Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(2), 210-220

УДК 517.55

Последовательности Риордана и двумерные разностные уравнения

Александр П.Ляпин*
Институт педагогики, психологии и социологии,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 08.02.2009, окончательный вариант 11.03.2009, принята к печати 30.04.2009

В работе предложено описание рациональных последовательностей Риордана, возникающих в комбинаторном анализе, как решений задачи Коши двумерных разностных уравнений специального вида, и исследована асимптотика таких последовательностей.

Ключевые слова: последовательности Риордана, многомерные разностные уравнения, задача Коши, амеба характеристического многочлена.

Введение

Понятие последовательности Риордана впервые появилось в работе [1] в связи с изучением групп Риордана и в дальнейшем нашло широкое применение в таких задачах перечислительного комбинаторного анализа, как задачи о числе путей на целочисленной решетке [2], о производящих деревьях с помеченными вершинами («level generating trees», [3]), о расстановке фигур на шахматной доске [4, 5], строки Блума [3, 6].

Приведем определение последовательности Риордана. Пусть $d(z) = \sum\limits_0^\infty d_k z^{-k-1}$ и $h(z) = \sum\limits_0^\infty h_k z^{-k-1}$ — ряды Лорана, вообще говоря, формальные.

Определение 1. *Последовательностью Риордана, ассоциированной с парой $d(z), h(z)$, называется, последовательность $\{r(x,y), (x,y) \in \mathbb{Z}_+^2\}$, производящая функция которой*

$$\mathcal{D}(z,w) := \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_+^2} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}}$$

имеет вид

$$\mathcal{D}(z,w) = \frac{d(z)}{w-h(z)} := \sum_{y=0}^{\infty} \frac{d(z)h^y(z)}{w^{y+1}}. \tag{1}$$

Отметим, что $r(x,y) = \mathrm{Res}\{d(z)h^y(z)z^x\}$, где Res — оператор, который ставит в соответствие некоторому формальному ряду от z коэффициент при z^{-1}.

Последовательности Риордана называются *правильными*, если $h_0 \neq 0$ (см., например, [2]).

Выделим класс последовательностей Риордана, которые будут рассматриваться в данной работе.

*e-mail: LyapinAP@yandex.ru

Определение 2. *Последовательность Риордана будет называться рациональной, если ряд $h(z)$ является разложением в окрестности бесконечно удаленной точки рациональной функции*

$$h(z) = \frac{Q(z)}{P(z)},$$

где $P(z) = \sum\limits_0^m c_{\alpha 1} z^\alpha, Q(z) = \sum\limits_\alpha c_{\alpha 0} z^\alpha$ *— многочлены от* $z \in \mathbb{C}$ *и* $c_{m,1} \neq 0$.

Отметим, что из разложимости $h(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки следует, что $\deg Q(z) < \deg P(z) = m$.

Рациональные последовательности Риордана будут *правильными*, если справедливо равенство $\deg Q(z) + 1 = \deg P(z)$ (эквивалентное условию $h_0 \neq 0$).

Основным результатом данной работы является описание рациональных последовательностей Риордана как решения задачи Коши для одного класса двумерных разностных уравнений. Подробная формулировка задачи Коши, необходимые определения и обозначения приведены в п. 1.

Теорема 1. *Двойная последовательность* $\{r(x,y)\}$ *является рациональной последовательностью Риордана, определяемой парой* $d(z)$ *и* $h(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, *тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши для разностного уравнения*

$$[P(\delta_1) \cdot \delta_2 - Q(\delta_1)]\, r(x,y) = 0, \tag{2}$$

$$r(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \ngeq (m,1), \tag{3}$$

где функция $\varphi(x,y)$ *задана на множестве* $(x,y) \ngeq (m,1)$ *следующим образом:*

$$\varphi(x,y) := \operatorname{Res}\left\{ d(\xi) \left(\frac{Q(\xi)}{P(\xi)} \right)^y \xi^x \right\}. \tag{4}$$

Производящую функцию начальных данных (3)

$$\Phi(z,w) := \sum_{(x,y) \ngeq (m,1)} \frac{\varphi(x,y)}{z^{x+1} w^{y+1}}$$

после очевидной группировки всегда можно записать в виде

$$\Phi(z,w) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Phi_k(w)}{z^{k+1}} + \frac{d(z)}{w}, \text{ где } \Phi_k(w) = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{\varphi(k,y)}{w^{y+1}}.$$

Следующая теорема позволяет представить производящую функцию решения задачи Коши в виде простого выражения от $\Phi_k(w), d(z)$ и многочленов

$$R_{k+1}(z,w) = \frac{1}{z^{k+1}} \sum_{\alpha=k+1}^{m} (c_{\alpha,1} w - c_{\alpha,0})\, z^\alpha,$$

построенных на основе характеристического многочлена разностного уравнения (2).

Теорема 2. *Производящая функция решения задачи Коши* (2)-(3) *имеет вид*

$$\mathcal{D}(z,w) = \left(P(z)d(z) + \sum_{k=0}^{m-1} R_{k+1}(z,w)\Phi_k(w) - \frac{1}{w} \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{x=0}^{\alpha-1} \frac{c_{\alpha,0}\varphi(x,0)}{z^{x-\alpha+1}} \right) / (P(z)w - Q(z)).$$

Следствие 1. *Необходимым и достаточным условием рациональности производящей функции решения задачи Коши* (2)-(3) *является рациональность производящей функции* $\Phi(z,w)$ *начальных данных.*

Замечание 1. *Если начальные данные определяют последовательность Риордана (имеют вид* (4)*), то в теореме 2 выражение для производящей функции* $\mathcal{D}(z,w)$ *примет простой вид, так как в этом случае имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{m-1} R_{k+1}(z,w)\Phi_k(w) - \frac{1}{w}\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{x=0}^{\alpha-1}\frac{c_{\alpha 0}\varphi(x,0)}{z^{x-\alpha+1}} = 0.$$

Следующая теорема позволяет найти асимптотику последовательностей Риордана. Вопрос об отыскании асимптотического поведения решений многомерных разностных уравнений весьма актуален и рассматривался многими авторами в работах [4, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Одним из способов исследования свойств двумерной последовательности $r(x,y)$ является изучение асимптотики ее «диагональных» подпоследовательностей. А именно, для двойных последовательностей $\{r(x,y)\}$ определим диагональные подпоследовательности следующим образом: фиксируем $(p,q)\in\mathbb{Z}_+^2$ и будем рассматривать одномерную последовательность $\{r(p\lambda,q\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{Z}_+}$.

Заметим, что такой подход к изучению асимптотического поведения двойной последовательности применялся в [7] при решении проблемы устойчивости двумерных цифровых рекурсивных фильтров. В работе [9] асимптотика коэффициентов рациональной производящей функции изучалась в связи с такими задачами перечислительного комбинаторного анализа, как, например, задача о подбрасывании несимметричной монеты.

В случае рациональных последовательностей Риордана условия, обеспечивающие применимость метода перевала, удобно сформулировать в терминах многогранника Ньютона $\mathcal{N}_R$ и амебы $\mathcal{A}_R$ характеристического многочлена R, подробные определения и обозначения которых приведены в п. 2.

Отметим лишь, что $E_{m,1}$ — это компонента дополнения амебы, соответствующая вершине многогранника Ньютона $(m,1)$, для которой сформулирована задача Коши, а через $\Omega_{m,1}$ обозначен конус, порожденный векторами $\{(m,1)-(\tau_1,\tau_2)\}$, где $(\tau_1,\tau_2)\in\mathcal{N}_R$.

Теорема 3. *Пусть функция* $d(z)$ *голоморфна вне особых точек функции* $h(z)=\dfrac{Q}{P}$. *Если все корни многочленов* $P(z)$ *и* $Q(z)$ *простые и различные по модулю (каждого многочлена в отдельности) и граница амебы характеристического многочлена* $R(z,w)=P(z)\cdot w-Q(z)$ *гладкая, тогда для всякого направления* $(p,q)\in\operatorname{Int}\Omega_{m,1}$ *существует единственная точка* $\left(z_0\left(\frac{p}{q}\right),w_0\left(\frac{p}{q}\right)\right)$ *такая, что ее логарифмический образ* $\operatorname{Log}(z_0,w_0)\in\partial E_{m,1}$, *и*

$$r(x,y)\sim\frac{d(z_0)}{\sqrt{2\pi\lambda q H(z_0)}}\left[z_0^p w_0^q\right]^\lambda, x=\lambda p, y=\lambda q, \lambda\to\infty, \tag{5}$$

где

$$H(z)=\frac{Q''(z)}{Q(z)}-\frac{P''(z)}{P(z)}+2\frac{p}{q}\frac{1}{z}\frac{P'(z)}{P(z)}-\frac{p}{q}(1+\frac{p}{q})\frac{1}{z^2}.$$

Отметим, что точка (z_0,w_0) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} P(z)w-Q(z)=0 \\ z\left(\frac{P'(z)}{P(z)}-\frac{Q'(z)}{Q(z)}\right)=\frac{p}{q} \end{cases}.$$

1. Определения и обозначения

Пусть $\mathbb{Z}^n$ — n-мерная целочисленная решетка, точки которой обозначим $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\mathbb{Z}^n_+$ — ее положительный октант, множество $C \subset \mathbb{Z}^n_+$ конечное. Определим на комплекснозначных функциях $r : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ операторы сдвига δ_j вида

$$\delta_j r(x) = r(x_1, \ldots, x_j + 1, \ldots, x_n),\ j = 1, \ldots, n,$$

и рассмотрим полиномиальный разностный оператор с постоянными коэффициентами

$$R(\delta) = R(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = \sum_{\alpha\in C} c_\alpha \delta^\alpha = \sum_{(\alpha_1,...,\alpha_n)\in C} c_{\alpha_1,...,\alpha_n} \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_n^{\alpha_n}.$$

Нас интересуют (однородные) разностные уравнения вида $R(\delta)r(x) = 0$ или

$$\sum_{\alpha\in C} c_\alpha r(x + \alpha) = 0, \tag{6}$$

где $r(x)$ — неизвестная функция целочисленных аргументов $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть $l = (l_1, ..., l_n) \in \mathbb{Z}^n_+, l \neq 0$ — некоторая точка n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n_+$ и на множестве $X_l = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ \setminus (l + \mathbb{Z}^n_+)\}$ задана функция

$$\varphi : X_l \to \mathbb{C}. \tag{7}$$

В дальнейшем будем вместо $x \in \mathbb{Z}^n_+ \setminus (l + \mathbb{Z}^n_+)$ использовать запись $x \ngeq l$.

Задача Коши состоит в отыскании решения разностного уравнения (6), совпадающего на множестве X_l с функцией (7).

Условия на множество X_l, обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши, приведены в [13], в [14] эти условия сформулированы в терминах многогранника Ньютона $\mathcal{N}_R$ характеристического многочлена R.

Характеристическим многочленом разностного уравнения (6) называется многочлен вида $R(z) = \sum\limits_{\alpha\in C} c_\alpha z^\alpha$.

Многогранник Ньютона $\mathcal{N}_R$ характеристического многочлена $R(z)$ представляет выпуклую оболочку в $\mathbb{R}^n$ конечного множества точек C.

Решение задачи Коши (2)–(3) существует и единственно, если для некоторой (целочисленной) точки $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathcal{N}_R$ выполняется $\mathcal{N}_R \subseteq \Pi_m$, где $\Pi_m = \{\alpha \in \mathbb{R}^n_+ : \alpha_j \leqslant m_j, j = 1, ..., n\}$.

Амебой $\mathcal{A}_R$ *многочлена* $R(z)$ называется образ множества нулей этого многочлена

$$\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C}^n : R(z) = 0\}$$

при логарифмическом проектировании $\mathrm{Log} : (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\log |z_1|, \ldots, \log |z_n|)$.

Дополнение к амебе состоит из конечного числа связных компонент, ограниченного снизу числом вершин многогранника Ньютона, а сверху — числом целых точек пересечения $\mathcal{N}_R \cap \mathbb{Z}^n$. Кроме того [15], каждой вершине ν многогранника Ньютона можно сопоставить непустую связную компоненту E_ν дополнения амебы $\mathcal{A}_R$ и разложение в ряд Лорана функции $1/R(z)$, сходящееся в $\mathrm{Log}^{-1} E_\nu$.

2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Докажем необходимое условие. Сгруппируем ряд $\mathcal{D}(z,w)$ по отрицательным степеням w:

$$\mathcal{D}(z,w)=\frac{d(z)}{w\left(1-\frac{Q(z)}{wP(z)}\right)}=\sum_{y=0}^{\infty}d(z)\left(\frac{Q(z)}{P(z)}\right)^{y}\frac{1}{w^{y+1}},$$

откуда следует, что $r(x,y)=\operatorname{Res}\left\{d(z)\left(\frac{Q(z)}{P(z)}\right)^{y}z^{x}\right\}$ (см. замечание к определению последовательности Риордана).

В тождестве

$$[P(z)\cdot w-Q(z)]\mathcal{D}(z,w)\equiv P(z)d(z)$$

преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned}
&(P(z)\cdot w-Q(z))\cdot\sum_{x,y\geqslant 0}\frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}}=\\
&=P(z)w\left(\sum_{x\geqslant 0,y=0}\frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}}+\sum_{x\geqslant 0,y\geqslant 1}\frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}}\right)-Q(z)\sum_{x,y\geqslant 0}\frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}}=\\
&=\sum_{\alpha=0}^{m}c_{\alpha,1}z^{\alpha}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\varphi(x,0)}{z^{x+1}}+\sum_{\alpha=0}^{m}c_{\alpha,1}z^{\alpha}\left[\sum_{\substack{x=0,\dots,\alpha-1\\ y\geqslant 0}}\frac{\varphi(x,y+1)}{z^{x+1}w^{y+1}}+\sum_{\substack{x\geqslant\alpha\\ y\geqslant 0}}\frac{r(x,y+1)}{z^{x+1}w^{y+1}}\right]-\\
&-\sum_{\beta=0}^{m}c_{\beta,0}z^{\beta}\left[\sum_{\substack{x=0,\dots,\beta-1\\ y\geqslant 0}}\frac{\varphi(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}}+\sum_{\substack{x\geqslant\beta\\ y\geqslant 0}}\frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}}\right]=\\
&=P(z)d(z)+\sum_{\alpha=0}^{m}\left(c_{\alpha,1}z^{\alpha}\sum_{\substack{x=0,\dots,\alpha-1\\ y\geqslant 0}}\frac{\varphi(x,y+1)}{z^{x+1}w^{y+1}}\right)-\sum_{\beta=0}^{m}\left(c_{\beta,0}z^{\beta}\sum_{\substack{x=0,\dots,\beta-1\\ y\geqslant 0}}\frac{\varphi(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}}\right)+\\
&+\sum_{\substack{x\geqslant 0\\ y\geqslant 0}}\left[\sum_{\alpha=0}^{m}c_{\alpha,1}r(x+\alpha,y+1)-\sum_{\beta=0}^{m}c_{\beta,0}r(x+\beta,y)\right]\frac{1}{z^{x+1}w^{y+1}}.
\end{aligned}$$

Ввиду отсутствия в правой части тождества переменных в отрицательной степени получаем для всех $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ соотношение

$$\sum_{\substack{x\geqslant 0\\ y\geqslant 0}}\left[P(\delta_1)\cdot\delta_2-Q(\delta_1)\right]r(x,y)=0,$$

что и завершает доказательство необходимого условия теоремы.

Докажем достаточность. Для доказательства нам потребуется следующее утверждение:

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in C}c_{\alpha,\beta}z^{\alpha}w^{\beta}\sum_{(x,y)\not\geqslant(\alpha,\beta)}\frac{\xi^{x}\eta^{y}}{z^{x+1}w^{y+1}}=\frac{1}{(z-\xi)(w-\eta)}\sum_{(\alpha,\beta)\in C}c_{\alpha,\beta}(z^{\alpha}w^{\beta}-\xi^{\alpha}\eta^{\beta}).\qquad(8)$$

Запишем разностное уравнение (2) в виде

$$\sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} r(x+\alpha, y+1) - \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,0} r(x+\alpha, y) = 0,$$

домножим его левую часть на моном $z^{-x-1}w^{-y-1}$ и просуммируем по всем $x \geqslant 0, y \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{x\geqslant 0\\ y\geqslant 0}} \left(\sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} r(x+\alpha, y+1) - \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,0} r(x+\alpha, y) \right) \frac{1}{z^{x+1}w^{y+1}} = \\
=&\sum_{\substack{x\geqslant 0\\ y\geqslant 0}} \sum_{\alpha=0}^{m} \frac{c_{\alpha,1} r(x+\alpha, y+1) z^{\alpha} w}{z^{x+\alpha+1}w^{y+2}} - \sum_{\substack{x\geqslant 0\\ y\geqslant 0}} \sum_{\alpha=0}^{m} \frac{c_{\alpha,0} r(x+\alpha, y) z^{\alpha}}{z^{x+\alpha+1}w^{y+1}} = \\
=&\sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} z^{\alpha} w \sum_{\substack{x\geqslant \alpha\\ y\geqslant 1}} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} - \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,0} z^{\alpha} \sum_{\substack{x\geqslant \alpha\\ y\geqslant 0}} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} = \\
=&\sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} z^{\alpha} w \left(\mathcal{D}(z,w) - \sum_{(x,y)\ngeqslant(\alpha,1)} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} \right) - \\
-&\sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,0} z^{\alpha} \left(\mathcal{D}(z,w) - \sum_{(x,y)\ngeqslant(\alpha,0)} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} \right) = \\
=&\mathcal{D}(z,w)R(z,w) - \left(\sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} z^{\alpha} w \sum_{(x,y)\ngeqslant(\alpha,1)} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} - \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,0} z^{\alpha} \sum_{(x,y)\ngeqslant(\alpha,0)} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} \right). \quad (*)
\end{aligned}$$

Поскольку на множестве начальных данных функция $\varphi(x,y)$ имеет вид (4), то в силу линейности оператора Res (см. [4, стр. 15]) и формулы (8)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} z^{\alpha} w \sum_{(x,y)\ngeqslant(\alpha,1)} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} = \\
=&\operatorname{Res} \left\{ \frac{d(\xi)P(\xi)}{P(\xi)\eta - Q(\xi)} \frac{1}{(w-\eta)(z-\xi)} \left(\sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} z^{\alpha} w - \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} \xi^{\alpha} \eta \right) \right\} = \\
=&\operatorname{Res} \left\{ \frac{d(\xi)P(\xi)}{P(\xi)\eta - Q(\xi)} \frac{P(z)w - P(\xi)\eta}{(w-\eta)(z-\xi)} \right\},
\end{aligned}$$

аналогично,

$$\sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} z^{\alpha} w \sum_{(x,y)\ngeqslant(\alpha,1)} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} = \operatorname{Res} \left\{ \frac{d(\xi)P(\xi)}{P(\xi)\eta - Q(\xi)} \frac{Q(z) - Q(\xi)}{(w-\eta)(z-\xi)} \right\}.$$

Следовательно, в силу свойств оператора Res

$$\sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} z^{\alpha} w \sum_{(x,y)\not\geqslant(\alpha,1)} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} - \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,0} z^{\alpha} \sum_{(x,y)\not\geqslant(\alpha,0)} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} =$$
$$= \mathrm{Res}\left\{ \frac{d(\xi)P(\xi)}{P(\xi)\eta - Q(\xi)} \frac{P(z)w - P(\xi)\eta}{(w-\eta)(z-\xi)} - \frac{d(\xi)P(\xi)}{P(\xi)\eta - Q(\xi)} \frac{Q(z) - Q(\xi)}{(w-\eta)(z-\xi)} \right\} =$$
$$= \mathrm{Res}\left\{ \frac{d(\xi)P(\xi)}{P(\xi)\eta - Q(\xi)} \frac{(P(z)w - Q(z)) - (P(\xi)\eta - Q(\xi))}{(w-\eta)(z-\xi)} \right\} =$$
$$= (P(z)w - Q(z))\, \mathrm{Res}\left\{ \frac{d(\xi)P(\xi)}{(P(\xi)\eta - Q(\xi))(w-\eta)(z-\xi)} \right\} - \mathrm{Res}\left\{ \frac{d(\xi)P(\xi)}{(w-\eta)(z-\xi)} \right\} = P(z)d(z).$$

Используя это равенство, получим

$$\mathcal{D}(z,w)R(z,w) - P(z)d(z) = 0,$$

откуда сразу следует, что $r(x,y)$ — рациональная последовательность Риордана. □

Доказательство теоремы 2. В соотношении (*) из доказательства теоремы 1

$$\mathcal{D}(z,w)R(z,w) =$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} z^{\alpha} w \sum_{(x,y)\not\geqslant(\alpha,1)} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} - \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,0} z^{\alpha} \sum_{(x,y)\not\geqslant(\alpha,0)} \frac{r(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} =$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} z^{\alpha} w \left(\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\varphi(x,0)}{z^{x+1}w} + \sum_{x=0}^{\alpha-1}\sum_{y=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} \right) -$$
$$- \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,0} z^{\alpha} \left(\sum_{x=0}^{\alpha-1} \frac{\varphi(x,0)}{z^{x+1}} + \sum_{x=0}^{\alpha-1}\sum_{y=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,y)}{z^{x+1}w^{y+1}} \right) =$$
$$= P(z)d(z) + \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,1} z^{\alpha} w \sum_{x=0}^{\alpha-1} \frac{\Phi_x(w)}{z^{x+1}} - \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,0} z^{\alpha} \sum_{x=0}^{\alpha-1} \frac{\varphi(x,0)}{z^{x+1}w} - \sum_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha,0} z^{\alpha} \sum_{x=0}^{\alpha-1} \frac{\Phi_x(w)}{z^{x+1}} =$$
$$= P(z)d(z) + \sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{x=0}^{\alpha-1} (c_{\alpha,1}w - c_{\alpha,0}) z^{\alpha} \frac{\Phi_x(w)}{z^{x+1}} - \frac{1}{w} \sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{x=0}^{\alpha-1} \frac{c_{\alpha,0}\varphi(x,0)}{z^{x-\alpha+1}} =$$
$$= P(z)d(z) + \sum_{x=0}^{m-1} \left(\Phi_x(w) \cdot \frac{1}{z^{x+1}} \sum_{\alpha=x+1}^{m} (c_{\alpha,1}w - c_{\alpha,0}) z^{\alpha} \right) - \frac{1}{w} \sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{x=0}^{\alpha-1} \frac{c_{\alpha,0}\varphi(x,0)}{z^{x-\alpha+1}} =$$
$$= P(z)d(z) + \sum_{x=0}^{m-1} \Phi_x(w) \cdot R_{x+1}(z,w) - \frac{1}{w} \sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{x=0}^{\alpha-1} \frac{c_{\alpha,0}\varphi(x,0)}{z^{x-\alpha+1}}.$$

Откуда и следует утверждение теоремы. □

Доказательство теоремы 3. Пусть $a_1, a_2, ..., a_{N_1}$ — корни многочлена $Q(z)$; $b_1, b_2, ..., b_{N_2}$ — корни многочлена $P(z)$. Так как, согласно условиям теоремы, все корни простые и различные по модулю, тогда амебу $\mathcal{A}_R$ характеристического многочлена можно представить как множество точек $\mathbb{R}^2_{(\xi,\eta)}$ вида $\xi = t, \eta = f(t,\varphi)$, где

$$f(t,\varphi) = \log \frac{|e^{t+i\varphi} - a_1| \cdot \ldots \cdot |e^{t+i\varphi} - a_{N_1}|}{|e^{t+i\varphi} - b_1| \cdot \ldots \cdot |e^{t+i\varphi} - b_{N_2}|}, (t,\varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi).$$

Отметим, что каждому $a_i \neq 0$ и $b_j \neq 0$ соответствуют лучи на прямых $\xi = \log|a_i|$ и $\xi = \log|b_j|$, целиком принадлежащие амебе. Также амеба содержит еще два луча, возникающих при $t \to \pm\infty$. Таким образом, число компонент дополнения к амёбе не меньше $N_1+N_2+2-\kappa$, где N_1 и N_2 — число различных по модулю и отличных от нуля корней многочленов $Q(z)$ и $P(z)$ соответственно, а $\kappa = 1$, если у одного из многочленов есть корень, равный нулю, и $\kappa = 0$ в остальных случаях. С другой стороны, так как все целочисленные точки многогранника Ньютона $\mathcal{N}_R$ характеристического многочлена R лежат на его границе, то их число равно $N_1 + N_2 + 2 - \kappa$.

Таким образом, число компонент дополнения амебы равно числу целых точек в многограннике Ньютона, это и означает по определению, что амеба характеристического многочлена максимальна.

Условие гладкости границы позволит применить теорему 2 из работы [12], из которой для $(p,q) \in \operatorname{Int}\Omega_{m,1}$ следует справедливость формулы

$$r(x,y) \sim \frac{C(p,q)}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left[z_0^p w_0^q\right]^\lambda, x = \lambda p, y = \lambda q, \lambda \to \infty,$$

где константа вычисляется по формуле

$$C(p,q) = \frac{d(z_0)}{\sqrt{qH(z_0)}}, H(z) = \frac{Q''(z)}{Q(z)} - \frac{P''(z)}{P(z)} + 2\frac{p}{q}\frac{1}{z}\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{p}{q}(1+\frac{p}{q})\frac{1}{z^2},$$

а точка (z_0, w_0) удовлетворяет системе

$$\begin{cases} P(z)w - Q(z) = 0 \\ z\left(\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{Q'(z)}{Q(z)}\right) = \frac{p}{q} \end{cases}.$$

□

3. Примеры

Приведем несколько примеров рациональных последовательностей Риордана.

Пример 1. *Биномиальные коэффициенты* являются решением разностного уравнения

$$f(x+1,y+1) - f(x,y+1) - f(x,y) = 0$$

с начальными данными

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1, \text{если} & x \geqslant 0, y = 0 \\ 0, \text{если} & x = 0, y \geqslant 1 \end{cases}.$$

Производящая функция двойной последовательности $\{f(x,y)\}$ имеет вид:

$$\mathcal{D}(z,w) = \frac{1}{zw - w - 1} = \frac{d(z)}{w - h(z)},$$

где

$$d(z) = h(z) = \frac{1}{z-1}.$$

Тогда по теореме 3 для направлений (p,q), $\frac{p}{q} > 1$ справедлива асимптотическая формула:

$$r(x,y) \sim \frac{1}{q}\sqrt{\frac{pq}{2\pi\lambda(p-q)}} \left((p-q)^{p-q}\frac{p^p}{q^q}\right).$$

Пример 2. Пусть $A = (a_{ij})$ — это $x \times m$ матрица с $x \cdot m$ различными элементами. Обозначим $r_m(x, y), 0 < y \leqslant x$ — число способов выбора y из $x \cdot m$ элементов таким образом, чтобы никакие два не стояли в одной строке, а если выбраны элементы из смежных строк, то они должны стоять в одном столбце.

В работе [5] найдена явная формула для вычисления $r_m(x, y)$:

$$r_m(x, y) = \sum_{r=1}^{y} m^r \binom{y-1}{r-1} \binom{x-y+1}{r}$$

и приведено разностное уравнение для $r_m(x, y)$:

$$r_m(x+2, y+1) - r_m(x+1, y+1) - r_m(x+1, y) - (m-1) r_m(x, y) = 0.$$

Рассмотрим задачу Коши для данного уравнения, указав «начальные» значения на множестве $X_{2,1} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_+^2 : (x, y) \ngeqslant (2, 1)\}$:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, \text{если} & x \geqslant 0, y = 0, \\ 0, \text{если} & x = 0, y \geqslant 1 \text{ или } x = 1, y \geqslant 2 \\ m, \text{если} & (x, y) = (1, 1). \end{cases},$$

По теореме 2 найдем производящую функцию для коэффициентов $r_m(x, y)$:

$$\mathcal{D}(z, w) = \frac{P(z) d(z)}{P(z) w - Q(z)} = \frac{z}{z(z-1) w - z - (m-1)}.$$

Используя теорему 3, вычислим асимптотику $r(x, y)$ при $m = 2$.

Точка (z_0, w_0) является решением системы

$$\begin{cases} w = \frac{z+1}{z(z-1)} \\ z \left(\frac{2z-1}{z(z-1)} - \frac{1}{z+1} \right) = \mu \end{cases}.$$

Наибольший вклад в асимптотику даст точка (z_0, w_0) вида

$$\left(\frac{1 + \sqrt{(\mu-1)^2 + 1}}{\mu - 1}, \frac{(\mu-1)(\sqrt{2 - 2\mu + \mu^2} + \mu)}{(2 + \sqrt{2 - 2\mu + \mu^2} - \mu)(1 + \sqrt{2 - 2\mu + \mu^2})} \right).$$

Далее вычислим

$$H(z_0) = \frac{(\mu-1)((\mu-2) z_0 - \mu)}{z_0^2 (z_0 - 1)}, d(z_0) = \frac{1}{z_0 - 1}$$

и, применяя формулу (5), для $\dfrac{p}{q} > 1$ получим

$$r(x, y) \sim \frac{z_0}{\sqrt{2\pi \lambda q (\mu-1)((\mu-2) z_0 - \mu)(z_0 - 1)}} \left[z_0^p w_0^q \right]^\lambda, x = \lambda p, y = \lambda q, \lambda \to \infty.$$

Пример 3. Рассмотрим последовательности из n элементов $a_1 a_2 ... a_n$, причем $a_1 = 0$ и $a_j \in \{0, 1\}$ для $2 \leqslant j \leqslant n$. Элемент последовательности a_j назовем изолированным, если он отличен от всех элементов, стоящих на соседних местах. Обозначим $r(n, k)$ число таких последовательностей, содержащих k изолированных элементов. Очевидно, что $r(n, k) = 0$, если $n < k$ (см. [6, 3]).

Данная последовательность является решением задачи Коши для разностного уравнения

$$r(x+2,y+1)-r(x+1,y+1)-r(x+1,y)-r(x,y+1)+r(x,y)=0$$

с начальными данными $\varphi(0,0)=1, \varphi(1,0)=0, \varphi(x,0)=\varphi(x-1,0)+\varphi(x-2,0), x\geqslant 2$, $\varphi(1,1)=1$, $\varphi(0,y)=0, y\geqslant 1$ и $\varphi(1,y)=0, y\geqslant 2$.

По теореме 2 производящая функция имеет вид

$$\mathcal{D}(z,w)=\frac{z-1}{z^2w-zw-w-z+1}=\frac{d(z)}{w-h(z)},$$

где

$$d(z)=h(z)=\frac{z-1}{z^2-z-1}.$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) и Государственным фондом естественных наук Китая (ГФЕН) в рамках совместного проекта «Комплексный анализ и его приложения» (проект N 08-01-92208_ГФЕН).

Список литературы

[1] L.W.Shapiro, S.Getu, W.-J.Woan, L.Woodson, The Riordan group, *Discrete Applied Mathematics*, **34**(1991), 229-239.

[2] D.Merlini, Generating functions for the area below some lattice paths, *Disc. Math. and Th. Comp. Sc*, AC, (2003), 217-228.

[3] D.Baccherini, D.Merlini, R.Sprugnoli, Level generation trees and proper Riordan arrays, *Applicable Analysis and Discrete Mathemamatics*, **2**(2008), 69-91.

[4] Г.П.Егорычев, Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм, Новосибирск, Наука, 1977.

[5] M.Abramson, W.Moser, Combinations, successions and the n-kings problem, *Math. Mag.*, **39**(1966), №5, 269-273.

[6] D.M.Bloom, Singles in a Sequence of Coin Tosses, *The College Mathematics Journal*, (1998).

[7] А.К.Цих, Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфных функций двух переменных, *Мат. сб.*, **182**(1981), №11, 1588-1612.

[8] А.Г.Орлов, Об асимптотике коэффициентов Тейлора рациональных функций двух переменных, *Изв. вузов*, (1993), №6, 26-33.

[9] R.Pemantle, M.Wilson, Asymptotics of multivariate sequences, part I: smooth points of the singular variety, *J. Comb. Th.*, Series A97, (2002), 129-161.

[10] M.Wilson, Asymptotics for generalized Riordan arrays, *DMTCS proc. AD,* (2005), 323-334.

[11] Е.К.Лейнартас, М.Пассаре, А.К.Цих, Асимптотика многомерных разностных уравнений, *Успехи мат. наук*, **60**(2005), №5, 171–172.

[12] Е.К.Лейнартас, М.Пассаре, А.К.Цих, Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений, *Мат. сборник*, **199**(2008), №10, 87-104.

[13] M.Bousquet-Mélou, M.Petkovšek, Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case, *DM*, **225**(2000), 51-75.

[14] Е.К.Лейнартас, Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений, *Сиб. мат. журн.,* **48**(2007), №2, 335-340.

[15] M.Forsberg, M.Passare, A.Tsikh, Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas, *Advances in Math.*, **151**(2000), 45-70.

Riordan's Arrays and Two-dimensional Difference Equations

Alexander P.Lyapin

We describe of rational Riordan's arrays appearing in combinatorial analysis in terms of solutions of a Cauchy problem for a two-dimensional difference equation. The asymptotics of such arrays has been investigated.

Keywords: riordan's arrays, multidimensional difference equations, Cauchy problem, the amoeba of a characteristic polynomial.