) величина.

Применяя к (1), (2), (5) преобразование Лапласа, получим решение в следующем виде:

$$\theta_1(x, p) = k_{11}(x, p)\theta_{1\text{вх}}(p) + k_{12}(x, p)\theta_{2\text{вх}}(p) + \check{k}_{12}(x, p)W(p),$$

где $k_{11}(x, p)$, $k_{12}(x, p)$, $\check{k}_{12}(x, p)$ – передаточные функции по каналам «вход-выход» регулируемой среды, «вход-выход» регулирующей среды, «вход-выход» в промежуточной точке, причем

$$k_{11}(x, p) = \frac{e^{\lambda_1 x} \frac{a_1}{a_2} e^{\lambda_1 - \lambda_2(1-x)}}{1 - \frac{a_1}{a_2} e^{\lambda_1 - \lambda_2}},$$

$$k_{12}(x, p) = \frac{a_1 e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 - \lambda_2(1-x)}}{a_2 \left(1 - \frac{a_1}{a_2} e^{\lambda_1 - \lambda_2}\right)},$$

$$\check{k}_{12}(x, p) = d_1(x, p) + d_2(p)k_{12}(x, p),$$

$$d_1(x, p) = \frac{1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} (\Lambda_2 e^{\lambda_2(x)} \int_0^x \chi(\xi) e^{-\lambda_1 \xi} d\xi - \Lambda_1 e^{\lambda_1(x)} \int_0^x \chi(\xi) e^{-\lambda_2 \xi} d\xi),$$

$$d_2(p) = \frac{1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} (\Lambda_2 e^{\lambda_2} \int_0^{x_2} \chi(\xi) e^{-\lambda_2 \xi} d\xi - \Lambda_1 e^{\lambda_2} \int_0^{x_2} \chi(\xi) e^{-\lambda_1 \xi} d\xi),$$

$$\chi(\xi) = d(\xi - x_1)^2 e^{-c(x_i - \xi)}; \quad \Lambda_i = \frac{\lambda_i - a_1}{a_2}; \quad i = 1, 2,$$

$$a_i = \lambda_i + \rho\tau_1 + a_1, i = 1, 2, \tau_1 = \frac{1}{\omega_1}, \tau_2 = \frac{1}{\omega_2}, a_1 = \frac{x_1}{\omega_1}, a_2 = \frac{x_2}{\omega_2},$$

$$\theta_{2B}(\rho) = \int_0^{\infty} \theta_{2Bx}(t) e^{-\rho t} dt, W = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-\rho t} dt,$$

x_i – координата точки приложения внешнего воздействия.

Используем возможность подачи на объект двух управляющих воздействий: одного – за счет изменения граничных условий на входе второй регулирующей среды $\theta_{2\text{вхх}}(t)$, второго – промежуточного внешнего воздействия $\omega(t)$. Передаточные функции регуляторов $U_i (i = 1, 2)$ по каждому из каналов управления считаем заданными.

Введем для удобства следующие обозначения:

$$K_{12}(x, p) = R_1(x, p), \bar{K}_{12}(x, p) = R_2(x, p),$$

$$\theta_{2\text{вх}}(p) = v_1(p), W(p) = v_2(p).$$

Тогда выражение для переходного процесса $\theta_i(x, p)$ будет выглядеть так:

$$\theta_1(x, p) = K_{11}(x, p) \cdot \theta_{1\text{вх}}(p) + \sum_{i=1}^2 R_i(x, p) v_i(p). \quad (7)$$

На входы регуляторов поступают сигналы $\varphi(p)$, $i = 1, 2$, характеризующие состояние объекта управления. Эти сигналы формируются системой распределенного контроля и имеют вид

$$\varphi_i(p) \int_0^1 \theta_1(x, p) g_i(x) dx, \quad (8)$$

где $g_i(x)$, $i = 1, 2$, – весовые функции распределенного контроля.

Функции управляющих воздействий $v_i(p)$, $i = 1, 2$ в соответствии с (8) определяются выражением

$$v_i(p) = -U_i(p)\varphi_i(p) = -U_i(p) \int_0^1 \theta_1(x, p) g_i(x) dx. \quad (9)$$

Задача оптимизации рассматриваемой системы управления состоит в отыскании таких весовых функций распределенного измерения $g_1(x)$ и $g_2(x)$, которые принадлежат некоторому допустимому множеству функций Ω , обусловленному возможностью реализации проектируемой системы управления, и дают экстремальное значение функционалу качеству (6).

3. Условие оптимальности весовых функций распределенного контроля

Проварьируем оптимальную весовую функцию $g_i(x)$ ($i = 1, 2$):

$$\tilde{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x), & x \in [0, 1] \setminus \delta, \\ G_i, & x \in \delta, i = 1, 2, \end{cases} \quad (10)$$

где G_1, G_2 – произвольная точка из множества допустимых весовых функций Ω ; δ – сколь угодно малый интервал внутри отрезка $[0, 1]$.

Обозначим меру множества δ через ε , т.е. $D(\delta) = \varepsilon$. Найдем теперь приращение функции переходного процесса при варьированных $\tilde{g}_i(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1(x, p) &= \check{\theta}_1(x, p) - \theta_1(x, p) = \\ &= \sum_{i=1}^2 R_i(x, p) U_i(p) \int_0^1 (\theta_1(x, p) g_i(x) - \check{\theta}_1(x, p) \tilde{g}_i(x)) dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Проделив над выражением $\int_0^1 \tilde{\theta}_1(x, p) \tilde{g}_i(x) dx$ ряд тождественных преобразований, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \check{\theta}_1(x, p) \tilde{g}_i(x) dx &= \int_0^1 \theta_1(x, p) g_i(x) dx + \\ &+ \int_0^1 \Delta\theta_1(x, p) g_i(x) dx + \varepsilon(\theta_1(x', p) G_i - \theta_1(x', p) g_i(x')) + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

где $x' \in \delta$.

Подставим (12) в (11) и, пренебрегая $o(\varepsilon)$, получим

$$\Delta\theta_1(x, p) = -\sum_{i=1}^2 \varphi_i(x, p) \int_0^1 \Delta\theta_1(x, p) g_i(x) dx + \psi(x, p), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x, p) &= \varepsilon\theta_1(x', p) \sum_{i=1}^2 \varphi_i(x, p) (G_i - g_i(x')), \varphi_i(x, p) = \\ &= R_i(x, p) U_i(p), i = 1, 2. \end{aligned}$$

Чтобы найти $\Delta\theta_1(x, p)$ из уравнения (13), умножим обе его части на g_i , $i = 1, 2$ и проинтегрируем полученное по x на отрезке $[0, 1]$. В результате имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} c_1 + \sum_{i=1}^2 \alpha_{ij} c_i &= f_j, j = 1, 2, \\ c_j &= \int_0^1 \Delta\theta_1(x, p) g_j(x) dx, \alpha_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(x, p) g_j(x) dx, f_j = \\ &= \int_0^1 \psi(x, p) g_j(x) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение системы (14) относительно c_i , $i = 1, 2$, дает

$$\begin{aligned} c_1 &= [(1+\alpha_{22})f_2 - \alpha_{21}f_1] / \Delta, c_2 = [(1+\alpha_{11})f_2 - \alpha_{12}f_1] / \Delta, \\ \Delta &= (1+\alpha_{11})(1+\alpha_{22}) - \alpha_{12}\alpha_{21}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta\theta_1(x, p) = \sum_{i=1}^2 \varphi_i(x, p) c_i + \psi(x, p). \quad (15)$$

Преобразовав функции f_1 и f_2 , входящие в выражения для c_i , $i = 1, 2$, получим

$$f_i = \varepsilon\theta_1(x, p) \sum_{i=1}^2 \alpha_{ij} (G_i - g_i(x)), j = 1, 2.$$

Теперь, подставляя f_1 и f_2 , найдем выражения для c_1 и c_2 :

$$c_j = \varepsilon\theta_1(x, p) \frac{\sum_{i=1}^2 A_{ij} (g_i(x) - G_i)}{\Delta}, j = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \alpha_{11}(1 + \alpha_{22}) - \alpha_{12} \alpha_{21}, \quad A_{12} = \alpha_{21}, \\ A_{21} &= \alpha_{12}, \quad A_{22} = \alpha_{22}(1 + \alpha_{11}) - \alpha_{12} \alpha_{21}. \end{aligned}$$

Подставив c_1 и c_2 в (15), получим выражение для приращения функции переходного процесса в регулируемой среде в изображении по Лапласу:

$$\Delta\theta_1 = \varepsilon \sum_{i=1}^2 (g_i(x') - G_i) W_i(x, x', p), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} W_i(x, x', p) &= \frac{\theta_1(x', p)(A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + \varphi_1 \Delta)}{\Delta}, \\ W_i(x', p) &= W_i(1, x', p), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

или в оригиналах $\Delta\theta_{1\text{ВЫХ}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Delta\theta_{1\text{ВЫХ}}(p)\} = \varepsilon \sum_{i=1}^2 (g_i(x) - G_i) W_i(x, t)$,
где $W_i(x', t) = \mathcal{L}^{-1}\{W_i(x', p)\}$, $i = 1, 2$.

Подставим теперь $\Delta\theta_{1\text{ВЫХ}}(t)$ в $F(\tilde{g})$:

$$\begin{aligned} F(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) &= F(g_1(x'), g_2(x')) - \\ &2\varepsilon [\Pi(x', g_1(x'), g_2(x')) - \Pi(x', G_1, G_2)], \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi(x, g_1(x), g_2(x)) &= - \sum_{i=1}^2 g_i(x) \int_0^T W_i(x, t) (\theta^* - \theta_{1\text{ВЫХ}}(t)) dt, \\ \Pi(x, G_1, G_2) &= - \sum_{i=1}^2 G_i \int_0^T W_i(x, t) (\theta^* - \theta_{1\text{ВЫХ}}(t)) dt. \end{aligned}$$

Далее для приращения функционала качества получим

$$\Delta F = F(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) - F(g_1, g_2) = -2\varepsilon [\Pi(x'G_1, G_2) - \Pi(x', g_1, g_2)] \geq 0,$$

т.е.

$$\Pi(x', G_1, G_2) \leq \Pi(x', g_1, g_2); \quad g_1, g_2 \in \Omega, \quad x' \in [0, 1]. \quad (18)$$

Последнее условие означает следующее: поскольку $g_i(x)$, $i = 1, 2$, – оптимальные функции, а G_i – произвольные элементы Ω , то для оптимальности $g_i(x)$ необходимо, чтобы функция $\Pi(x', g_1, g_2)$ достигала максимума при любом фиксированном $x \in [0, 1]$.

Если Ω определяется неравенствами $|g_i(x)| \leq 1$, $i = 1, 2$, то, очевидно, получим

$$g_i(x) = \text{sign} \left\{ \int_0^T (\theta^* - \theta_{1\text{ВЫХ}}(t)) W_i(x, t) dt \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

В выражение $W_i(x, p)$, $i = 1, 2$ входит функция $\theta_1(x, p)$. Для ее определения используем тот же прием, что и при отыскании $\Delta\theta_1$.

Представим (10) с учетом ранее сделанных обозначений в следующем виде:

$$\theta_1(x, p) = K_{11}(x, p) \theta_{1\text{ВЫХ}}(p) - \sum_{i=1}^2 \varphi_i(x, p) \int_0^1 \theta_1(x, p) g_i(x) dx. \quad (20)$$

Обозначим $c_i = \int_0^1 \theta_1(x, p) g_i(x) dx$, $i = 1, 2$. Тогда, умножив обе части (20) на $g_i(x)$ и проин-

тегрировав на отрезке $[0, 1]$, получим

$$c_j + \sum_{i=1}^2 \alpha_{ij} c_i = F_j, j = 1, 2, \quad (21)$$

где

$$F_j = \int_0^1 K_{11}(x, p) g_j(x) \theta_{1\text{вх}}(p) dx, i = 1, 2.$$

Решение системы (21) дает

$$c_1 = \frac{((1 + \alpha_{22})F_1 - \alpha_{21}F_2)}{\Delta} = \gamma_1(p) \theta_{1\text{вх}}(p),$$

$$c_2 = \frac{((1 + \alpha_{11})F_2 - \alpha_{12}F_1)}{\Delta} = \gamma_2(p) \theta_{1\text{вх}}(p),$$

где

$$\gamma_1(p) = \frac{1}{\Delta} \left\{ \int_0^1 K_{11}(x, p) [g_1(x)(1 + \alpha_{22}) - g_2(x)\alpha_{21}] dx \right\},$$

$$\gamma_2(p) = \frac{1}{\Delta} \left\{ \int_0^1 K_{11}(x, p) [g_2(x)(1 + \alpha_{11}) - g_1(x)\alpha_{12}] dx \right\}.$$

Окончательно для функции переходного процесса $\theta_1(x, p)$ получим следующее выражение:

$$\theta_1(x, p) = \left(K_{11}(x, p) - \sum_{i=1}^2 R_i(x, p) U_i(p) \gamma_i(p) \right) \theta_{1\text{вх}}(p), \quad (22)$$

а на выходе объекта значение функции $\theta_1(x, p)$ будет определяться по формуле

$$\theta_{1\text{вых}}(p) = \left(K_{11}(1, p) - \sum_{i=1}^2 R_i(1, p) U_i(p) \gamma_i(p) \right) \theta_{1\text{вх}}(p). \quad (23)$$

Теперь найдены полностью выражения $W_i(x, p)$, $i = 1, 2$ и $\theta_{1\text{вых}}(p)$, входящие в (19), для определения оптимальных весовых функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$.

Итак, решена задача оптимального контроля при распределенном управляющем воздействии.

4. Анализ переходных процессов в двухконтурной системе регулирования

Рассмотрим результаты численного анализа переходных процессов и весовых функций распределенного измерения в объектах с распределенными параметрами в замкнутой системе регулирования при распределенном управляющем воздействии. Эти результаты сравнивают с кривыми переходных процессов и весовыми функциями распределенного измерения без распределенного управления, когда управление осуществляют только за счет изменения граничных условий (при регулирующем воздействии, поступающем только на вход объекта).

Входные данные системы:

$T = 2$ – время управления;

$\theta^* = 0$ – заданное значение выходной величины;

$a_1 = 2, a_2 = 3$ – обобщенные параметры;

$\tau_1 = \tau_2 = 0.5$ – транспортные запаздывания сред;

$x_i = 0,5$ – координата точки приложения внешнего воздействия;

$k_1 = 4, k_2 = 6$ – коэффициенты, характеризующие свойства сред;

$n = 20$ – количество узлов разностной сетки по пространству;

$m = 40$ – количество узлов разностной сетки по времени.

В ходе численного эксперимента исследована система оптимального управления при ступенчатом входном воздействии с постоянными скоростями по длине объекта (рис. 2, 3) и синусоидальном (рис. 4, 5) входном воздействии с постоянными скоростями по длине объекта и с дополнительным вводом реагента.

Распределенность рассматриваемого процесса позволяет строить различные схемы, использующие дополнительные контуры регулирования. Для выбора наиболее целесообразной экспериментально изучали характеристики схем, имеющих следующие законы регулирования [10-15]:

- 1) интегральный (И);
- 2) пропорционально-интегральный (ПИ).

Для анализа переходных процессов применяли методы численного обращения преобразования Лапласа – интерполяционный, с равноотстоящими узлами и метод, основанный на

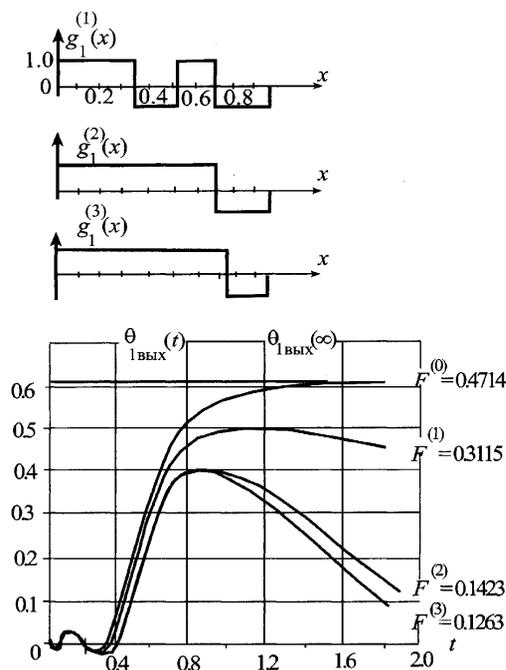


Рис. 2. Кривые регулирования в одноконтурной системе

Fig. 2. Control curves in a single-loop system

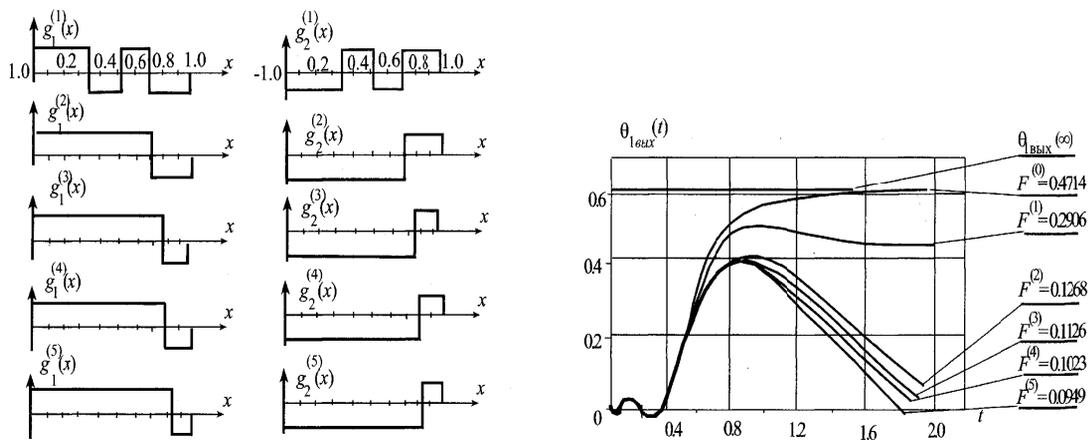


Рис. 3. Кривые регулирования в двухконтурной системе

Fig. 3. Control curves in dual-system

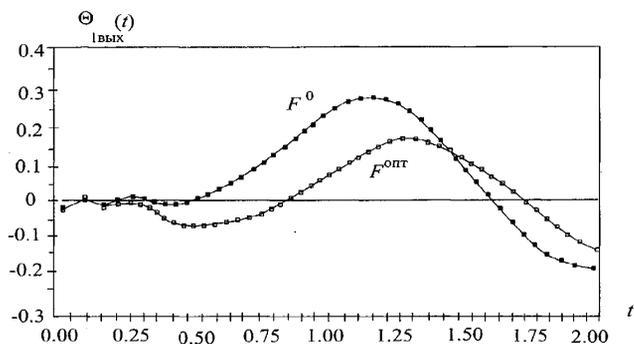


Рис. 4. Кривые регулирования в одноконтурной системе с И-регулятором при синусоидальном возмущении: F^0 – в разомкнутой системе; $F^{\text{опт}}$ – с оптимальным контролем

Fig. 4. Control curves in a single-circuit system with I-regulator with sinusoidal disturbance: F^0 – in open system, $F^{\text{опт}}$ – with optimal control

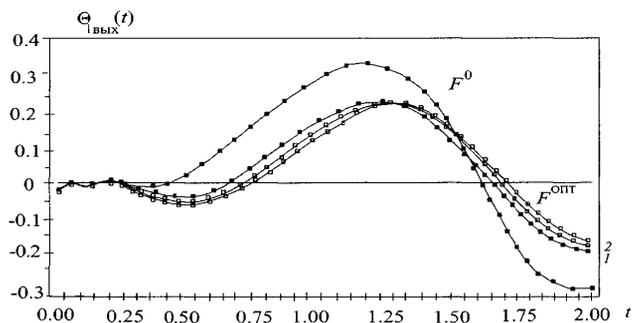


Рис. 5. Кривые регулирования в двухконтурной системе с И-регулятором при синусоидальном возмущении: 1, 2 – на первой и второй итерациях

Fig. 5. Control curves in dual-system with I-regulator with sinusoidal disturbance: 1, 2 – at the first and second iterations

разложении изображения функции переходного процесса в сходящийся ряд по смещенным полиномам Лежандра.

Весовые функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ находили из полученных необходимых условий оптимальности методом последовательных приближений.

На рисунках представлены кривые переходных процессов и весовых функций, получающихся на каждой итерации. Как показали расчеты, для устойчивых переходных процессов итеративный процесс довольно быстро сходится. В пределах требуемой точности обычно делают 5-6 итераций. Кривые, обозначенные F° , соответствуют переходному процессу в разомкнутой системе регулирования.

Проведенные расчеты показывают, что качество регулирования при распределенном управляющем воздействии повышается не при всех законах регулирования. Так, при ступенчатом возмущении с И-регулятором для параметров $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 3$ (см. рис. 2) показатель качества $F^{\text{опт}} = 0.1263$ без распределенного воздействия, а при распределенном управлении (см. рис. 3) с подачей управляющего воздействия в точку аппарата с координатой $x_i = 0,7$; $F^{\text{опт}} = 0.0949$. При этом показатель качества улучшился примерно на 20 %.

При синусоидальном возмущении этот эффект не проявляется с таким типом регулирования, а при ПИ-регуляторе он даже заметно снижается. Для ступенчатого и синусоидального возмущений самый эффективный ПИ-регулятор (рис. 6а, б). Таким образом, повышение качества регулирования только за счет оптимального контроля не всегда дает положительный результат. Распределенный контроль необходимо сочетать с другими возможностями систем регулирования.

Рассчитаны кривые переходных процессов в зависимости от координаты точки приложения регулирующего воздействия для параметров аппарата $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 3$ для $x_i = [0.2; 0.9]$ с шагом 0.1. С увеличением координаты x_i показатель качества улучшается, однако перерегулирование усиливается. Поэтому для аппарата с указанными параметрами координату точки приложения внешнего воздействия целесообразно выбирать на отрезке $[0.4; 0.5]$.

Для аппарата с параметрами $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 3$ координату приложения внешнего воздействия следует выбирать на отрезке $[0.3; 0.4]$. Приведены также (см. рис. 2 и 3) весовые функции распределенного измерения, которые получаются на каждой итерации. Характерно, что оптимальные весовые функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ почти совпадают при всех параметрах аппарата.

При относительно простых регуляторах распределенный контроль дает наибольший эффект, а при более совершенных эффект снижается.

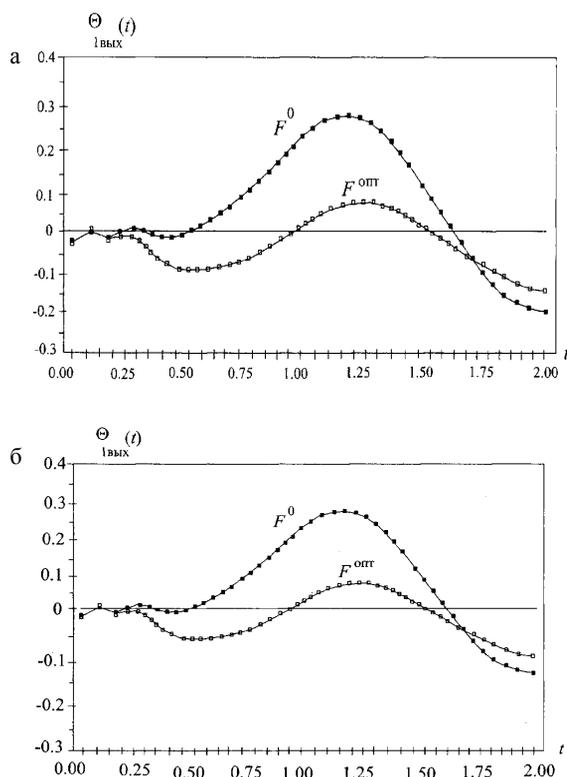


Рис. 6. Кривые регулирования в одноконтурной системе с ПИ-регулятором при синусоидальном возмущении

Fig. 6. Control curves in a single-loop system with PI-controller for sinusoidal disturbance

Список литературы

[1] Демиденко Н.Д., Потапов В.И., Шокин Ю.И. *Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами*. Новосибирск: Наука, 2006. 551 с. [Demidenko N.D., Potapov V.I., Shokin Yu.I. *Simulation and Optimization for Sstems with Distributed Parameters*. Novosibirsk, Nauka, 2006. 551 p. (in Russian)]

[2] Демиденко Н.Д. *Управляемые распределенные системы*. Новосибирск: Наука, 1999. 393 с. [Demidenko N.D. *Controlled Distributed Systems*. Novosibirsk, Nauka, 1999. 393 p. (in Russian)]

[3] Демиденко Н.Д., Ушатинская Н.П. *Моделирование, распределенный контроль и управление процессами ректификации*. Новосибирск: Наука, 1978. 285 с. [Demidenko N.D., Ushatinskaya N.P. *Simulation, Distributed Control and Management of Rectification Processes*. Novosibirsk, Nauka, 1978. 285 p. (in Russian)]

[4] Демиденко Н.Д. *Моделирование и оптимизация теплообменных процессов в химической технологии*. М.: Наука, 1991. 240 с. [Demidenko N.D. *Simulation and Optimization of Heat and Mass Transfer Processes in Chemical Technology*. М., Nauka, 1991. 240 p. (in Russian)]

[5] Демиденко Н.Д., Кулагин В.А., Шокин Ю.И. *Моделирование и вычислительные технологии распределенных систем*. Новосибирск: Наука, 2012. 424 с. [Demidenko N.D., Kulagin V.A., Shokin Yu.I. *Simulation and Computational Technologies of Distributed Systems*. Novosibirsk, Nauka, 2012. 424 p. (in Russian)]

Shokin Yu.I. *Modeling and Computing Technology of Distributed Systems*. Novosibirsk, Nauka, 2012. 442 p. (in Russian)]

[6] Демиденко Н.Д. Оптимизация систем контроля управляемых технологических процессов с распределенными параметрами. *Изв СО РАН СССР. Сер. техн. наук.*, 1978, 3(13), 118-126 [Demidenko N.D. Optimization of Systems for Controlled Technological Processes with Distributed Parameters. *Izv SB RAS USSR. Ser. tech. of sciences*, 1978, 3(13), 118-126 (in Russian)]

[7] Демиденко Н.Д., Александрова Е.А. Метод численного анализа нестационарных режимов технологических процессов. *Изв СО РАН СССР. Сер. техн. наук.*, 1977, 2(8), 109-115 [Demidenko N.D., Aleksandrova E.A. Method of Numerical Analysis of Non-stationary Modes of Technological Processes. *Izv SB RAS USSR. Ser. tech. of sciences*, 1977, 2(8), 109-115 (in Russian)]

[8] Demidenko N.D. Modelling of Optimal Regimes in Chemical Engineering Objects with Infracting Flow Recirculation, *Syst. Anal. Model Simul*, 1987, 4, 309-320.

[9] Demidenko N.D. Problems on optimization of information measuring systems with distributed parameters, *Syst. Anal. Model Simul*, 1990, 11-12, 907-920.

[10] Ротач В.Я. *Расчет настройки промышленных регуляторов* М.–Л.: Госэнергоиздат, 1961. 213 с. [Rotach V.Ya. *Calculation of Adjustment for Industrial Controllers*. М.-L., Gosenergoizdat, 1961. 213 p. (in Russian)]

[11] Кафаров В.В., Ветохин В.Н. *Основы автоматизированного проектирования химических производств*. М.: Наука, 1987. 624 с. [Kafarov V.V., Vetokhin V.N. *Fundamentals of Computer-aided Design of Chemical Industries*. М., Nauka, 1987. 624 p. (in Russian)]

[12] Новиков Е.А., Шерников Ю.В. *Компьютерное моделирование жестких гибридных систем*. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. 450 с. [Novikov E.A., Shernikov Yu.V. *Computer Simulation of Rigid Hybrid Systems*. Novosibirsk, NGTU Publishing House, 2012. 450 p. (in Russian)]

[13] Шокин Ю.И. *Метод дифференциальных приближений*. Новосибирск: Наука, 1979. 234 с. [Shokin Yu.I. *Differential approximation method*. Novosibirsk: Nauka, 1979. 234 p. (in Russian)]

[14] Демиденко Н.Д. Моделирование статических и динамических режимов в трубчатых печах. *Вестник Томского государственного университета*, 2012, 3 (20), 13-21 [Demidenko N.D. Modeling of Static and Dynamic Modes in Tube Furnaces. *Bulletin of Tomsk State University*, 2012, 3(20), 13-21 (in Russian)]

[15] Демиденко Н.Д., Кулагина Л.В. Моделирование и оптимизация технологических систем с распределенными параметрами. *Вестник Сибирского аэрокосмического университета*, 2014, 3(55), 55-63 [Demidenko N.D., Kulagina L.V. Modeling and Optimization of Technological Systems with Distributed Parameters. *Bulletin of the Siberian Aerospace University*, 2014, 3 (55), 55-63 (in Russian)]