УДК 517.9

Об одной задаче идентификации функции источника в параболическом уравнении

Ольга Н.Черепанова*
Татьяна Н.Шипина†
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.05.2009, окончательный вариант 20.06.2009, принята к печати 10.07.2009

В работе исследуется однозначная разрешимость задачи определения функции источника уравнения теплопроводности в случае краевых условий второго рода. Неизвестный источник зависит от всех независимых переменных, входящих в уравнение, и имеет вид $F(t,x,y) = f(t,x) + g(t,y)$. Получены достаточные условия сходимости решения исходной обратной задачи к решению стационарной обратной задачи при стремлении временной переменной к бесконечности.

Ключевые слова: обратная задача, стабилизация, уравнения в частных производных, задачи идентификации коэффициентов.

В работе исследуется однозначная разрешимость обратной краевой задачи для линейного параболического уравнения в случае, когда искомый коэффициент зависит от всех независимых переменных, входящих в уравнение. Проведено исследование поведения решения обратной задачи при $t \to \infty$.

Единственность решения обратной задачи для эволюционного кинетического уравнения в случае, когда функция источника зависит от всех независимых переменных, входящих в уравнение, была исследована в [1]. Разрешимость задачи идентификации коэффициента вида $f(t) + g(x)$ в одномерном параболическом уравнении в случае финального условия переопределения была исследована в [3].

Вопросы стабилизации решения обратных задач при $t \to \infty$ для параболических уравнений в случае краевых условий рассматривались в работах [4, 5].

В области $Q_T = (0,T) \times \Omega$, где $\Omega = \{(x,y) | 0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0\}$, рассматриваем задачу о нахождении функций $u(t,x,y),\ F(t,x,y) = f(t,x) + g(t,y)$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(t,x) + g(t,y), \qquad (t,x,y) \in Q_T, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} &u_x(t,0,y) = u_x(t,x_0,y) = 0, && (t,y) \in [0,T] \times [0,y_0], \\ &u_y(t,x,0) = u_y(t,x,y_0) = 0, && (t,x) \in [0,T] \times [0,x_0] \end{aligned} \tag{3}$$

*e-mail: cherepanova@lan.krasu.ru
†e-mail: shipina@lan.krasu.ru

и условиям переопределения

$$u(t,\overline{x},y)=\beta(t,y), \qquad (t,y)\in[0,T]\times[0,y_0], \tag{4}$$

$$u(t,x,\overline{y})=\gamma(t,x), \qquad (t,x)\in[0,T]\times[0,x_0], \tag{5}$$

где $\overline{x},\overline{y}$ — фиксированные числа и $0<\overline{x}<x_0$, $0<\overline{y}<y_0$.

Считаем, что входные данные (2)–(5) согласованы, т.е.

$$\begin{array}{ll}
\beta(t,\overline{y})=\gamma(t,\overline{x}), & t\in[0,T],\\
\gamma'_x(t,0)=\gamma'_x(t,x_0)=0, & t\in[0,T],\\
\beta'_y(t,0)=\beta'_y(t,y_0)=0, & t\in[0,T],\\
\beta(0,y)=u_0(\overline{x},y), & y\in[0,y_0],\\
\gamma(0,x)=u_0(x,\overline{y}), & x\in[0,x_0],\\
u_{0x}(0,y)=u_{0x}(x_0,y)=0, & y\in[0,y_0],\\
u_{0y}(x,0)=u_{0y}(x,y_0)=0, & x\in[0,x_0].
\end{array} \tag{6}$$

Пусть входные данные задачи (1)–(5) удовлетворяют условиям

$$\beta(t,y)\in C^2((0,T)\times(0,y_0))\cap C^1([0,T]\times[0,y_0]), \tag{7}$$

$$\gamma(t,x)\in C^2((0,T)\times(0,x_0))\cap C^1([0,T]\times[0,x_0]), \tag{8}$$

$$u_0(x,y)\in C^3(\overline{\Omega}). \tag{9}$$

Считаем, что $C^{l,m}((0,T)\times\Omega)$ — пространство функций, непрерывно дифференцируемых по временной переменной t на $(0,T)$ до порядка l и непрерывно дифференцируемых по пространственным переменным x и y на Ω до порядка m включительно.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (7)–(9), тогда задача (1)–(5) имеет единственное решение* $u(t,x,y)\in C^{1,2}((0,T]\times\overline{\Omega})\cap C([0,T]\times\overline{\Omega})$, $F(t,x,y)=f(t,x)+g(t,y)\in C(\overline{Q}_T)\cap C^{0,1}((0,T]\times\overline{\Omega})$ *и существуют непрерывные в* Q_T *производные* $u_{xxy}(t,x,y)$, $u_{yyx}(t,x,y)$.

Доказательство. Продифференцируем уравнение (1) и условия (2), (3) по переменным x и y. Пусть $v(t,x,y)=u_{xy}(t,x,y)$. Тогда функция $v(t,x,y)$ удовлетворяет задаче

$$v_t=v_{xx}+v_{yy}, \tag{10}$$

$$v(0,x,y)=v_0(x,y), \qquad (x,y)\in\overline{\Omega}, \tag{11}$$

$$\begin{array}{ll}
v(t,0,y)=v(t,x_0,y)=0, & (t,y)\in[0,T]\times[0,y_0],\\
v(t,x,0)=v(t,x,y_0)=0, & (t,x)\in[0,T]\times[0,x_0],
\end{array} \tag{12}$$

где $v_0=\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}$.

Начальное условие и краевые условия согласованы:

$$v_0(0,y)=v(x_0,y)=v(x,0)=v(x,y_0)=0.$$

Используя метод Фурье [2], получаем, что решение задачи (10)–(12) представимо формулой

$$v(t,x,y)=\sum_{k,j=1}^{\infty} v_{0kj}\exp\left(-\left(\frac{k\pi}{x_0}\right)^2 t-\left(\frac{j\pi}{y_0}\right)^2 t\right)\sin\frac{k\pi x}{x_0}\sin\frac{j\pi y}{y_0}, \tag{13}$$

где

$$v_{0kj} = \frac{2}{\sqrt{x_0 y_0}} \int\limits_0^{x_0} \int\limits_0^{y_0} v_0(x,y) \sin\frac{k\pi x}{x_0} \sin\frac{j\pi y}{y_0}\, dxdy.$$

Условия (7) на $u_0(x,y)$ гарантируют, что ряд (13) сходится равномерно в $\overline{Q}_T$. Нетрудно показать, что функция $v(t,x,y)$ — сумма ряда (13) — имеет при $t > 0$ производные всех порядков по t, x, y.

Рассмотрим обратную задачу (1)–(4). Покажем, что ее решение определяется формулами

$$u = \int\limits_{\overline{x}}^{x} \int\limits_{\overline{y}}^{y} v(t,\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \beta(t,y) + \gamma(t,x) - \gamma(t,\overline{x}), \tag{14}$$

$$\begin{gathered} F = f(t,x) + g(t,y) = \gamma_t(t,x) - u_{yy}(t,x,\overline{y}) - \\ -\gamma_{xx}(t,x) - \gamma_t(t,\overline{x}) + \gamma_{xx}(t,\overline{x}) + \beta_t(t,y) - \\ -u_{xx}(t,\overline{x},y) - \beta_{yy}(t,y) + u_{yy}(t,\overline{x},\overline{y}), \end{gathered} \tag{15}$$

где $v(t,x,y)$ — решение задачи (10)–(12).

Подставим функцию $u(t,x)$, определенную формулой (14), в уравнение (1).

$$\begin{gathered} \int\limits_{\overline{x}}^{x} \int\limits_{\overline{y}}^{y} v_t(t,\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \beta_t'(t,y) + \gamma_t'(t,x) - \gamma_t'(t,\overline{x}) = \\ = \int\limits_{\overline{y}}^{y} v_x(t,x,\eta)\, d\eta + \gamma_{xx}''(t,x) + \int\limits_{\overline{x}}^{x} v_y(t,\xi,y)\, d\xi + \beta_{yy}''(t,y) + f(t,x) + g(t,y). \end{gathered} \tag{16}$$

В (16) сумма $f(t,x) + g(t,y)$ определена формулой (15).

Интегрируя уравнение (10) по переменной x, а затем по переменной y в заданной области и учитывая, что $v_x = \dfrac{\partial}{\partial y}(u_{xx})$, $v_x = \dfrac{\partial}{\partial x}(u_{yy})$ и условия переопределения (4),(5), приходим к тождеству

$$\begin{gathered} \int\limits_{\overline{x}}^{x} \int\limits_{\overline{y}}^{y} v_t(t,\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \int\limits_{\overline{y}}^{y} v_x(t,x,\eta)\, d\eta + \int\limits_{\overline{x}}^{x} v_y(t,\xi,y)\, d\xi + \\ +\beta_{yy}''(t,\overline{y}) + \gamma_{xx}''(t,\overline{x}) - u_{xx}(t,\overline{x},y) - u_{yy}(t,x,\overline{y}). \end{gathered} \tag{17}$$

Из (17) и формулы (10) для суммы $f(t,x) + g(t,y)$ следует, что тождество (16) верно.

Таким образом, показали, что функции $u(t,x,y)$, $F(t,x,y) = f(t,x) + g(t,y)$ удовлетворяют уравнению (1).

Заметим, что из свойств гладкости функции $v(t,x,y)$ следует, что $u(t,x,y) \in C^{1,2}((0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C([0,T] \times \overline{\Omega})$, $F(t,x,y) = f(t,x) + g(t,y) \in C(\overline{Q}_T) \cap C^{0,1}((0,T] \times \overline{\Omega})$ и существуют непрерывные в Q_T производные $u_{xxy}(t,x,y)$, $u_{yyx}(t,x,y)$.

Проверим выполнение начального условия (2) для $u(t,x,y)$. Рассмотрим $u(t,x,y)$ при $t = 0$. Имеем

$$u(0,x,y) = \int\limits_{\overline{x}}^{x} \int\limits_{\overline{y}}^{y} v(0,\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \beta(0,y) + \gamma(0,x) - \gamma(0,\overline{x}).$$

Так как $v(0,x,y) = u_{0xy}(x,y)$, то последнее равенство преобразуется к виду

$$u(0,x,y) = u_0(x,y) - u_0(\overline{x},y) - u_0(x,\overline{y}) + u_0(\overline{x},\overline{y}) + \beta(0,y) + \gamma(0,x) - \gamma(0,\overline{x}).$$

Из последнего тождества и условий согласования (6) следует, что выполнено начальное условие для функции $u(t,x,y)$.

Выполнение краевых условий и условий переопределения для функции $u(t,x,y)$ очевидно.

Таким образом, установлено, что функции $u(t,x,y)$, $F(t,x,y) = f(t,x)+g(t,y)$ — решение задачи (1)–(5).

Доказательство единственности решения обратной задачи может быть проведено аналогично [3]. □

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы и*

$$\lim_{t\to\infty}\Big(\sup_{x\in[0,x_0]}(|\gamma(t,x)|+|\gamma_t(t,x)|+|\gamma_{xx}(t,x)|)+\sup_{y\in[0,y_0]}(|\beta(t,y)|+|\beta_t(t,y)|+|\beta_{yy}(t,y)|)\Big)=0. \quad (18)$$

Тогда для решения обратной задачи (1)–(5) выполнено

$$\lim_{t\to\infty}(\sup_{\overline{\Omega}}|u(t,x,y)| + \sup_{\overline{\Omega}}|f(t,x)+g(t,y)|) = 0. \quad (19)$$

Доказательство. Так как решение обратной задачи (1)–(5) определяется через решение прямой задачи (10)–(12) $v(t,x,y)$, то исследуем поведение $v(t,x,y)$ при $t\to\infty$.

Покажем, что для решения $v(t,x,y)$ задачи (10)–(12) выполняется

$$\lim_{t\to\infty}(\sup_{\overline{\Omega}}|v(t,x,y)| + \sup_{\overline{\Omega}}|v_x(t,x,y)| + \sup_{\overline{\Omega}}|v_y(t,x,y)|) = 0. \quad (20)$$

Перепишем формулу (13) для $v(t,x,y)$ в виде

$$\begin{aligned} v(t,x,y) = &\sum_{k,j=1}^{m} v_{0kj}\exp\left(-(\tfrac{k\pi}{x_0})^2 t - (\tfrac{j\pi}{y_0})^2 t\right)\sin\tfrac{k\pi x}{x_0}\sin\tfrac{j\pi y}{y_0} + \\ &+ \sum_{k,j=m+1}^{\infty} v_{0kj}\exp\left(-(\tfrac{k\pi}{x_0})^2 t - (\tfrac{j\pi}{y_0})^2 t\right)\sin\tfrac{k\pi x}{x_0}\sin\tfrac{j\pi y}{y_0}, \end{aligned} \quad (21)$$

где номер m выбираются таким образом, чтобы выполнялось $\dfrac{\pi k}{x_0} > 1$ при $k > m$, $\dfrac{\pi j}{y_0} > 1$ при $j > m$. Тогда для второй суммы в (21) имеет место оценка

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k,j=m+1}^{\infty} v_{0kj}\exp(-(\tfrac{k\pi}{x_0})^2 t - (\tfrac{j\pi}{y_0})^2 t)\sin\tfrac{k\pi x}{x_0}\sin\tfrac{j\pi y}{y_0}\right| \leqslant C_1\sum_{k,j=m+1}^{\infty}\exp\left(-(\tfrac{k\pi}{x_0})^2 t - (\tfrac{j\pi}{y_0})^2 t\right) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty}\exp(-\tfrac{k\pi t}{x_0})\cdot\sum_{j=m+1}^{\infty}\exp(-\tfrac{j\pi t}{y_0}) \leqslant \frac{1}{(e^{\frac{\pi t}{x_0}}-1)(e^{\frac{\pi t}{y_0}}-1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) и (13) следует, что

$$\sup_{\overline{\Omega}}|v(t,x,y)| \to 0 \qquad \text{при } t\to\infty.$$

Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{\overline{\Omega}}|v_x(t,x,y)| = 0$.

Продифференцируем (13) по x:

$$v_x(t,x,y) = \sum_{k,j=1}^{\infty} v_{0kj}\frac{\pi k}{x_0}\exp\left(-\left(\frac{k\pi}{x_0}\right)^2 t - \left(\frac{j\pi}{y_0}\right)^2 t\right)\cos\frac{k\pi x}{x_0}\sin\frac{j\pi y}{y_0}. \qquad (23)$$

Имеет место оценка

$$|v_x(t,x,y)| \leqslant C_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi k}{x_0}\exp\left(-\left(\frac{k\pi}{x_0}\right)^2 t\right)\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\pi j}{y_0}\exp\left(-\left(\frac{k\pi}{y_0}\right)^2 t\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_3\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\pi j}{y_0}\exp\left(-\left(\frac{k\pi}{y_0}\right)^2 t\right) + \sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{\pi j}{y_0}\exp\left(-\left(\frac{k\pi}{y_0}\right)^2 t\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_3\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\pi j}{y_0}\exp\left(-\left(\frac{k\pi}{y_0}\right)^2 t\right) + \frac{1}{e^{\frac{\pi t}{y_0}}-1}\right).$$

Из последней оцеки следует, что

$$\sup_{\overline{\Omega}}|v_x(t,x,y)| \to 0 \qquad \text{при } t\to\infty.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\sup_{\overline{\Omega}}|v_y(t,x,y)| \to 0 \qquad \text{при } t\to\infty.$$

Так как решение исходной обратной задачи $u(t,x,y)$ и $F(t,x,y) = f(t,x) + g(t,y)$ определяется формулами (14), (15), то имеют место неравенства

$$\sup_{\overline{\Omega}}|u(t,x,y)| \leqslant C_4(\sup_{\overline{\Omega}}|v(t,x,y)| + \sup_{[0,y_0]}|\beta(t,y)| + \sup_{[0,x_0]}|\gamma(t,x)|),$$

$$\sup_{\overline{\Omega}}|u_{xx}(t,x,y)| \leqslant C_5(\sup_{\overline{\Omega}}|v_x(t,x,y)| + \sup_{[0,x_0]}|\gamma_{xx}(t,x)|),$$

$$\sup_{\overline{\Omega}}|u_{yy}(t,x,y)| \leqslant C_6(\sup_{\overline{\Omega}}|v_y(t,x,y)| + \sup_{[0,y_0]}|\beta_{yy}(t,y)|),$$

$$\sup_{\overline{\Omega}}|f(t,x)+g(t,y)| \leqslant C_7(\sup_{\overline{\Omega}}|u_{xx}(t,x,y)| + \sup_{\overline{\Omega}}|u_{yy}(t,x,y)| + \sup_{[0,x_0]}|\gamma_{xx}(t,x)| +$$
$$+ \sup_{[0,y_0]}|\beta_{yy}(t,y)| + \sup_{[0,y_0]}|\beta_t(t,y)| + \sup_{[0,x_0]}|\gamma_t(t,x)|.$$

Из приведенных выше неравенств, условия леммы (18) и (20) следует, что имеет место (19). □

Замечание 1. *Условие (18) леммы 1 выполняется, если, например, функции* $\gamma(t,x)$ *и* $\beta(t,y)$ *имеют вид*

$$\gamma(t,x) = q_1(x)m_1(t), \qquad \beta(t,y) = q_2(y)m_2(t),$$

где $m_i(t) \to 0$, $i = 1,2$, *при* $t\to\infty$.

В $\Omega = \{(x,y)|0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0\}$ рассмотрим стационарную обратную задачу

$$\begin{array}{ll} \Delta\widetilde{u} = \widetilde{f}(x) + \widetilde{g}(y), & (x,y)\in\Omega, \\ \widetilde{u}_x(0,y) = \widetilde{u}_x(x_0,y) = 0, & y\in[0,y_0], \\ \widetilde{u}_y(x,0) = \widetilde{u}_y(x,y_0) = 0, & x\in[0,x_0], \\ \widetilde{u}(\overline{x},y) = \widetilde{\beta}(y), & y\in[0,y_0], \\ \widetilde{u}(x,\overline{y}) = \widetilde{\gamma}(x), & x\in[0,x_0]. \end{array} \qquad (24)$$

В (24) неизвестны функции $\widetilde{u}(x,y)$, $\widetilde{f}(x)+\widetilde{g}(y)$.

Считаем, что входные данные задачи (23) согласованы.

$$\widetilde{\beta}'(0)=\widetilde{\beta}'(y_0)=0,\quad \widetilde{\gamma}'(0)=\widetilde{\ }'(x_0)=0\quad \widetilde{\gamma}(\overline{x})=\widetilde{\beta}(\overline{y}).$$

Единственное решение обратной задачи (23) определяется формулами

$$\begin{array}{l}\widetilde{u}(x,y)=\widetilde{\beta}(y)+\widetilde{\gamma}(x)-\widetilde{(}\overline{x}),\\ \widetilde{f}(x)+\widetilde{g}(y)=\widetilde{\beta}''(y)+\widetilde{\gamma}''(x).\end{array}\tag{25}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы и*

$$\begin{array}{lll}\lim\limits_{t\to\infty}\gamma(t,x)=\widetilde{\gamma}(x), & \lim\limits_{t\to\infty}\gamma_{xx}(t,x)=\widetilde{\gamma}''(x), & \lim\limits_{t\to\infty}\gamma_t(t,x)=0,\\ \lim\limits_{t\to\infty}\beta(t,y)=\widetilde{\beta}(y), & \lim\limits_{t\to\infty}\beta_{yy}(t,y)=\widetilde{\beta}''(y) & \lim\limits_{t\to\infty}\beta_t(t,y)=0.\end{array}$$

Тогда решение обратной задачи (1)–(5), определяемое формулами (17), (18), стремится к решению (25) стационарной обратной задачи (24) при $t\to\infty$.

Список литературы

[1] Ю.Е.Аниконов, Об однозначности решения обратной задачи для квантового кинетического уравнения, *Мат. сб.,* **181**(1990), №1, 68-74.

[2] С.Г.Михлин, Курс математической физики, СПб., Лань, 2002.

[3] Е.Г.Саватеев, О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения, *Сиб. мат. журн.*, **36**(1995), №1, 177-185.

[4] R.Riganti, E.Savateev, Solution of an inverse problem for the nonlinear heat equation, *Comm. Part. Diff. Equations*, **19**(1994), №9,10, 1611-1628.

[5] V.Kamynin, E.Francini, An inverse Problem for higher order parabolic equation with integral overdetermination. Unique solvability and stabilization of the solution, *Ser. Problemi non ben pasti ed inverse*, Firenze, Dell'istituto di analisi globale e applicazioni, 1996.

On a Problem of Identification of the Source Function for a Parabolic Equation

Ol'ga N.Cherepanova
Tatyana N.Shipina

The inverse problem is proved to be uniquely solvable "as a whole". The behavior of its solution is investigated as the time variable tends to infinity.

Keywords: inverse problem, stabilization, the problem of identification of coefficients, partial differential equations.