УДК 517.955, 517.954, 517.956.3

Преобразование Эйлера и решение начально-краевой задачи

Иван В.Коростелев*
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок 50/44, Красноярск, 660036,
Россия

Получена 20.03.2009, окончательный вариант 21.04.2009, принята к печати 30.04.2009

Работа посвящена построению решений и преобразований линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. Представляется метод Эйлера и конструктивным образом находится решение начально-краевой задачи для уравнений с коэффициентами из некоторого семейства.

Ключевые слова: преобразования, начально-краевая задача, гиперболические уравнения.

Введение

Линейные модели, описываемые дифференциальными уравнениями, применяются в акустике, теории упругости, электродинамике, квантовой механике. Так, например, уравнение продольных колебаний однородного стержня переменного сечения имеет следующий вид [1]:

$$\frac{1}{c^2}\,u_{tt} = u_{xx} + (\ln\, S(x))_x\, u_x,$$

где u — продольное перемещение, $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ — скорость распространения продольной волны, ρ — плотность, E — модуль Юнга, $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня в точке x. При некоторых допущениях звуковая волна в трубах переменного сечения может быть описана следующими уравнениями [2]:

$$\frac{1}{c^2}\,p_{tt} = p_{xx} + (\ln\, S(x))_x\, p_x,$$

$$p = P_0\,\gamma_c\,\delta,$$

$$\delta = -\frac{1}{S(x)}\,\left(S(x)\,\xi\right)_x,$$

где $p(x,t)$ — звуковое давление, т.е. разность между действительным и равновесным давлением, $S(x)$ — площадь сечения трубы, $\delta(x,t) = \dfrac{1}{\rho_0}\,\rho(x,t) - 1$ — относительное изменение плотности газа, ρ_0 — плотность газа в состоянии равновесия, $\rho(x,t)$ — действительная плотность газа, γ_c — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, $\xi(x,t)$ — смещение частиц газа вдоль оси x, $c = \sqrt{\dfrac{P_0\,\gamma_c}{\rho_0}}$ — скорость распространения звуковой волны.

*e-mail: ivankor86@bk.ru

Данная работа посвящена построению решений и преобразований линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. Представляется метод Эйлера и конструктивным образом находится решение начально-краевой задачи для уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + G(x)u_x \tag{1}$$

с функцией $G(x)$ из некоторого семейства.

1. Применение метода Эйлера к решению начально-краевой задачи

Представим краткое описание метода Эйлера. Преобразование вида

$$z = M(x)\,(u_x + s(x)\,u)$$

введено Эйлером [3] для интегрирования уравнений

$$u_{tt} = F(x)\,u_{xx} + G(x)\,u_x + H(x)\,u. \tag{2}$$

В работе [4] метод интегрирования Эйлера [3] был распространен на некоторые классы линейных уравнений с произвольным числом переменных. Следуя [4], рассмотрим преобразование

$$u_1 = \left(u_x - \frac{h_x}{h}\,u\right)/r. \tag{3}$$

Здесь r — произвольная гладкая функция от x, $h(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$F\,h'' + G\,h' + (H + c)\,h = 0, \quad c \in R. \tag{4}$$

В дальнейшем (4) будем называть дифференциальным преобразованием Эйлера или кратко — преобразованием Эйлера. Преобразование Эйлера (3) переводит решения уравнения (2) в решения уравнения [4]:

$$u_{1tt} = F(x)\,u_{1xx} + G_1(x)\,u_{1x} + H_1(x)\,u_1,$$

где функции G_1, H_1 определяются формулами

$$G_1 = G + F' + 2\,F\,(\ln r)',$$

$$H_1 = H + \frac{(F\,r' + G\,r)'}{r} + F'\,(\ln h)' + 2\,F\,(\ln h)'',$$

штрих означает производную по x.

Покажем, как с помощью преобразования Эйлера можно получить решение уравнения (1) для некоторого семейства функций $G(x)$. Для того чтобы преобразование Эйлера (3) переводило решения уравнения (1) в решения уравнения

$$u_{1tt} = u_{1xx} + (G + 2(\ln r)')u_{1x}, \tag{5}$$

функция r должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$r'' + Gr' + (G' + 2(\ln h)'')r = 0. \tag{6}$$

Пусть $G = 0$, тогда $u = f(x+t) + g(x-t)$ — общее решение (1), а уравнение на функцию h имеет вид

$$h'' + c\,h = 0, \quad c \in R. \tag{7}$$

В зависимости от выбора c получается три типа решений. Если $c = 0$, то

$$h = a_{11}\,x + a_{12}, \quad a_1, a_2 \in R.$$

В этом случае решением уравнения (6) является функция

$$r = \frac{c_1 + c_2\,(a_{11}\,x + a_{12})^3}{(a_{11}\,x + a_{12})}, \quad c_1, c_2 \in R.$$

Значит, преобразованное уравнение

$$u_{1tt} = u_{1xx} + 2\,(\ln r)'\,u_{1x},$$

согласно формуле (3), имеет решение

$$u_1 = \frac{a_{11}\,x + a_{12}}{c_1 + c_2\,(a_{11}\,x + a_{12})^3}\left[f' + g' - \frac{a_{11}}{a_{11}\,x + a_{12}}\,(f+g)\right].$$

Пусть $c < 0$, тогда, не ограничивая общности, можно считать $c = -1$. В этом случае

$$h = a_{11}\ \mathrm{sh}(x) + a_{12}\ \mathrm{ch}(x)$$

является общим решением (7), а

$$r = c_1 - \frac{a_{11}\ \mathrm{ch}(x) + a_{12}\ \mathrm{sh}(x)}{a_{11}\ \mathrm{sh}(x) + a_{12}\ \mathrm{ch}(x)}(c_1 x + c_2), \quad c_1, c_2 \in R,$$

удовлетворяет (6). Значит, преобразованное уравнение (5) имеет решение

$$u_1 = \frac{1}{r}\left[f' + g' - \frac{a_{11}\ \mathrm{ch}(x) + a_{12}\ \mathrm{sh}(x)}{a_{11}\ \mathrm{sh}(x) + a_{12}\ \mathrm{ch}(x)}\,(f+g)\right].$$

Наконец, если $c = 1$, то соответствующие функции h, r и u_1 задаются формулами

$$h = a_{11}\ \sin(x) + a_{12}\ \cos(x),$$

$$r = c_1 + \frac{a_{12}\ \sin(x) - a_{11}\ \cos(x)}{a_{11}\ \sin(x) + a_{12}\ \cos(x)}(c_1 x + c_2), \quad c_1, c_2 \in R,$$

$$u_1 = \frac{1}{r}\left[f' + g' + \frac{a_{12}\ \sin(x) - a_{11}\ \cos(x)}{a_{11}\ \sin(x) + a_{12}\ \cos(x)}\,(f+g)\right].$$

Применим теперь преобразование Эйлера к (5). Преобразование

$$u_2 = \left(\frac{u_1}{h_1}\right)_x \frac{h_1}{r_1}, \tag{8}$$

где функции h_1, r_1 удовлетворяют уравнениям

$$h_1'' + 2\,(\ln\,r)'\,h_1' + c_1\,h_1 = 0, \tag{9}$$

$$r_1'' + 2\,(\ln\,r)'\,r_1' + 2\,(\ln\,h_1\,r)''\,r_1 = 0, \tag{10}$$

переводит решения уравнения (5) в решения уравнения

$$u_{2tt} = u_{2xx} + 2\,(\ln\,r\,r_1)'\,u_{2x}. \tag{11}$$

Замечание 1. *Пусть функция h_{01} удовлетворяет уравнению*

$$h_{01}'' + c_1 \, h_{01} = 0.$$

Тогда, если $c \neq c_1$, то функция

$$h_1 = \left(\frac{h_{01}}{h}\right)_x \frac{h}{r}$$

является общим решением уравнения (9). Если $c = c_1$, то указанная функция будет частным решением (9). Вторым независимым решением (9) будет функция

$$h_1 \int \frac{1}{(h_1 \, r)^2} \, dx.$$

Замечание 2. *Общим решением уравнения (10) является функция*

$$r_1 = a_{11} \, \frac{h_1'}{h_1} + a_{12} \, \frac{h_1'}{h_1} \int \frac{h_1^2}{(h_1' \, r)^2} \, dx.$$

Последовательно применяя преобразование Эйлера, мы получим последовательность интегрируемых уравнений. На n-м шаге мы получим уравнение

$$u_{ntt} = u_{nxx} + 2 \, (\ln(r \, r_1 \cdots r_{n-1}))' \, u_{nx}. \qquad (12)$$

Его общее решение находится по формуле

$$u_n = \left(\left(\left(\left(\left(\frac{f(x+t) + g(x-t)}{h} \right)' \frac{h}{h_1 \, r} \right)' \frac{h_1}{h_2 \, r_1} \right)' \cdots \right)' \frac{h_{n-2}}{h_{n-1} \, r_{n-2}} \right)' \frac{h_{n-1}}{r_{n-1}}, \qquad (13)$$

где функции h_i, r_i удовлетворяют следующим уравнениям:

$$h_i'' + 2 \, (\ln \, (r \, r_1 \cdots r_{i-1}))' \, h_i' + c_i \, h_i = 0, \qquad (14)$$

$$r_i'' + 2 \, (\ln \, (r \, r_1 \cdots r_{i-1}))' \, r_i' + 2 \, (\ln(h_i \, r \, r_1 \cdots r_{i-1}))'' \, r_i = 0. \qquad (15)$$

Замечание 3. *Если все c_i различны, то общие решения уравнений (14) задаются формулой*

$$h_i = \frac{W(h, \, h_{01}, \ldots, h_{0i})}{W(h, \, h_{01}, \ldots, h_{0\,i-1}) \, r \, r_1 \, \ldots r_{i-1}}, \qquad (16)$$

где $W(f_1, \ldots, f_n)$ – вронскиан функций $f_1, \ldots, f_n$, а h_{0i} есть решения уравнений

$$h_{0i}'' + c_i \, h_{0i} = 0.$$

Если не все c_i различны, то h_i следует находить последовательно.

Замечание 4. *Общими решениями уравнений (15) являются функции*

$$r_i = a_{i1} \, \frac{h_i'}{h_i} + a_{i2} \, \frac{h_i'}{h_i} \int \frac{h_i^2}{(h_i' \, r \, r_1 \, \cdots r_{i-1})^2} \, dx. \qquad (17)$$

Замечание 5. *Если уравнение (12) рассматривать как модель продольных колебаний стержня или распространения звуковой волны в трубе (см. Введение), то площадь сечения стержня или трубы, соответственно, находится по формуле*

$$S(x) = (r \, r_1 \cdots r_{n-1})^2.$$

Пример 1. Преобразование Эйлера, удовлетворяющее замечанию 3, можно найти в [4], где приведено решение

$$z = \frac{W(u^0, h_1, \ldots, h_n)}{W(h_1', \ldots, h_n')}$$

уравнения

$$z_{tt} = z_{xx} + 2\left[\ln \frac{W(h_1', \ldots, h_n')}{W(h_1, \ldots, h_n)}\right]' z_x,$$

где $h_i = a_i\ \mathrm{sh}(\lambda_i\, x) + b_i\ \mathrm{ch}(\lambda_i\, x)$, $a_i,\, b_i,\, \lambda_i \in R$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $u^0 = f(x+t) + g(x-t)$.

Пример 2. Рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} = u_{xx}. \tag{18}$$

Общее решение этого уравнения

$$u = f(x+t) + g(x-t).$$

Применим к нему преобразование Эйлера

$$u_1 = \left(\frac{u}{h}\right)' \frac{h}{r},$$

где $h(x)$ удовлетворяет уравнению

$$h'' + c\, h = 0.$$

Пусть $c = 0$, тогда, как показано выше, функции h и r определяются формулами

$$h = a\, x + b,$$

$$r = \frac{c_{01} + c_{02}(a\, x + b)^3}{a\, x + b}.$$

Данное преобразование переводит решения волнового уравнения в решения уравнения

$$u_{1tt} = u_{1xx} + 2\,(\ln\, r)'\, u_{1x}. \tag{19}$$

Общее решение этого уравнения есть

$$u_1 = \frac{(a\, x + b)\,(f' + g') - a\,(f + g)}{c_{01} + c_{02}(a\, x + b)^3}.$$

Применим теперь к уравнению (19) преобразование

$$u_2 = \left(\frac{u_1}{h_1}\right)' \frac{h_1}{r_1}, \tag{20}$$

где функции h_1, r_1 удовлетворяют следующим уравнениям:

$$h_1'' + 2\,(\ln\, r)'\, h_1' + c_1\, h_1 = 0, \tag{21}$$

$$r_1'' + 2\,(\ln\, r)'\, r_1' + 2\,(\ln(h_1\, r))''\, r_1 = 0. \tag{22}$$

Пусть $c_1 = 0$. Найдем функцию h_1, пользуясь замечанием 1. В данном случае $c = c_1$, поэтому, если h_{01} есть решение уравнения

$$h_{01}'' = 0,$$

то функция

$$h_1^{(1)} = \left(\frac{h_{01}}{h}\right)_x \frac{h}{r}$$

является частным решением (21). Вторым независимым решением (21) будет функция

$$h_1^{(2)} = h_1^{(1)} \int \frac{1}{(h_1^{(1)}\, r)^2}\, dx.$$

Таким образом мы находим общее решение уравнения (21), оно равно

$$h_1 = \frac{a_{11} + a_{12}\,(a\,x+b)^3}{c_{01} + c_{02}(a\,x+b)^3}.$$

Согласно замечанию 2 найдем решение уравнения (22):

$$r_1 = \frac{(a\,x+b)\,(c_{11}\,(a\,x+b) + c_{12}\,(-5\,a_{11}^2 + 5\,a_{11}\,a_{12}\,(a\,x+b)^3 + a_{12}^2\,(a\,x+b)^6))}{(a_{11} + a_{12}\,(a\,x+b)^3)\,(c_{01} + c_{02}(a\,x+b)^3)}.$$

Данное преобразование переводит решения уравнения (19) в решения уравнения

$$u_{2tt} = u_{2xx} + 2\,(\ln(r\,r_1))'\,u_{2x}. \tag{23}$$

Общее решение находится подстановкой выражений для h_1, r_1 и общего решения u_1 в формулу преобразования (20).

Пусть $c_1 = -1$. В этом случае общим решением уравнения (21) является функция

$$h_1 = \frac{(a\,x+b)\,(a_1\ \mathrm{ch}\ x + b_1\ \mathrm{sh}\ x) - a\,(a_1\ \mathrm{sh}\ x + b_1\ \mathrm{ch}\ x)}{c_{01} + c_{02}\,(a\,x+b)^3}.$$

Решение (22) задается формулой

$$r_1 = c_{11}\left(\frac{(a\,x+b)\,(a_1\ \mathrm{sh}\ x + b_1\ \mathrm{ch}\ x)}{(a\,x+b)\,(a_1\ \mathrm{ch}\ x + b_1\ \mathrm{sh}\ x) - a\,(a_1\ \mathrm{sh}\ x + b_1\ \mathrm{ch}\ x)} - \frac{3\,c_{02}\,a\,(a\,x+b)^2}{c_{01} + c_{02}\,(a\,x+b)^3}\right) +$$

$$+c_{12}\,\frac{(a\,x+b)\,(a_1\ \mathrm{sh}\ x + b_1\ \mathrm{ch}\ x)}{((a\,x+b)\,(a_1\ \mathrm{ch}\ x + b_1\ \mathrm{sh}\ x) - a\,(a_1\ \mathrm{sh}\ x + b_1\ \mathrm{ch}\ x))\,\,(c_{01} + c_{02}\,(a\,x+b)^3)}.$$

Используя приведенные выражения, с помощью подстановки в формулы (20), (23) легко найти соответствующую формулу преобразования, а также явный вид преобразованного уравнения и его решения. Согласно замечанию 5, площадь сечения $S(x)$ для уравнения (19) равна

$$S(x) = \left(\frac{c_{01} + c_{02}(a\,x+b)^3}{a\,x+b}\right)^2,$$

для уравнения (23) при $c_1 = 0$

$$S(x) = \left(\frac{c_{11}\,(a\,x+b) + c_{12}\,(-5\,a_{11}^2 + 5\,a_{11}\,a_{12}\,(a\,x+b)^3 + a_{12}^2\,(a\,x+b)^6)}{a_{11} + a_{12}\,(a\,x+b)^3}\right)^2,$$

при $c_1 = -1$

$$S(x) = \left(c_{11}\,\left(\frac{(c_{01} + c_{02}(a\,x+b)^3)\,(a_1\ \mathrm{sh}\ x + b_1\ \mathrm{ch}\ x)}{(a\,x+b)\,(a_1\ \mathrm{ch}\ x + b_1\ \mathrm{sh}\ x) - a\,(a_1\ \mathrm{sh}\ x + b_1\ \mathrm{ch}\ x)} - 3\,c_{02}\,a\,(a\,x+b)\right) +\right.$$

$$+c_{12}\,\frac{a_1\,\mathrm{sh}\,x+b_1\,\mathrm{ch}\,x}{(a\,x+b)\,(a_1\,\mathrm{ch}\,x+b_1\,\mathrm{sh}\,x)-a\,(a_1\,\mathrm{sh}\,x+b_1\,\mathrm{ch}\,x)}\Bigg)^2.$$

Используя преобразования Эйлера, можно найти решение начально-краевой задачи для уравнения (12) с функциями r_i, h_i, удовлетворяющими уравнениям (14), (15). Основные результаты по разрешимости начально-краевых задач для линейных гиперболических уравнений имеются в [5, 6]. В дальнейшем все входящие функции считаются дифференцируемыми нужное число раз.

Выберем отрезок $[x_1, x_2]$ таким образом, чтобы функции r_i, h_i были определены и не обращались в ноль в каждой точке отрезка. Зададим на $[x_1, x_2]$ начальные данные

$$u_n(0,x)=\varphi(x),\qquad u_{nt}(0,x)=\psi(x),\qquad x\in[x_1,x_2]\,. \tag{24}$$

Для сокращения дальнейших выкладок определим операторы, действие которых на произвольную функцию $w(x,t)$ задается следующими формулами:

$$L_0\,w(x,t)=\left(\frac{w(x,t)}{h(x)}\right)_x\frac{h(x)}{r(x)},$$

$$L_i\,w(x,t)=\left(\frac{w(x,t)}{h_i(x)}\right)_x\frac{h_i(x)}{r_i(x)},$$

$$\widetilde{L_0^y}\,w(y_0,t)=h(y)\int_{a_0}^{y}\frac{w(y_0,t)\,r(y_0)}{h(y_0)}\,dy_0,$$

$$\widetilde{L_i^y}\,w(y_i,t)=h_i(y)\int_{a_i}^{y}\frac{w(y_i,t)\,r_i(y_i)}{h_i(y_i)}\,dy_i,$$

где a_i – произвольные постоянные из отрезка $[x_1, x_2]$.

Уравнение (12) является гиперболическим, поэтому его решение в любой точке треугольника

$$T=\{(t,x): t\geqslant 0, x_1+t\leqslant x\leqslant x_2-t\}$$

однозначно определяется по данным (24). Найдем явное представление этого решения. Решения уравнения (12) получаются из решений уравнения

$$u_{tt}=u_{xx} \tag{25}$$

с помощью преобразования Эйлера

$$u_n(x,t)=L_{n-1}\,L_{n-2}\,\ldots L_1\,L_0\,u(x,t). \tag{26}$$

Начальные данные

$$\varphi_0(x)=u(0,x)=\widetilde{L_0^x}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\varphi(y_{n-1}), \tag{27}$$

$$\psi_0(x)=u(0,x)=\widetilde{L_0^x}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\psi(y_{n-1}) \tag{28}$$

для уравнения (25) переходят в начальные данные (24) под действием того же преобразования (26). Хорошо известно, что решение уравнения (25) с начальными данными (27), (28) в треугольнике T задается формулой Даламбера

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(x+t)+\varphi_0(x-t)+\int_{x-t}^{x+t}\psi_0(y)\,dy\right].$$

С учетом (27), (28) последнее выражение приобретает вид

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left[\widetilde{L_0^{x+t}}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\varphi(y_{n-1})+\widetilde{L_0^{x-t}}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\varphi(y_{n-1})+\right.$$

$$\left.+\int_{x-t}^{x+t}\widetilde{L_0^{z}}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\psi(y_{n-1})\,dz\right].$$

Применяя преобразование Эйлера (26), получаем аналог формулы Даламбера для уравнения (12):

$$u_n(t,x)=\frac{1}{2}\,L_{n-1}\,L_{n-2}\,\ldots L_1\,L_0\,\left[\widetilde{L_0^{x+t}}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\varphi(y_{n-1})+\right.$$

$$\left.+\widetilde{L_0^{x-t}}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\varphi(y_{n-1})+\int_{x-t}^{x+t}\widetilde{L_0^{z}}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\psi(y_{n-1})\,dz\right].\tag{29}$$

Решение $u_n(t,x)$ не зависит от констант a_i, хотя они формально участвуют в его записи (29). В дальнейшем удобно положить $a_i=x_1$.

Пусть теперь для уравнения (12), кроме начальных данных (24), заданы краевые условия

$$u_n(t,x_1)=u_n(t,x_2)=0.\tag{30}$$

Если данные (24), (30) удовлетворяют условиям согласования [7], то начально-краевая задача имеет гладкое решение. Ниже описывается конструктивное построение решения. Выражение (29) можно переписать в виде

$$u_n(t,x)=\frac{1}{2}\,L_{n-1}\,L_{n-2}\,\ldots L_1\,L_0\,\left[f_1(x+t)+g_1(x-t)\right],\tag{31}$$

где функции $f_1(x)$, $g_1(x)$ задаются формулами

$$f_1(x)=\widetilde{L_0^{x}}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\varphi(y_{n-1})+\int_b^x\widetilde{L_0^{z}}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\psi(y_{n-1})\,dz,\tag{32}$$

$$g_1(x)=\widetilde{L_0^{x}}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\varphi(y_{n-1})-\int_b^x\widetilde{L_0^{z}}\,\widetilde{L_1^{y_0}}\ldots\widetilde{L_{n-1}^{y_{n-2}}}\,\psi(y_{n-1})\,dz.\tag{33}$$

Функции $f_1(x)$, $g_1(x)$ определяются формулами (32), (33) только на $[x_1,x_2]$, и таким образом проблема решения начально-краевой задачи сводится к доопределению $f_1(x+t)$, $g_1(x-t)$ для всех $t\geqslant 0$, $x\in[x_1,x_2]$. Подставляя в краевые условия функцию u_n, заданную формулой (31), приходим к двум линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\left.\left(\frac{1}{2}\,L_{n-1}\,L_{n-2}\,\ldots L_1\,L_0\,\left[f_1(x+t)+g_1(x-t)\right]\right)\right|_{x=x_1}=0,\tag{34}$$

$$\left.\left(\frac{1}{2}\,L_{n-1}\,L_{n-2}\,\ldots L_1\,L_0\,\left[f_1(x+t)+g_1(x-t)\right]\right)\right|_{x=x_2}=0.\tag{35}$$

Обозначим через P_1 все члены уравнения (34), содержащие функцию g_1, через R_1 — все члены (34), содержащие функцию f_1, через P_2 — все члены уравнения (35), содержащие функцию f_1, и через R_2 — все члены (35), содержащие функцию g_1. Введем новые переменные $\tau_1 = x_1 - t$, $\tau_2 = x_2 + t$. Тогда уравнения (34),(35) запишутся в виде

$$\begin{aligned} P_1(g_1(\tau_1)) &= -R_1(f_1(2\,x_1 - \tau_1)), \\ P_2(f_1(\tau_1)) &= -R_2(g_1(2\,x_2 - \tau_2)). \end{aligned} \tag{36}$$

Правые части последних уравнений известны при $\tau_1 \in [x_1 - l,\, x_1]$, $\tau_2 \in [x_2,\, x_2 + l]$. Здесь l — длина отрезка $[x_1,\, x_2]$. Поскольку функции f_1, g_1 определены на $[x_1, x_2]$ формулами (32), (33), мы можем вычислить значения функции g_1 и её производных в точке x_1, а также значения функции f_1 и её производных в точке x_2. Воспользовавшись этими значениями в качестве начальных данных уравнений (36), мы сможем определить функции $f_1(x_2 + t)$, $g_1(x_1 - t)$ при $t \in [0,\, l]$. Далее мы можем решить уравнения (36) с начальными данными в точке $x_1 - l$ для g_1 и $x_2 + l$ для f_1, полученные решения определяют функции $f_1(x_2+t)$, $g_1(x_1-t)$ при $t \in [l,\, 2\,l]$. Последовательно применяя эту процедуру, мы определим функции $f_1(x_2 + t)$, $g_1(x_1 - t)$ на всей полуоси $t \geqslant 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке (проект 07-01-00489 РФФИ и интеграционный проект СО РАН 103).

Список литературы

[1] Э.И.Григолюк, И.Т.Селезов, Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек, М., ВИНИТИ, 1973.

[2] Ф.Морз, Колебания и звук, М., Ленинград, ГИТТЛ, 1949.

[3] Л.Эйлер, Интегральное исчисление, Т.3, М., ГИФМЛ, 1958.

[4] О.В.Капцов, Эквивалентность линейных дифференциальных уравнений с частными производными и преобразования Эйлера-Дарбу, *Вычислительные технологии*, **12**(2007), №4, 59-72.

[5] Р.Курант, Уравнения с частными производными, М., Мир, 1964.

[6] Б.П.Рождественский, Н.Н.Яненко, Системы квазилинейных уравнений, М., Наука, 1978.

[7] В.С.Владимиров, Уравнения математической физики, М., Наука, 1971.

The Euler Transformation and a Solution of an Initial-Boundary Problem

Ivan V.Korostelev

The construction of transformations and solutions of a linear hyperbolic partial differential equation was considered. The method of Euler was presented and the solution of the initial-boundary problem for equations with coefficients from some family of functions was constructed.

Keywords: transformation, initial-boundary problem, hyperbolic equation.